Тема 15: Ортогональность

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Понятие ортогональности обобщает понятие перпендикулярности геометрических векторов на евклидовы пространства.

Пусть V – евклидово пространство.

Определение

Векторы $x, y \in V$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.
Обозначение: $x \perp y$.

Очевидно, что $0_V \perp x$ для любого $x \in V$. Также легко проверить, что $x \perp y \Longrightarrow \alpha x \perp \beta y$ для любых скаляров α, β. Если $\alpha, \beta \neq 0$, то верно и обратное: $\alpha x \perp \beta y \Longrightarrow x \perp y$.

Определения

Система векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ пространства V называется *ортогональной*, если $a_j \perp a_k$ при всех различных $j, k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.
Ортогональная система, состоящая из ортов, называется *ортонормированной*.

Ортогональная система может содержать нулевой вектор, любая ортонормированная система состоит из ненулевых векторов.
Для любых векторов a_j, a_k ортогональной (соотв. ортонормированной) системы имеет место равенство

$$(a_j, a_k) = \begin{cases} a_j^2 \text{ (соотв. } 1), & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases} \tag{1}$$

Линейная независимость ортогональных систем

Предложение

Произвольная ортогональная система, состоящая из ненулевых векторов, линейно независима.

$\Downarrow$ Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ – ортогональная система, состоящая из ненулевых векторов. Предположим, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m = 0_V$. Умножим скалярно обе части этого равенства на вектор a_j, где $1 \leq j \leq m$. В соответствии с утверждением (1) сл.3 получим $\lambda_j a_j^2 = 0$. Так как $a_j \neq 0_V$, имеем $a_j^2 > 0$, откуда $\lambda_j = 0$. Это справедливо для всех $1 \leq j \leq m$, поэтому система $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ линейно независима. $\Uparrow$

Следствие

Произвольная ортонормированная система векторов линейно независима.

Определения

Базис подпространства, являющийся ортогональной (соотв. ортонормированной) системой векторов, называется *ортогональным* (соотв. *ортонормированным*) базисом.

Процесс нахождения векторов системы $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ по векторам системы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, описанный в доказательстве следующей теоремы, называется *процесс ортогонализации Грама-Шмидта*.

Теорема

Для любой линейно независимой системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ существует такая ортогональная система из ненулевых векторов $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ что $\langle a_1 \rangle = \langle b_1 \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$, ..., $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle =$ $= \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$.

$\Downarrow$ Используем индукцию по m. Положим $b_1 = a_1$ и будем искать b_2 в виде $a_2 + \gamma b_1$ для некоторого скаляра γ. Из условия $b_2 \perp b_1$ имеем $0 = (b_2, b_1) = (a_2 + \gamma b_1, b_1) = (a_2, b_1) + \gamma(b_1, b_1)$, откуда $(a_2, b_1) + \gamma(b_1, b_1) = 0$. Так как $a_1 \neq 0_V$ в силу линейной независимости системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, имеем $(b_1, b_1) > 0$ и $\gamma = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)}$.
Следовательно, вектор b_2 определен однозначно и $b_2 \neq 0_V$ в силу линейной независимости системы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Из определения векторов b_1, b_2 следует, что $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$. База индукции установлена.

Окончание доказательства теоремы

Шаг индукции. Предположим, что уже построена ортогональная система из ненулевых векторов $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ $(1 < s < m)$ такая что $\langle a_1 \rangle = \langle b_1 \rangle$, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle b_1, b_2 \rangle$, $\ldots$, $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_s \rangle$. Будем искать вектор b_{s+1} в виде $a_{s+1} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_s b_s$ с неопределенными скалярами γ_j $(j \in \{1, \ldots, s\})$. Тогда $b_{s+1} \neq 0_V$ в силу линейной независимости системы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Из условия $b_{s+1} \perp b_j$ для $j \in \{1, \ldots, s\}$, учитывая равенство (1) сл.3, получаем
$0 = (b_{s+1}, b_j) = (a_{s+1} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_s b_s, b_j) = = (a_{s+1}, b_j) + \gamma_j (b_j, b_j)$,
откуда $\gamma_j = -\dfrac{(a_{s+1}, b_j)}{(b_j, b_j)}$ $(j \in \{1, \ldots, s\})$. Следовательно, вектор b_{s+1} определен однозначно.
Покажем, что $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s, a_{s+1} \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_s, b_{s+1} \rangle$. Так как $\langle b_1, b_2, \ldots, b_s \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$ и $b_{s+1} = a_{s+1} + \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_s b_s$, заключаем, что $\langle b_1, b_2, \ldots, b_s, b_{s+1} \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_s, a_{s+1} \rangle$.
Противоположное включение следует из включения $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \ldots, b_s \rangle$ и равенства $a_{s+1} = b_{s+1} - \gamma_1 b_1 - \ldots - \gamma_s b_s$. Шаг индукции доказан.$\Uparrow$

Процесс ортогонализации можно применять и к линейно зависимой системе векторов (см. сл.17). При этом если система $(a_1, a_2, \ldots, a_s)$ линейно независима и $(a_1, a_2, \ldots, a_s) \vdash a_{s+1}$, то получается ортогональная система $(b_1, b_2, \ldots, b_s)$ и $b_{s+1} = 0_V$. Нулевые векторы нужно отбрасывать, как и соответствующие векторы из системы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Найти ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ из $\mathbb{R}^4$, где $a_1 = (1, -3, 2, 1)$, $a_2 = (-1, 7, -3, -2)$, $a_3 = (2, -2, 3, 1)$.

Положим $b_1 = a_1$. Ищем $b_2 = a_2 + \gamma b_1$. Вычисляем $b_1^2 = 1 + 9 + 4 + 1 = 15$, $(a_2, b_1) = -1 - 21 - 6 - 2 = -30$. Находим $\gamma = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{-30}{15} = 2$.
Следовательно, $b_2 = a_2 + 2b_1 = (-1, 7, -3, -2) + 2(1, -3, 2, 1) = (1, 1, 1, 0)$.
Проверяем: $(b_2, b_1) = 1 - 3 + 2 = 0$.
Ищем $b_3 = a_3 + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2$. Вычисляем $b_2^2 = 1 + 1 + 1 = 3$, $(a_3, b_1) = 2 + 6 + 6 + 1 = 15$, $(a_3, b_2) = 2 - 2 + 3 = 3$. Находим $\gamma_1 = -\dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{15}{15} = -1$, $\gamma_2 = -\dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\dfrac{3}{3} = -1$. Следовательно, $b_3 = a_3 - b_1 - b_2 = (2, -2, 3, 1) - (1, -3, 2, 1) - (1, 1, 1, 0) = (0, 0, 0, 0)$.
Таким образом, $(a_1, a_2) \vdash a_3$, поскольку $a_3 = b_1 + b_2 = b_1 + a_2 + 2b_1 = 3b_1 + a_2 = 3a_1 + a_2$. Мы видим, что $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle$ и ортогональный базис этого подпространства состоит из векторов b_1, b_2.

Применяя процесс ортогонализации к произвольному базису евклидова линейного пространства, получаем ортогональный базис. Таким образом, справедливо

Следствие

Произвольное ненулевое конечномерное евклидово линейное пространство имеет ортогональный базис и ортонормированный базис.

Ортонормированный базис получается из ортогонального базиса путем нормирования каждого вектора (сл.7 т.14).

Координаты вектора в ортогональном и ортонормированном базисах

Пусть $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – ортогональный базис евклидова линейного пространства V и $x \in V$. С помощью скалярного произведения можно найти координаты $[x]_B$. Пусть $x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_n b_n$. Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор b_j, где $1 \le j \le n$. С учетом равенства (1) сл.3 получаем $(x, b_j) = \xi_j (b_j, b_j)$. Таким образом,

$$\xi_j = \frac{(x, b_j)}{(b_j, b_j)} (j = 1, \ldots, n).$$

Для ортонормированного базиса $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ евклидова линейного пространства V координаты вектора $x \in V$ в этом базисе $[x]_C = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^\top$ вычисляются по формулам

$$\gamma_j = (x, c_j)(j = 1, \ldots, n).$$

Определение

Пусть M – подмножество евклидова линейного пространства V. *Ортогональным дополнением* множества M называется множество $\{x \in V | x \perp u \ \forall u \in M\}$. Обозначение: $M^{\perp}$.

В евклидовом пространстве V_g для вектора $\vec{a} \neq \vec{0}$ справедливо равенство $\{\vec{a}\}^{\perp} = V_{\pi}$, где π – плоскость, перпендикулярная к вектору $\vec{a}$. Для неколлинеарных векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V_g$ имеет место равенство $\{\vec{a}, \vec{b}\}^{\perp} = V_{\ell}$, где ℓ – прямая, перпендикулярная к векторам $\vec{a}, \vec{b}$.

Из определения непосредственно следует, что $M \subseteq N \Longrightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$. Очевидно также, что $V^{\perp} = \{0_V\}$ (поскольку $\forall x \in V^{\perp} \ x \perp x$) и $\{0_V\}^{\perp} = V$.

Предложение

1. Для любого подмножества $M \subseteq V$ его ортогональное дополнение $M^\perp$ является подпространством в V.
2. Для любой системы $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ векторов из V справедливо равенство $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^\perp = \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle^\perp$.

$\Downarrow$ Для доказательства утверждения 1 используем предложение сл.3 т.7. Очевидно, $0_V \in M^\perp$. Пусть $x, y \in M^\perp$. Тогда $\forall u \in M$ $x \perp u$ и $y \perp u$, т.е. $(x, u) = 0$ и $(y, u) = 0$. Следовательно, $(x + y, u) = (x, u) + (y, u) = 0$, и потому $(x + y) \perp u$ $\forall u \in M$. Таким образом, $x + y \in M^\perp$. Для любого скаляра α имеем $\alpha x \perp u$, поэтому $\alpha x \in M^\perp$. Итак, $M^\perp$ – подпространство.
Докажем утверждение 2. Так как $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$, имеем $\langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle^\perp \subseteq \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^\perp$. Установим противоположное включение. Пусть $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^\perp$ и $u \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle$. Тогда $x \perp a_j$, т.е. $(x, a_j) = 0$ при $j = 1, \ldots, m$, и $u = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m$. Далее, $(x, u) = (x, \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_m a_m) = \lambda_1 (x, a_1) + \lambda_2 (a_2, u) + \ldots + \lambda_m (a_m, u) = 0$, так как $(a_j, u) = 0$ при $j = 1, \ldots, m$. Таким образом, $x \perp u$ и $x \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle^\perp$. Итак, $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}^\perp \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_m \rangle^\perp$.$\Uparrow$

Найти базис ортогонального дополнения к подпространству $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, где $a_1 = (1, 2, 2, 1)$, $a_2 = (3, 2, 2, 3)$, $a_3 = (1, 5, 5, 1)$.

В силу утверждения 2 предложения сл.10 $U^\perp = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle^\perp = \{a_1, a_2, a_3\}^\perp$. Для любого $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ условие $x \in \{a_1, a_2, a_3\}^\perp$ равносильно системе условий $x \perp a_j$ $(j = 1, 2, 3)$, откуда $(a_j, x) = 0$. Получаем однородную систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ Решаем систему методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Находим общее решение: $\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = -x_3. \end{cases}$ Записываем

фундаментальную систему решений: $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ Базис

ортогонального дополнения $U^\perp$: $b_1 = (0, -1, 1, 0)$, $b_2 = (-1, 0, 0, 1)$.

Теорема

Пусть U – конечномерное подпространство евклидова пространства V. Тогда $V = U \oplus U^{\perp}$.

$\Downarrow$Если $U = \{0_V\}$, то $U^{\perp} = V$ и доказывать нечего. Пусть $\dim U = k$. Выберем в U ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_k)$. Покажем, что $V = U + U^{\perp}$. Для любого $x \in V$ запишем $x = u + u_1$ с неизвестными $u \in U$, $u_1 \in U^{\perp}$. Имеем $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k$, где λ_j – неизвестные скаляры, и $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_k e_k + u_1$. Умножив скалярно обе части последнего равенства на вектор e_j $(j = 1, \dots, k)$, получим $(x, e_j) = \lambda_j$, так как $u_1 \perp e_j$ и $(e_1, \dots, e_k)$ – ортонормированный базис. Теперь положим $u = \sum_{j=1}^{k} (x, e_j) e_j$ и $u_1 = x - u$. Очевидно, $u \in U$. Покажем, что $u_1 \in U^{\perp}$. Так как $(u, e_j) = (\sum_{j=1}^{k} (x, e_j) e_j, e_j) = (x, e_j)$, имеем $(u_1, e_j) = (x - u, e_j) = = (x, e_j) - (u, e_j) = 0$. Следовательно, $u_1 \in \{e_1, \dots, e_k\}^{\perp} = \langle e_1, \dots, e_k \rangle^{\perp} = = U^{\perp}$ в силу утверждения 2 предложения сл.10. Таким образом, $V = U + U^{\perp}$. Очевидно, что $U \cap U^{\perp} = \{0_V\}$. Применение теоремы сл.19 т.7 завершает доказательство.$\Uparrow$

Ортогональные компонента и составляющая вектора относительно подпространства

Пусть V – конечномерное евклидово пространство, U – подпространство V. Согласно теореме сл.13 $V = U \oplus U^{\perp}$. Для любого вектора $x \in V$ существуют однозначно определенные векторы $y \in U$ и $z \in U^{\perp}$ такие что $x = y + z$.

Определение

Вектор y называется *ортогональной компонентой*, а вектор z – *ортогональной составляющей* вектора $x \in V$ относительно подпространства V.

Доказательство теоремы сл.13 фактически содержит алгоритм нахождения ортогональных компоненты и составляющей вектора относительно подпространства. При этом в подпространстве достаточно выбрать какой-то базис, не обязательно ортонормированный.

Определение

Углом между ненулевым вектором x и ненулевым подпространством U евклидова пространства V называется угол между вектором x и его ортогональной компонентой y на U, если $y \neq 0_V$, и угол $\frac{\pi}{2}$, если $y = 0_V$.

Пример нахождения ортогональных компоненты и составляющей вектора

Найти ортогональные компоненту и составляющую вектора $x = (1, 0, 2, -2)$ относительно подпространства $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, где $a_1 = (1, -1, 1, 0)$ и $a_2 = (2, -1, 0, 1)$ в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^4$. Определить угол между вектором x и подпространством U.

Будем искать ортогональную компоненту y в виде $y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$. Запишем $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + z$, где $z \in U^{\perp}$. Умножив это равенство скалярно на a_1 и a_2, получим $(x, a_1) = \lambda_1(a_1, a_1) + \lambda_2(a_2, a_1)$ и $(x, a_2) = \lambda_1(a_1, a_2) + \lambda_2(a_2, a_2)$. Вычислив скалярные произведения, получаем систему линейных уравнений $\begin{cases} 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 3, \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0. \end{cases}$ Решив эту систему, находим $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Таким образом, $y = 2a_1 - a_2 = (0, -1, 2, -1)$ и $z = x - y = (1, 1, 0, -1)$. Делаем проверку: $(z, a_1) = 0$, $(z, a_2) = 0$.

Находим угол: $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{(x,y)}{|x||y|} = \frac{6}{\sqrt{9}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Дополняемость ортогональных и ортонормированных систем до ортогональных и ортонормированных базисов

Предложение

Пусть V – евклидово пространство, dim$V = n > 1$, $B = (b_1, \ldots, b_k)$ $(1 \leq k < n)$ – ортоногональная система из ненулевых векторов (соотв. ортонормированная система) из V. Тогда B можно дополнить до ортогонального (соотв. ортонормированного) базиса пространства V.

$\Downarrow$Положим $U = \langle B \rangle$. В силу предложения и следствия сл.4 система B линейно независима, поэтому dim$U = k$ и dim$U^\perp = n - k > 0$. Выберем в $U^\perp$ ортогональный (соотв. ортонормированный) базис $C = (c_1, \ldots, c_{n-k})$. Тогда система $(b_1, \ldots, b_k, c_1, \ldots, c_{n-k})$ будет ортогональным (соотв. ортонормированным) базисом пространства V. $\Uparrow$

Пример дополнения ортонормированной системы до ортонормированного базиса

Пример

Убедиться, что система из векторов $a_1 = \frac{1}{5}(1, 2, 4, 2)$ и $a_2 = \frac{1}{5}(2, -1, -2, 4)$ является ортонормированной и дополнить ее до ортонормированного базиса арифметического пространства $\mathbb{R}^4$.

Легко проверить, что $|a_1| = |a_2| = 1$ и $(a_1, a_2) = 0$. Найдем базис ортогонального дополнения $\langle a_1, a_1\rangle^{\perp}$ (см. сл.12).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Отсюда $x_1 = -2x_4$, $x_2 = -2x_3$ и базис подпространства $\langle a_1, a_2\rangle^{\perp}$ состоит из векторов $b_1 = (0, -2, 1, 0)$ и $b_2 = (-2, 0, 0, 1)$. Эти векторы ортогональны, поэтому остается их нормировать: $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, -2, 1, 0)$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 0, 0, 1)$. Векторы c_1, c_2 дополняют систему a_1, a_2 до ортонормированного базиса арифметического пространства $\mathbb{R}^4$.

В случае, если векторы b_1, b_2 получаются не ортогональными, к ним следует применить процесс ортогонализации Грама-Шмидта, и затем нормировать полученные векторы.

Обобщение теоремы Пифагора

Следующее утверждение обобщает теорему Пифагора, справедливую для перпендикулярных векторов из пространства V_g, на ортогональные векторы произвольного евклидова пространства.

Предложение

Пусть V – евклидово пространство, $x, y \in V$ и $x \perp y$. Тогда $|x+y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$.

$\Downarrow$ Заметим, что $|x+y|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = (x,x) + (y,y) = |x|^2 + |y|^2$, так как $(x,y) = (y,x) = 0$. $\Uparrow$