Тема 13: Собственные векторы и собственные значения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Пусть F – поле, $A \in F^{n \times n}$.

Определения

Характеристической матрицей матрицы A называется матрица $A - xE_n$.
Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен $|A - xE_n|$ – определитель характеристической матрицы $A - xE_n$.
Обозначение: $\chi_A(x)$.

В развернутом виде характеристический многочлен матрицы $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ имеет вид

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

В частности,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})x + x^2.$$

Определение характеристического многочлена матрицы см. на предыдущем слайде.

Предложение

Характеристические многочлены подобных матриц равны.

$\Downarrow$ Пусть матрица B подобна матрице A, т.е. $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ для некоторой невырожденной матрицы $T \in F^{n \times n}$. Имеем
$\chi_B(x) = |B - xE_n| = |T^{-1} \cdot A \cdot T - T^{-1} \cdot (xE_n) \cdot T| =$
$|T^{-1} \cdot (A - xE_n) \cdot T| = |T^{-1}||A - xE_n||T| = |A - xE_n| = \chi_A(x)$, так как
$|T^{-1}||T| = 1$. $\Uparrow$

Так как любые две матрицы линейного оператора конечномерного пространства подобны (см. сл. 19 т. 10), корректным является следующее

Определение

Характеристическим многочленом линейного оператора $\mathcal{A}$ линейного пространства V размерности n называется характеристический многочлен любой матрицы этого оператора. Обозначение: $\chi_{\mathcal{A}}(x)$.

Пример вычисления характеристического многочлена

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства F_4 задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем его характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$ на этом и следующем слайдах (вычитаем третью строку из первой, а четвертую прибавляем ко второй; выносим из первой и второй строки множитель $2-x$; вычитаем вторую строку, умноженную на 3, из третьей, а первую — из четвертой; вычитаем вторую строку, умноженную на 2, из четвертой; вычисляем определитель треугольной матрицы):

$$\chi_{\mathcal{A}}(x) =$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 2-x \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

Окончание примера

$$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)^3(-2-x) = (x-2)^3(x+2).$$

При вычислении характеристического многочлена указанным способом он получается разложенным на множители. Это оказывается весьма удобным, когда необходимо найти корни характеристического многочлена. Ниже мы увидим, что корни характеристического многочлена линейного оператора пространства V над полем F, лежащие в F, представляют особый интерес.

Пусть V – линейное пространство над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$. Естественно считать наиболее простым способом действия линейного оператора $\mathcal{A}$ на вектор $v \in V$ умножение этого вектора на некоторый скаляр $\lambda \in F$. Мы приходим к следующему определению.

Определение

Если $v \neq 0_V$ и $\mathcal{A}v = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in F$, то v называется *собственным вектором*, а λ – *собственным значением* линейного оператора $\mathcal{A}$. При этом говорят, что собственный вектор v *относится* к собственному значению λ, а собственное значение λ *относится* к собственному вектору v.

Если $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \neq \{0_V\}$, то любой ненулевой вектор из $\mathrm{Ker}\mathcal{A}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$, относящимся к собственному значению 0.

Предлагается найти в качестве упражнения собственные векторы и собственные значения линейных операторов, приведенных в примерах т.10.

Подпространство собственных векторов

Обозначим через $\mathcal{E}$ *единичный* линейный оператор, который не изменяет каждый вектор линейного пространства V: $\mathcal{E}x = x \; \forall x \in V$.

Предложение

Множество всех собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, относящихся к собственному значению λ, и нулевой вектор образуют подпространство, совпадающее с ядром $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$.

$\Downarrow$ Имеем

$\mathcal{A}v = \lambda v \Leftrightarrow \mathcal{A}v - \lambda\mathcal{E}v = 0_V \Leftrightarrow (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})v = 0_V \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Таким образом, условие, что v является собственным вектором для линейного оператора $\mathcal{A}$ равносильно тому, что $v \neq 0_V$ и $v \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Следовательно, множество всех собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, относящихся к собственному значению λ, и нулевой вектор совпадает с ядром $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ и потому является подпространством. Утверждение доказано. $\Uparrow$

Находить собственные значения линейного оператора помогает следующее

Предложение

Пусть V – линейное пространство размерности n над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V)$. Скаляр $\lambda \in F$ является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда λ является корнем характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$.

$\Downarrow$ Согласно предложению сл.4 скаляр $\lambda \in F$ является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq \{0_V\}$. В силу теоремы сл.6 т.11, примененной к линейному оператору $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$, получаем что $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \neq \{0_V\} \Leftrightarrow \mathrm{d}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{r}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) < \dim V$. Возьмем произвольный базис пространства V и обозначим через A матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) \leftrightarrow A - \lambda E_n$. Так как $\mathrm{r}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathrm{r}(A - \lambda E_n)$ и $\mathrm{r}(A - \lambda E_n) < n \Leftrightarrow |A - \lambda E_n| = 0$, с учетом равенств $\chi_{\mathcal{A}}(\lambda) = \chi_A(\lambda) = |A - \lambda E_n|$ получаем требуемое. $\Uparrow$

Теорема

Собственные векторы $v_1, v_2, \ldots, v_k$ линейного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, образуют линейно независимую систему.

$\Downarrow$ Докажем это утверждение индукцией по k. База индукции очевидна: при $k = 1$ имеем $v_1 \neq 0_V$, т.е. система из одного вектора v_1 линейно независима. Для доказательства шага индукции предположим, что утверждение уже доказано для всех $1 \leq m < k$. Пусть $v_1, v_2, \ldots, v_k$ – собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Тогда $\mathcal{A}v_j = \lambda_j v_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Предположим, что

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0_V \tag{1}$$

и докажем, что $\alpha_j = 0$ при всех $j = 1, 2, \ldots, k$.

Окончание доказательства теоремы

Применив к обеим частям равенства (1) линейный оператор $\mathcal{A}$, получаем $\mathcal{A}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k) = \mathcal{A}0_V$ и $\alpha_1(\mathcal{A}v_1) + \alpha_2(\mathcal{A}v_2) + \ldots + \alpha_k(\mathcal{A}v_k) = = 0_V$, откуда

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k v_k = 0_V.$$

Умножив обе части равенства (1) на λ_k, получим

$$\lambda_k\alpha_1 v_1 + \lambda_k\alpha_2 v_2 + \ldots + \lambda_k\alpha_k v_k = 0_V.$$

Вычитая из последнего полученного равенства предпоследнее, получаем $\alpha_1(\lambda_k - \lambda_1)v_1 + \alpha_2(\lambda_k - \lambda_2)v_2 + \ldots + \alpha_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1})v_{k-1} = 0_V$. Применяя предположение индукции к векторам $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$, заключаем, что система $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$ линейно независима, откуда $\alpha_j(\lambda_k - \lambda_j) = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Поскольку $\lambda_k - \lambda_j \neq 0$, имеем $\alpha_j = 0$ при $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Подставив в равенство (1) сл.9, получаем $\alpha_k v_k = 0_V$, откуда $\alpha_k = 0$, поскольку $v_k \neq 0_V$. Шаг индукции доказан. Доказательство теоремы закончено. $\Uparrow$

Алгоритм нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V над полем F задан в некотором базисе матрицей $A \in F^{n\times n}$.

Чтобы найти собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, следует вычислить характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x) = \chi_A(x) = |A - xE_n|$ и найти его корни, лежащие в поле F. Затем для каждого собственного значения λ находим базис ядра $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$, используя один из алгоритмов темы 11 (сл.8 или 10). Собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к собственному значению λ, суть все нетривиальные линейные комбинации найденных базисных векторов.

Обоснование этого алгоритма непосредственно получается из предложений сл.7 и 8, так как ненулевые векторы из ядра $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ – это как раз все нетривиальные линейные комбинации базисных векторов этого ядра.

Пример нахождения собственных значений и собственных векторов

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства F^4 задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$.

Характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x) = (x-2)^3(x+2)$ найден на сл.4-5; его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.

Мы будем искать координаты собственных векторов в том базисе, в котором данный оператор имеет матрицу A. Чтобы найти собственные векторы, относящиеся к собственному значению λ_1, найдем базис ядра линейного оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}$. Используем алгоритм сл.8 т.11.

Матрица оператора $\mathcal{A}_1$ имеет вид $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Применяя метод Гаусса–Жордана к однородной системе линейных уравнений с такой матрицей, получаем следующую цепочку матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По последней матрице записываем однородную систему линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальную систему решений (которая будет базисом ядра Ker$\mathcal{A}_1$): $\begin{cases} x_1 - x_3 - 4x_4 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0, \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + 4x_4; \\ x_2 = -x_4, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произвольный собственный вектор, относящийся к собственному значению 2, может быть записан в виде $\gamma_1(1,0,1,0) + \gamma_2(4,-1,1,0)$, где по крайней мере одно из чисел γ_1, γ_2 отлично от нуля.

Аналогично находятся собственные векторы, относящиеся к собственному значению $\lambda_2 = -2$. Мы находим ядро линейного оператора $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E} = \mathcal{A} + 2\mathcal{E}$. Выписываем матрицу этого оператора и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь получаются следующие однородная система линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальная система решений (которая будет базисом ядра Ker$\mathcal{A}_2$):

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0; \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = -x_4; \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произвольный собственный вектор, относящийся к собственному значению -2, может быть записан в виде $\gamma_1(0, -1, 0, 1)$ для некоторого $\gamma_1 \neq 0$.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V называется *оператором простой структуры* (или приводимым к диагональному виду), если существует базис пространства V, в котором матрица $\mathcal{A}$ диагональная.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из определений матрицы линейного оператора (сл.9 т.10) и собственного вектора.

Предложение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства V является оператором простой структуры тогда и только тогда, когда V имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Из этого утверждения в силу формулы изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса (сл.19 т.10) получается такое

Следствие

Матрица $A \in F^{n\times n}$ подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда линейный оператор, заданный матрицей A в некотором базисе линейного пространства размерности n, является линейным оператором простой структуры.

Одно достаточное условие того, что линейный оператор является оператором простой структуры, дается следующим утверждением.

Предложение

Если линейный оператор, действующий на линейном пространстве V размерности n, имеет n различных собственных значений, то этот оператор является линейным оператором простой структуры.

$\Downarrow$ В силу теоремы сл.9 собственные векторы $v_1, \ldots, v_n$, относящиеся к различным собственным значениям линейного оператора, образуют линейно независимую систему. Согласно утверждению 2 теоремы сл.6 т.6 эта система является базисом пространств V. В силу предложения сл.15 получаем требуемое. $\Uparrow$

Можно привести примеры, показывающие, что условие, указанное в предложении, не является необходимым.

Алгоритм проверки, будет ли оператор оператором простой структуры

Чтобы проверить, будет ли данный линейный оператор линейным оператором простой структуры, необходимо найти его собственные векторы и посмотреть, можно ли построить из них базис всего пространства. Учитывая предложение сл.15, достаточно проверить, что сумма размерностей подпространств, состоящих из собственных векторов, относящихся к одному собственному значению, и нулевого вектора, равна размерности всего пространства (т.е. порядку матрицы оператора).