Тема 12: Действия над линейными отображениями

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Сложение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F. Обозначим через $\mathsf{H}(U, V)$ множество всех линейных отображений из U в V.

Определение суммы линейных отображений

Суммой линейных отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathsf{H}(U, V)$ называется отображение $\mathcal{C} : U \longrightarrow V$, определенное так: $\mathcal{C}x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ для любого $x \in U$. Обозначение: $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Предложение

Сумма двух линейных отображений является линейным отображением. Сложение на множестве $\mathsf{H}(U, V)$ удовлетворяет аксиомам 2-5 линейного пространства (см. сл.2 т.4).

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathsf{H}(U, V)$. Для любых $x, y \in U$, $\alpha \in F$ имеем
$\mathcal{C}(x + y) = \mathcal{A}(x + y) + \mathcal{B}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y + \mathcal{B}x + \mathcal{B}y =$
$\mathcal{A}x + \mathcal{B}x + \mathcal{A}y + \mathcal{B}y = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$ и
$\mathcal{C}(\alpha x) = \mathcal{A}(\alpha x) + \mathcal{B}(\alpha x) = \alpha\mathcal{A}x + \alpha\mathcal{B}x = \alpha(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \alpha\mathcal{C}x$. Таким образом, $\mathcal{C}$ – линейное отображение, и сложение – алгебраическая операция на множестве $\mathsf{H}(U, V)$.

Проверим аксиому 2 для сложения на $\mathsf{H}(U,V)$. Для $\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathsf{H}(U,V)$ и любого $x\in U$ имеем $(\mathcal{A}+\mathcal{B})x=\mathcal{A}x+\mathcal{B}x=\mathcal{B}x+\mathcal{A}x=(\mathcal{B}+\mathcal{A})x$, откуда $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$. Аксиома 3 проверяется аналогично.
Нулевым элементом относительно сложения в $\mathsf{H}(U,V)$ является нулевое отображение $\mathcal{O}$, определенное так: $\mathcal{O}x=0_V$ для любого $x\in U$. Очевидно, что $\mathcal{O}\in\mathsf{H}(U,V)$ Аксиома 4 выполняется.
Противоположным элементом к отображению $\mathcal{A}\in\mathsf{H}(U,V)$ является отображение $\mathcal{B}$, определенное так: $\mathcal{B}x=-(\mathcal{A}x)$ для любого $x\in U$.
Проверьте, что $\mathcal{B}\in\mathsf{H}(U,V)$ и $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{O}$. Аксиома 5 также выполняется.$\Uparrow$

Умножение на скаляр

Определение

Произведением линейного отображения $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ на скаляр $\lambda \in F$ называется отображение $\mathcal{D} : U \longrightarrow V$, определенное так: $\mathcal{D}x = \lambda(\mathcal{A}x)$ для любого $x \in U$. Обозначение: $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$.

Предложение

Произведение линейного отображения на скаляр является линейным отображением. Множество $\mathrm{H}(U, V)$ является линейным пространством над полем F.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{D} = \lambda\mathcal{A}$, где $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$. Для любых $x, y \in U$, $\alpha \in F$ имеем $\mathcal{D}(x + y) = \lambda(\mathcal{A}(x + y)) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \lambda\mathcal{A}x + \lambda\mathcal{A}y = \mathcal{D}x + \mathcal{D}y$ и $\mathcal{D}(\alpha x) = \lambda(\mathcal{A}(\alpha x)) = \lambda(\alpha\mathcal{A}x) = \alpha(\lambda\mathcal{A}x) = \alpha(\mathcal{D}x)$, откуда $\mathcal{D} \in \mathrm{H}(U, V)$.
Проверим аксиому 7 (см. сл.2 т.4). Докажем, что $\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B}$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{H}(U, V)$ и $\lambda \in F$. Имеем
$(\lambda(\mathcal{A} + \mathcal{B}))x = \lambda((\mathcal{A} + \mathcal{B})x) = \lambda(\mathcal{A}x + \mathcal{B}x) = \lambda\mathcal{A}x + \lambda\mathcal{B}x = (\lambda\mathcal{A} + \lambda\mathcal{B})x$ для любого $x \in U$, что и требуется.
Аналогично проверяются остальные аксиомы 8-10 линейного пространства: $(\lambda + \mu)\mathcal{A} = \lambda\mathcal{A} + \mu\mathcal{A}$, $\lambda(\mu\mathcal{A}) = (\lambda\mu)\mathcal{A}$, $1\mathcal{A} = \mathcal{A}$ для любых $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ и $\lambda, \mu \in F$. $\Uparrow$

Теорема

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\dim U = n$, $\dim V = k$. Тогда линейные пространства $\mathrm{H}(U, V)$ и $F^{k\times n}$ изоморфны.

$\Downarrow$ Выберем базисы $B = (b_1, \ldots, b_n)$ в пространстве U и $C = (c_1, \ldots, c_k)$ в пространстве V. Определим отображение $\Phi : \mathrm{H}(U, V) \to F^{k\times n}$, полагая $\Phi(\mathcal{A}) = A_{B,C}$, где $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах B, C. В силу матричного определения матрицы линейного отображения (см. равенство (3) на сл.8 т.10) имеем

$$\mathcal{A}B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}). \tag{1}$$

Покажем, что Φ – изоморфизм. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathrm{H}(U, V)$ и $\Phi(\mathcal{A}_1) = \Phi(\mathcal{A}_2)$. В силу (1) имеем $\mathcal{A}_1 B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1) = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_2) = \mathcal{A}_2 B$, откуда $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, поскольку $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ одинаково действуют на базис B. Таким образом, Φ инъективно. Для доказательства сюръективности возьмем любую матрицу $M \in F^{k\times n}$. По теореме сл.7 т.10 существует $\mathcal{M} \in \mathrm{H}(U, V)$ такое что $\mathcal{M}B = C \cdot M$, т.е. $\Phi(\mathcal{M}) = M$. Мы доказали, что Φ – биекция.

Окончание доказательства теоремы

Для строк из k векторов линейного пространства V сложение и умножение на скаляр определяются поэлементно.
Покажем, что Φ – линейное отображение. Пусть $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathsf{H}(U, V)$. Имеем $C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2)B = \mathcal{A}_1 B + \mathcal{A}_2 B = C \cdot \Phi(\mathcal{A}_1) + C \cdot \Phi(\mathcal{A}_2) = C \cdot (\Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2))$, откуда следует $\Phi(\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) = \Phi(\mathcal{A}_1) + \Phi(\mathcal{A}_2)$.
Пусть $\mathcal{A} \in \mathsf{H}(U, V)$, $\lambda \in F$. Тогда $C \cdot \Phi(\lambda\mathcal{A}) = (\lambda\mathcal{A})B = \lambda(\mathcal{A}B) =$
$= \lambda(C \cdot \Phi(\mathcal{A})) = C \cdot (\lambda\Phi(\mathcal{A}))$, откуда $\Phi(\lambda\mathcal{A}) = \lambda\Phi(\mathcal{A})$.
Теорема полностью доказана. $\Uparrow$

Следствие

Пусть U, V – линейные пространства над полем F, $\dim U = n$, $\dim V = k$. Тогда $\dim_F \mathsf{H}(U, V) = kn$.

Пусть U, V, W – линейные пространства над полем F, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U,V)$, $\mathcal{B} \in \mathrm{H}(V,W)$.

Определение

Произведением линейных отображений $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ называется отображение $\mathcal{C} : U \longrightarrow W$, определенное так: $\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$ для любого $x \in U$.
Обозначение: $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}$.

Предложение

Произведение линейных отображений является линейным отображением.
Если N, K, L – базисы пространств U, V, W соответственно, $\mathcal{A} \leftrightarrow_{N,K} A$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_{K,L} B$, $\mathcal{C} \leftrightarrow_{N,L} C$, то $C = B \cdot A$.

$\Downarrow$ Для любых $x, y \in U$ имеем $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x+y)) =$
$= \mathcal{B}(\mathcal{A}x + \mathcal{A}y) = \mathcal{B}(\mathcal{A}x) + \mathcal{B}(\mathcal{A}y) = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$, откуда $\mathcal{C}(x+y) = \mathcal{C}x + \mathcal{C}y$.
Для любых $x \in U$, $\lambda \in F$ имеем $\mathcal{C}(\lambda x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\lambda x)) = \mathcal{B}(\lambda\mathcal{A}x) = \lambda\mathcal{B}(\mathcal{A}x) =$
$= \lambda\mathcal{C}x$, т.е. $\mathcal{C}(\lambda x) = \lambda\mathcal{C}x$. Таким образом, $\mathcal{C}$ – линейное отображение.
По матричному определению матрицы линейного отображения имеем $\mathcal{A}N = K \cdot A$, $\mathcal{B}K = L \cdot B$, $\mathcal{C}N = L \cdot C$. С другой стороны, $\mathcal{C}N = \mathcal{B}(\mathcal{A}N) =$
$= \mathcal{B}(K \cdot A) = (\mathcal{B}K) \cdot A = (L \cdot B) \cdot A = L \cdot (B \cdot A)$. Следовательно, $C = B \cdot A$. $\Uparrow$