Тема 16: Матрица Грама и определитель Грама

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Лекции по линейной алгебре для физиков

Пусть V – евклидово или унитарное пространство, $A = (a_1, \ldots, a_m)$ – система векторов пространства V.

Определения

Матрицей Грама системы векторов A называется матрица, составленная из скалярных произведений $\begin{pmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_m) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, a_1) & (a_m, a_2) & \ldots & (a_m, a_m) \end{pmatrix}$.

Обозначение: G_A.

Определителем Грама системы векторов A называется определитель $|G_A|$.

Обозначение: g_A.

Следующие утверждения непосредственно следуют из определений.

Наблюдения

1. Если V – евклидово пространство, то $G_A^\top = G_A$ для любой системы A.
2. Если V – унитарное пространство, то $\overline{G_A}^\top = G_A$ для любой системы A.
3. Система A ортогональная $\Leftrightarrow$ G_A – диагональная.
4. Система A ортонормированная $\Leftrightarrow$ $G_A = E_m$.

Вычисление скалярного произведения с помощью матрицы Грама

Пусть V – евклидово или унитарное пространство, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – произвольный базис пространства V.

Теорема

Для любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство

$$(x, y) = ([x]_B)^\top \cdot G_B \cdot \overline{[y]}_B. \tag{1}$$

$\Downarrow$Запишем $x = \sum_{j=1}^n \xi_j b_j$, $y = \sum_{k=1}^n \eta_k b_k$. Тогда

$$(x, y) = \left(\sum_{j=1}^n \xi_j b_j, \sum_{k=1}^n \eta_k b_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (\xi_j b_j, \eta_k b_k) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \xi_j (b_j, b_k) \overline{\eta}_k =$$

$$= \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=1}^n (b_j, b_k) \overline{\eta}_k = (\xi_1, \ldots, \xi_n)(G_B \cdot \overline{[y]}_B) = ([x]_B)^\top \cdot G_B \cdot \overline{[y]}_B,$$ что и требуется доказать. $\Uparrow$

Следствие

Для любого ортонормированного базиса B евклидова или унитарного пространства V и любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство

$$(x, y) = ([x]_B)^\top \cdot \overline{[y]}_B. \tag{2}$$

Базис B евклидова пространства V имеет матрицу Грама $G_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Ортогонализовать систему векторов a_1, a_2, заданных координатами в базисе B: $[a_1]_B = (1,1,1,1)^\top$, $[a_2]_B = (1,-1,1,-1)^\top$.

Ортогонализовать систему векторов означает найти ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2\rangle$. Вычислим

$$(a_1, a_2) = [a_1]_B^\top \cdot G_B \cdot [a_2]_B = (1,1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot (1,-1,1,-1)^\top =$$

$(4,5,4,8) \cdot (1,-1,1,-1)^\top = -5$. Аналогично находим $(a_1, a_1) = (4,5,4,8) \cdot (1,1,1,1)^\top = 21$. Применяем процесс ортогонализации Грама-Шмидта: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda b_1$, где $\lambda = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = \dfrac{5}{21}$. Вычисляем $[b_2]_B = (1,-1,1,-1)^\top + \frac{5}{21}(1,1,1,1)^\top = \frac{2}{21}(13,-8,13,-8)^\top$.
Подпространство $\langle a_1, a_2\rangle$ имеет ортогональный базис b_1, b_2.

Лемма

Для любой системы векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ и любого скаляра λ имеет место равенство $g_{(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)} = g_{(a_1,\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$.

$\Downarrow$Запишем $g_{(a_1,\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)} =$

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_1, a_\ell) & \ldots & (a_1, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k + \lambda a_\ell, a_1) & \ldots & (a_k + \lambda a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_k + \lambda a_\ell, a_\ell) & \ldots & (a_k + \lambda a_\ell, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_\ell, a_1) & \ldots & (a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_\ell, a_\ell) & \ldots & (a_\ell, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, a_1) & \ldots & (a_m, a_k + \lambda a_\ell) & \ldots & (a_m, a_\ell) & \ldots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}$$

и $g_{(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)} =$

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \ldots & (a_1, a_k) & \ldots & (a_1, a_\ell) & \ldots & (a_1, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & \ldots & (a_k, a_k) & \ldots & (a_k, a_\ell) & \ldots & (a_k, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_\ell, a_1) & \ldots & (a_\ell, a_k) & \ldots & (a_\ell, a_\ell) & \ldots & (a_\ell, a_m) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_m, a_1) & \ldots & (a_m, a_k) & \ldots & (a_m, a_\ell) & \ldots & (a_m, a_m) \end{vmatrix}.$$

Так как $(a_k + \lambda a_\ell, a_j) = (a_k, a_j) + \lambda(a_\ell, a_j)$, $(a_j, a_k + \lambda a_\ell) = (a_j, a_k) + \overline{\lambda}(a_j, a_\ell)$ при $j \neq k$, и $(a_k + \lambda a_\ell, a_k + \lambda a_\ell) = (a_k, a_k) + \lambda(a_\ell, a_k) + \overline{\lambda}(a_k, a_\ell) + \lambda\overline{\lambda}(a_\ell, a_\ell)$, легко подсчитать, что определитель $g_{(a_1,\ldots,a_k+\lambda a_\ell,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$ получается из определителя $g_{(a_1,\ldots,a_k,\ldots,a_\ell,\ldots,a_m)}$ путем двух последовательных преобразований: сначала прибавления к k-й строке ℓ-й строки, умноженной на λ, а затем прибавления к k-му столбцу ℓ-го столбца, умноженного на $\overline{\lambda}$.$\Uparrow$

Предложение

Если ортогональная система $(b_1, \ldots, b_m)$ получена из системы $(a_1, \ldots, a_m)$ с помощью процесса ортогонализации (сл.5-6 т.15), то $g_{(a_1,\ldots,a_m)} = g_{(b_1,\ldots,b_m)} = |b_1|^2 \ldots |b_m|^2$.

$\Downarrow$Первое равенство следует из леммы сл.5, так как каждый вектор в процессе ортогонализации получается с помощью цепочки преобразований, рассмотренных в указанной лемме:
$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = (b_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) \to (b_1, a_2 + \gamma_{21} b_1, a_3, \ldots, a_m) \to (b_1, b_2, a_3 + \gamma_{21} b_1, \ldots, a_m) \to (b_1, b_2, a_3 + \gamma_{21} b_1 + \gamma_{32} b_2, \ldots, a_m) \to \ldots \to (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m)$. Второе равенство следует из того, что в определителе $g_{(b_1,\ldots,b_m)}$ элементы вне главной диагонали равны 0, а на главной диагонали расположены элементы $(b_j, b_j) = |b_j|^2$ $(j = 1, \ldots, m)$. $\Uparrow$

Следствие

Для любой системы векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ число $g_{(a_1,\ldots,a_m)}$ – действительное неотрицательное и $g_{(a_1,\ldots,a_m)} = 0$ тогда и только тогда, когда система $(a_1, \ldots, a_m)$ линейно зависима.

$\Downarrow$Первое утверждение следует из предложения; второе выполняется, так как в процессе ортогонализации из линейно независимой системы получается линейно независимая система, а из линейно зависимой – система, содержащая нулевой вектор. $\Uparrow$

Понятие параллелотопа обобщает понятия отрезка, параллелограмма, параллелепипеда.

Определения

Параллелотопом, порожденным линейно независимой системой векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ евклидова пространства, называется множество $\{\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m | 0 \leq \lambda_j \leq 1 \ (j = 1, \ldots, m)\}$.
Объем параллелотопа $V_{a_1,\ldots,a_m}$ определяется по индукции. База индукции: $V_{a_1} = |a_1|$. Шаг индукции: $V_{a_1,\ldots,a_m} = V_{a_1,\ldots,a_{m-1}} \cdot |b_m|$, где b_m – ортогональная составляющая вектора a_m относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$.

Предложение

Для любой линейно независимой системы $(a_1, \ldots, a_m)$ имеет место равенство $V_{a_1,\ldots,a_m} = \sqrt{g_{(a_1,\ldots,a_m)}}$.

$\Downarrow$При проведении процесса ортогонализации для системы $(a_1, \ldots, a_m)$ каждый вектор b_j $(j = 2, \ldots, m)$ получающейся ортогональной системы является ортогональной составляющей вектора a_j относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{j-1} \rangle$. Отсюда следует, что $V_{a_1,\ldots,a_m} = |b_1| \ldots |b_m|$. В силу предложения сл.7 получаем требуемое.$\Uparrow$

Предложение

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – ортонормированный базис евклидова пространства V, $(a_1, \ldots, a_n)$ – линейно независимая система векторов из V, A – матрица, составленная из столбцов координат $[a_j]_e$ векторов a_j в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Тогда $V_{a_1,\ldots,a_n}$ равен модулю определителя матрицы A.

$\Downarrow$В силу следствия сл.3 справедливо равенство $A^\top A = G_{(a_1,\ldots,a_n)}$. Переходя к определителям, получаем $|A^\top \cdot A| = g_{(a_1,\ldots,a_n)}$, откуда по свойствам определителей получаем $g_{(a_1,\ldots,a_n)} = |A^\top||A| = |A|^2$. Применение предложения сл.8 завершает доказательство.$\Uparrow$

В частности, получаем формулу $S = \mod \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ для вычисления площади параллелограмма на плоскости , построенного на векторах $\vec{a_1} = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$, $\vec{a_2} = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$, которые заданы координатами в ортонормированном базисе.

Формула для объема параллелепипеда известна из аналитической геометрии (получается с помощью смешанного произведения).

Длина ортогональной составляющей

Следствие

Пусть $(a_1, \ldots, a_m)$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства V, и b – ортогональная составляющая вектора a_m относительно подпространства $\langle a_1, \ldots, a_{m-1} \rangle$. Тогда $|b| = \sqrt{\dfrac{g_{(a_1,\ldots,a_m)}}{g_{(a_1,\ldots,a_{m-1})}}}$.

Это утверждение вытекает из определения объема параллелотопа, согласно которому $|b| = \dfrac{V_{a_1,\ldots,a_m}}{V_{a_1,\ldots,a_{m-1}}}$, и предложения сл.8.