Тема 17: Самосопряженные операторы и симметрические матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Определения

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства V называется *самосопряженным*, если $\forall x, y \in V \, (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$.
Напомним, что матрица $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется *симметрической*, если $A^\top = A$.

Предложение

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства V:
(1) $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор;
(2) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе симметрическая;
(3) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе симметрическая.

$\Downarrow$ (1)$\Rightarrow$(2) Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – произвольный ортонормированный базис евклидова пространства V и $A = (\alpha_{ij})$ – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда $\mathcal{A}e_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}e_i$ при $j = 1, 2, \dots, n$. Имеем $(\mathcal{A}e_j, e_k) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}e_i, e_k) = \alpha_{kj}$ и $(e_j, \mathcal{A}e_k) = (e_j, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik}e_i) = \alpha_{jk}$. Так как $(\mathcal{A}e_j, e_k) = (e_j, \mathcal{A}e_k)$ при $j, k = 1, 2, \dots, n$, заключаем, что $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$, т.е. матрица A – симметрическая.

Очевидно, что из (2) следует (3).

(3)$\Rightarrow$(1) Пусть $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ – некоторый ортонормированный базис евклидова пространства V и $A = (\alpha_{ij})$ – симметрическая матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Убедимся, что $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор. Пусть $x, y \in V$. Тогда $[\mathcal{A}x] = A \cdot [x]$ и $[\mathcal{A}y] = A \cdot [y]$. Согласно формуле (2) сл.8 т.15 имеем $(\mathcal{A}x, y) = (A \cdot [x])^\top \cdot [y] = [x]^\top \cdot A^\top \cdot [y]$ и $(x, \mathcal{A}y) = [x]^\top \cdot (A \cdot [y]) = [x]^\top \cdot A \cdot [y]$. Так как $A^\top = A$, получаем $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ для любых $x, y \in V$, т.е. $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор.$\Uparrow$

Предложение

Все (вообще говоря, комплексные) корни характеристического многочлена любой симметрической матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

$\Downarrow$Докажем это утверждение только для матриц второго порядка. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$. Тогда $\chi_A(x) = (\alpha - x)(\gamma - x) - \beta^2 = x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2$. Дискриминант этого многочлена равен $(\alpha + \gamma)^2 - 4\alpha\gamma + 4\beta^2 = (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2$ и это выражение неотрицательно при всех $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, поэтому корни многочлена $\chi_A(x)$ всегда являются действительными числами.$\Uparrow$

Из предложения сл.2 получаем

Следствие

Характеристический многочлен любого самосопряженного оператора конечномерного евклидова пространства разлагается на линейные множители.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства V является самосопряженным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$Докажем, что пространство V имеет ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, используя индукцию по $\dim V$. База индукции. При $\dim V = 1$ любой оператор является самосопряженным, и для него ортонормированный базис состоит из орта пространства V.
Шаг индукции. Предположим, что для любого самосопряженного оператора на евклидовом пространстве размерности меньше n существует ортонормированный базис из собственных векторов. Пусть V – евклидово пространство, $\dim V = n$ и $\mathcal{A}$ – самосопряженный линейный оператор на V. Так как характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители, он имеет корень $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и существует собственный вектор-орт e_1 оператора $\mathcal{A}$, относящийся к λ_1. Положим $U = \{e_1\}^{\perp}$. Тогда U – подпространство V и, так как $V = \langle e_1 \rangle \oplus U$, $\dim U = n - 1$.

Окончание доказательства теоремы

Убедимся, что $\forall u \in U \;\; \mathcal{A}u \in U$. Так как $u \perp e_1$, имеем $(\mathcal{A}u, e_1) = (u, \mathcal{A}e_1) = (u, \lambda_1 e_1) = \lambda_1(u, e_1) = 0$. Следовательно, $\mathcal{A}u \perp e_1$ и $\mathcal{A}u \in U$. Мы можем рассматривать ограничение $\mathcal{A}|_U$ оператора $\mathcal{A}$ на подпространство U.

Поскольку $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ для любых $x, y \in U$, ограничение $\mathcal{A}|_U$ является самосопряженным оператором. Так как $\dim U = n - 1$, к этому ограничению применимо предположение индукции. Следовательно, U имеет ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{A}|_U$, т.е. собственных векторов $\mathcal{A}$. Добавив к этому базису вектор e_1, получим ортонормированный базис V из собственных векторов $\mathcal{A}$. Шаг индукции доказан.

Убедимся, что линейный оператор $\mathcal{A}$, для которого пространство V имеет ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{A}$, является самосопряженным. В самом деле, матрица оператора $\mathcal{A}$ в указанном базисе оказывается диагональной и потому симметрической. Остается применить предложение сл.2.$\Uparrow$

Определение

Матрица $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *ортогональной*, если $T^\top \cdot T = E_n$.

По определению ортогональная матрица T является обратимой и $T^{-1} = T^\top$. "Источником"ортогональных матриц является следующее

Предложение

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в конечномерном евклидовом пространстве является ортогональной.

$\Downarrow$Пусть $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $C = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – ортонормированные базисы евклидова пространства V и $T = (\tau_{ij})$ – матрица перехода от базиса B к базису C. Тогда $f_j = \sum_{i=1}^n \tau_{ij} e_i$ при $j = 1, 2, \ldots, n$. Так как $(f_j, f_k) = 1$ при $j = k$ и $(f_j, f_k) = 0$ при $j \neq k$, и $(f_j, f_k) = \sum_{i=1}^n \tau_{ij}\tau_{ik}$ согласно формуле (2) сл.8 т.15, заключаем, что $T^\top \cdot T = E_n$.$\Uparrow$

Следствие

Квадратная матрица A порядка n с действительными элементами является симметрической тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица T и диагональная матрица D порядка n с действительными элементами такие, что $A = T \cdot D \cdot T^{\top}$.

$\Downarrow$Пусть A – симметрическая матрица порядка n. Определим с ее помощью линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_n$, полагая $\forall x \in \mathbb{R}_n$ $\mathcal{A}x = A \cdot x$. Тогда в ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathbb{R}_n$ из столбцов единичной матрицы E_n матрицей оператора $\mathcal{A}$ будет A. Согласно предложению сл.2 оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным. По теореме сл.6 для него в пространстве $\mathbb{R}_n$ существует ортонормированный базис из собственных векторов. Обозначим через D матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе и через T – матрицу перехода. Тогда $D = T^{-1} \cdot A \cdot T$ согласно формуле сл.19 т.10, откуда $A = T \cdot D \cdot T^{-1}$. По предложению сл.7 $T^{-1} = T^{\top}$, откуда получаем $A = T \cdot D \cdot T^{\top}$.
Предположим, что $A = T \cdot D \cdot T^{\top}$, где D – диагональная матрица и T – ортогональная матрица, и убедимся, что $A^{\top} = A$. Имеем $A^{\top} = (T \cdot D \cdot T^{\top})^{\top} = (T^{\top})^{\top} \cdot D^{\top} \cdot T^{\top} = T \cdot D \cdot T^{\top} = A$, поскольку $D^{\top} = D$. Итак, $A^{\top} = A$.$\Uparrow$

Так как матрицы A и D из следствия сл.8 подобны, согласно предложению сл.3 т.13 $\chi_A = \chi_D$, поэтому справедливо следующее

Замечание

Если $A = T \cdot D \cdot T^{\top}$, где D – диагональная матрица и T – ортогональная матрица, то на главной диагонали матрицы D расположены все корни характеристического многочлена матрицы A с учетом кратности.

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова пространства, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический многочлен: (вычитаем из 1-й строки 2-ю, из 3-й 4-ю; выносим из 1-й строки $x+1$, из 3-й — $x-1$; к 1-му столбцу прибавляем 2-й, к 3-му 4-й; раскладываем по 1-й и затем по 2-й строкам)

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-x & 1+x & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x+1)(x-1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x^2-1) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3-x & 2-x \end{vmatrix} = -(x^2-1) \begin{vmatrix} 3-x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3-x & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x^2-1) \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (x^2-1)(x-1)(x-5) = (x-1)^2(x+1)(x-5).$$

Пример (1)

Найдем собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ для собственного значения λ_1:
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Имеем $x_1 = x_2$, $x_3 = -2x_2 - x_4$, и базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$ образуют векторы $a_1 = (1, 1, -2, 0)$, $a_2 = (0, 0, -1, 1)$. Так как $(a_1, a_2) = 2$, применяем к векторам a_2, a_1 процесс ортогонализации (сл.5 т.15): $b_1 = a_2$; $b_2 = a_1 + \lambda b_1$, $\lambda = -\frac{(a_1,b_1)}{(b_1,b_1)} = -1$; $b_2 = a_1 - b_1 = (1, 1, -1, -1)$. Нормируем векторы b_1 и b_2, получаем ортонормированный базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \mathcal{E})$: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1)$, $b_2 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$.

Найдем собственный вектор для λ_2: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Имеем $x_1 = -x_2$, $x_3 = x_4 = 0$, и базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} + \mathcal{E})$ образует вектор $b_3 = (-1, 1, 0, 0)$. Проверяем: $(b_1, b_3) = 0$, $(b_2, b_3) = 0$. Нормируем его: $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0, 0)$.

Найдем собственный вектор для λ_3:
$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 5 & -11 \\ 0 & -6 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Имеем $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, и базис в Ker$(\mathcal{A} - 5\mathcal{E})$ образует вектор $b_4 = (1, 1, 1, 1)$. Нормируем его: $e_4 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$.

Векторы e_1, e_2, e_3,e_4 образуют ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе:
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$
Матрица перехода от исходного ортонормированного базиса к ортонормированному базису из собственных векторов
$$T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
– ортогональная матрица.

Пример (3)

Так как $A_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T = T^{\top} \cdot A \cdot T$, заключаем, что $A = T \cdot A_1 \cdot T^{\top}$.

Матрицу T удобно записать в виде $T = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.