

# Тема 11: Образ и ядро линейного отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Лекции по линейной алгебре для физиков

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  – линейное отображение.

## Определение

*Образом* отображения  $\mathcal{A}$  называется его область значений. Образ линейного отображения  $\mathcal{A}$  принято обозначать  $\text{Im}\mathcal{A}$  или  $\mathcal{A}U$ .

По определению имеет место равенство  $\text{Im}\mathcal{A} = \{y \in V \mid \exists x \in U : \mathcal{A}x = y\}$ .

## Предложение

Пусть  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  – произвольный базис пространства  $U$ ,  $A : U \rightarrow V$  – линейное отображение. Тогда образ  $A$  есть подпространство пространства  $V$  и  $\text{Im}A = \langle AB \rangle = \langle Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \rangle$ .

↓ Так как  $A0_U = 0_V$ , имеем  $0_V \in \text{Im}A$ . Пусть  $y_1, y_2 \in \text{Im}A$ . По определению  $y_j = Ax_j$  ( $j = 1, 2$ ) для некоторых  $x_1, x_2 \in U$ . Согласно определению линейного отображения имеем  $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$ , т.е. множество  $\text{Im}A$  замкнуто относительно сложения.

Для любого  $\lambda \in F$  по определению линейного отображения имеем  $A(\lambda x_1) = \lambda(Ax_1) = \lambda y_1$ , т.е. множество  $\text{Im}A$  замкнуто относительно умножения на скаляр. Согласно предложению сл.3 т.7 множество  $\text{Im}A$  является подпространством.

Так как по определению  $Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \in \text{Im}A$  и  $\text{Im}A$  является подпространством, в силу леммы сл.2 т.7 имеем  $\langle Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \rangle \subseteq \text{Im}A$ . Для доказательства обратного включения возьмем вектор  $y \in \text{Im}A$ . По определению  $y = Ax$  для некоторого  $x \in U$ . Разложим  $x$  по базису  $B$ :  $x = B \cdot [x]_B$ . Тогда  $y = Ax = A(B \cdot [x]_B) = (AB) \cdot [x]_B$ , откуда следует, что  $y \in \langle AB \rangle$ . Таким образом,  $\text{Im}A \subseteq \langle Ab_1, Ab_2, \dots, Ab_n \rangle$ , и утверждение доказано. ↑

## Определение

**Рангом** линейного отображения  $\mathcal{A}$  называется размерность его образа:  
 $r(\mathcal{A}) = \dim(\text{Im}\mathcal{A})$ .

Из предложения сл.2 и предложения сл.12 т.6 вытекает

## Предложение

Пусть  $U, V$  – ненулевые конечномерные пространства над полем  $F$  и  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  – линейное отображение. Тогда для любых базисов  $B$  пространства  $U$  и  $C$  пространства  $V$  имеет место равенство  $r(\mathcal{A}) = r(A_{B,C})$ , где  $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A_{B,C}$ .

Таким образом, ранг линейного отображения равен рангу его матрицы независимо от выбора базисов. То, что ранг матрицы линейного отображения не зависит от выбора базисов, следует и из формулы сл.18 т.10 в силу свойства 5 из теоремы сл.13 т.8.

## Ядро линейного отображения

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  – линейное отображение.

### Определение ядра линейного отображения

*Ядром* отображения  $\mathcal{A}$  называется полный прообраз нулевого подпространства  $\{0_V\}$  при отображении  $\mathcal{A}$ . Обозначение:  $\text{Ker}\mathcal{A}$ .

Таким образом,  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{x \in U \mid \mathcal{A}x = 0_V\}$ .

### Предложение

Ядро любого линейного отображения линейного пространства  $U$  в линейное пространство  $V$  является подпространством в  $U$ .

↓ Пусть  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  – линейное отображение. Воспользуемся предложением сл.3 т.7. Очевидно, что  $0_U \in \text{Ker}\mathcal{A}$ . Для любых  $x, y \in \text{Ker}\mathcal{A}$  имеем  $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y = 0_V + 0_V = 0_V$ , поэтому  $x + y \in \text{Ker}\mathcal{A}$ . Для любых  $x \in \text{Ker}\mathcal{A}$  и  $\lambda \in F$  справедливо  $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}x) = \lambda 0_V = 0_V$ , значит,  $\lambda x \in \text{Ker}\mathcal{A}$ . ↑

### Определение дефекта линейного отображения

*Дефектом* линейного отображения  $\mathcal{A}$  называется размерность его ядра. Обозначение:  $d(\mathcal{A})$ . Таким образом,  $d(\mathcal{A}) = \dim(\text{Ker}\mathcal{A})$ .

## Предложение

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  – линейное отображение, и  $W$  – подпространство  $U$  такое, что  $W \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ ,  $b_1, \dots, b_k \in W$ . Если система  $(b_1, \dots, b_k)$  линейно независима, то и система  $(\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_k)$  линейно независима.

↓ Пусть система  $(b_1, \dots, b_k)$  линейно независима. Убедимся, что и система  $(\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_k)$  линейно независима. Предположим, что  $\lambda_1(\mathcal{A}b_1) + \dots + \lambda_k(\mathcal{A}b_k) = 0_V$ . Тогда  $\mathcal{A}(\lambda_1b_1 + \dots + \lambda_kb_k) = 0_V$ , откуда  $\lambda_1b_1 + \dots + \lambda_kb_k \in W \cap \text{Ker}\mathcal{A}$ . По условию  $\lambda_1b_1 + \dots + \lambda_kb_k = 0_U$ . Следовательно,  $\lambda_i = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ , и система  $(\mathcal{A}b_1, \dots, \mathcal{A}b_k)$  линейно независима. ↑

## Теорема

Пусть  $U, V$  – конечномерные линейные пространства над полем  $F$ ,  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  – линейное отображение. Тогда  $r(\mathcal{A}) + d(\mathcal{A}) = \dim U$ .

↓ Если  $\text{Ker } \mathcal{A} \neq \{0_U\}$ , то выберем в  $\text{Ker } \mathcal{A}$  базис  $(e_1, \dots, e_m)$  и дополним его до базиса пространства  $U$  системой векторов  $(f_1, \dots, f_k)$ . Если  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$ , то выберем в  $U$  базис  $(f_1, \dots, f_k)$ . Положим  $g_j = \mathcal{A}f_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ) и покажем, что  $(g_1, \dots, g_k)$  – базис в подпространстве  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Из предложения сл.3 следует, что система  $(g_1, \dots, g_k)$  порождает  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Так как по построению  $\langle f_1, \dots, f_k \rangle \cap \text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$  и система  $(f_1, \dots, f_k)$  линейно независима, система  $(g_1, \dots, g_k)$  также линейно независима в силу предложения сл.6. Мы убедились, что  $(g_1, \dots, g_k)$  – базис  $\text{Im } \mathcal{A}$ . Значит,  $\dim U = m + k = \dim(\text{Ker } \mathcal{A}) + \dim(\text{Im } \mathcal{A}) = d(\mathcal{A}) + r(\mathcal{A})$ , что и требуется доказать. ↑

## Алгоритм 1 нахождения базисов образа и ядра

Приведем алгоритм нахождения базисов образа и ядра линейного отображения. Пусть  $U, V$  – линейные пространства над полем  $F$ ,  $B = (b_1, \dots, b_n)$  и  $C = (c_1, \dots, c_k)$  – базисы  $U$  и  $V$ ,  $A : U \rightarrow V$  – линейное отображение,  $A \leftrightarrow_{B,C} A$ . Алгоритм выдает координаты векторов базиса  $\text{Ker} A$  в базисе  $B$  и координаты векторов базиса  $\text{Im} A$  в базисе  $C$ .

### Алгоритм 1

Приведем матрицу  $A$  с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду  $A_1$  (нулевые строки можно отбросить). Из столбцов полученной матрицы выделим максимальную линейно независимую подсистему. Соответствующие столбцам этой системы столбцы матрицы  $A$  дадут координаты базисных векторов образа  $\text{Im} A$  в базисе  $C$ . Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений  $A_1 x = 0$  дает координаты базисных векторов ядра  $\text{Ker} A$  в базисе  $B$ .

Так как столбцы матрицы  $A$  есть координатные столбцы порождающей системы подпространства  $\text{Im} A$  в базисе  $C$ , обоснование первой части алгоритма получается из утверждения сл.7 т.7. Вторая часть работает правильно, так как  $u \in \text{Ker} A \Leftrightarrow [Au] = 0 \Leftrightarrow A[u] = 0$ . Однородная система линейных уравнений  $Ax = 0$  равносильна системе  $A_1 x = 0$ , поэтому ее фундаментальная система решений и дает координаты базисных векторов ядра  $\text{Ker} A$  в базисе  $B$ .



# Пример применения алгоритма 1

Найти базисы образа и ядра линейного отображения, имеющего в

некоторых базисах матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

Чтобы найти базис образа, проведем элементарные преобразования строк матрицы  $A$  (отбрасываем нулевые строки, если они получаются):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Видим, что первый и второй столбцы матрицы  $A$  дают координаты векторов базиса образа. Чтобы найти базис ядра, рассмотрим однородную систему линейных уравнений с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Запишем эту систему: } \begin{cases} \xi_1 - \xi_3 - 2\xi_4 = 0, \\ \xi_2 + 2\xi_3 + 3\xi_4 = 0. \end{cases} \quad Ee$$

общее решение  $\begin{cases} \xi_1 = \xi_3 + 2\xi_4, \\ \xi_2 = -2\xi_3 - 3\xi_4. \end{cases}$  Фундаментальная система решений:

$\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{matrix}$  Базис в ядре образуют векторы с координатами  $(1, -2, 1, 0)$  и  $(2, -3, 0, 1)$ .

### ЯО алгоритм

Построим матрицу  $(E_n|A^T)$  размеров  $n \times (n + k)$  и с помощью элементарных преобразований строк приведем эту матрицу к виду  $(M|A_1)$ , где  $A_1$  – ступенчатая по строкам матрица, полученная на месте матрицы  $A^T$ . Тогда ненулевые строки матрицы  $A_1$  дают координаты базисных векторов образа  $\text{Im}A$  в базисе  $C$ , а строки матрицы  $M$ , имеющие нулевые продолжения в матрице  $A_1$ , дают координаты базисных векторов ядра  $\text{Ker}A$  в базисе  $B$ .

Ненулевые строки матрицы  $A_1$  дают координаты базисных векторов образа  $\text{Im } \mathcal{A}$  в базисе  $C$  согласно утверждению о втором способе нахождения базиса подпространства (сл.7 т.7). Их количество равно  $r(\mathcal{A})$ .

Матрица  $(E_n | A^T)$  имеет в качестве строк строки координат  $([b_j]_B^T | [Ab_j]_C^T)$ . При выполнении элементарных преобразований над строками этой матрицы получаем строки вида

$(\sum_{j=1}^n \lambda_j [b_j]_B^T | \sum_{j=1}^n \lambda_j [Ab_j]_C^T)$ . Так как

$\sum_{j=1}^n \lambda_j [Ab_j]_C^T = \sum_{j=1}^n [\lambda_j (Ab_j)]_C^T = \sum_{j=1}^n [\mathcal{A}(\lambda_j b_j)]_C^T = [\mathcal{A}(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j)]_C^T$  и  $\sum_{j=1}^n \lambda_j [b_j]_B^T = [\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j]_B^T$ , получаем строку вида  $([u]_B^T | [Au]_B^T)$ .

Поэтому строки матрицы  $M$ , имеющие нулевые продолжения, являются строками координат векторов из  $\text{Ker } \mathcal{A}$  в базисе  $B$ . Эти строки линейно независимы, так как получены с помощью элементарных преобразований из единичной матрицы. Их количество равно  $n - r(\mathcal{A}) = d(\mathcal{A})$ . Согласно утверждению 2 теоремы сл.6 т.6 они дают координаты базисных векторов ядра  $\text{Ker } \mathcal{A}$  в базисе  $B$ .

Найти базисы образа и ядра линейного отображения, имеющего в

некотором базисе матрицу  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right) \sim$$

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Таким образом, строки  $(1, 2, 3)$ ,  $(0, 1, 2)$  дают координаты векторов базиса образа, а строки  $(1, -2, 1, 0)$  и  $(2, -3, 0, 1)$  – координаты векторов базиса ядра.

# Инъективность и сюръективность линейного отображения

По определению сюръективности линейное отображение  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  является сюръективным тогда и только тогда, когда  $\text{Im}\mathcal{A} = V$ .

## Предложение

Линейное отображение  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  является инъективным тогда и только тогда, когда  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ .

↓ Если отображение  $\mathcal{A}$  инъективно, то по определению  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ . Пусть  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ . Если  $\mathcal{A}x = \mathcal{A}y$  для некоторых  $x, y \in U$ , то  $\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = 0_V$ , и  $\mathcal{A}(x - y) = 0_V$ , т.е.  $x - y \in \text{Ker}\mathcal{A}$ . Значит,  $x - y = 0_U$  и  $x = y$ . Следовательно, отображение  $\mathcal{A}$  инъективно. ↑

## Лемма

Линейное отображение  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  инъективно тогда и только тогда, когда для любой линейно независимой системы  $(u_1, \dots, u_k)$  векторов из  $U$  система  $(\mathcal{A}u_1, \dots, \mathcal{A}u_k)$  векторов из  $V$  также линейно независима.

↓ Если  $\mathcal{A}$  инъективно, то  $U \cap \text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ , и требуемое следует из предложения сл.б. Обратно, если  $b \in U$  и  $b \neq 0_U$ , то система из одного вектора  $b$  линейно независима и следовательно система  $\mathcal{A}b$  линейно независима, т.е.  $\mathcal{A}b \neq 0_V$ . Поэтому  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$ . ↑

Определение изоморфизма см. на сл.11 т.б. Пусть  $U, V$  – линейные пространства над одним и тем же полем  $F$ . Из предложения сл.13 получаем

## Предложение

Линейное отображение  $A : U \rightarrow V$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $\text{Ker}A = \{0_U\}$  и  $\text{Im}A = V$ .

## Определение

Говорят, что линейное пространство  $U$  *изоморфно* пространству  $V$ , если существует изоморфизм  $U$  на  $V$ .

Критерий изоморфности конечномерных пространств дает следующая

## Теорема

Конечномерное пространство  $U$  изоморфно пространству  $V$  тогда и только тогда, когда  $\dim U = \dim V$ .

↓ Пусть  $U, V$  изоморфны и  $\mathcal{A}$  изоморфизм  $U$  на  $V$ . Если  $U = \{0_U\}$ , то и  $V = \{0_V\}$ , так как  $\mathcal{A}$  – биекция. Пусть  $U \neq \{0_U\}$  и  $B = (b_1, \dots, b_n)$  – базис  $U$ . Поскольку  $\text{Im } \mathcal{A} = V$ , в силу предложения сл.3 имеем  $V = \langle \mathcal{A}B \rangle$ . По лемме сл.13 система  $\mathcal{A}B$  линейно независима. Значит, эта система является базисом  $V$  и  $\dim U = \dim V$ .

Пусть  $\dim U = \dim V$ . Если  $\dim U = 0$ , то  $U = \{0_U\}$  и  $V = \{0_V\}$ , и  $0_U \mapsto 0_V$  – изоморфизм  $U$  на  $V$ . Пусть  $\dim U = n > 0$ . Выберем базисы  $(b_1, \dots, b_n)$  в  $U$  и  $(c_1, \dots, c_n)$  в  $V$ . Согласно теореме сл.7 т.10 существует единственное линейное отображение  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$  такое что  $\mathcal{A}b_j = c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Ясно, что  $\text{Im } \mathcal{A} = V$ . Убедимся, что  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$ . Пусть  $x = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \in \text{Ker } \mathcal{A}$ . Тогда  $\mathcal{A}x = 0_V$ , т.е.  $\lambda_1 \mathcal{A}b_1 + \dots + \lambda_n \mathcal{A}b_n = 0_V$  и  $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n = 0_V$ . Так как  $(c_1, \dots, c_n)$  – базис в  $V$ , заключаем, что  $\lambda_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ ). Следовательно,  $x = 0_U$  и  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$ . В силу предложения сл.14 отображение  $\mathcal{A}$  является изоморфизмом. ↑

## Теорема

Пусть  $U, V$  – линейные пространства над одним и тем же полем  $F$  и  $\dim U = \dim V$ . Следующие условия эквивалентны для линейного отображения  $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ :

- (1)  $\mathcal{A}$  является изоморфизмом;
- (2)  $\text{Im } \mathcal{A} = V$  ( $r(\mathcal{A}) = \dim V$ );
- (3)  $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0_U\}$  ( $d(\mathcal{A}) = 0$ );
- (4) Матрица  $A$  отображения  $\mathcal{A}$  относительно любой пары базисов является невырожденной;
- (5) Матрица отображения  $\mathcal{A}$  относительно некоторой пары базисов является невырожденной.

↓ Утверждения (2) и (3) эквивалентны в силу теоремы сл.б. Утверждение (1) эквивалентно одновременному выполнению условий (2) и (3) согласно предложению сл.14.

По утверждению (2) отображение  $\mathcal{A}$  является изоморфизмом тогда и только тогда, когда  $\text{Im } \mathcal{A} = V$ . Последнее условие в силу предложения сл.4 равносильно тому, что  $r(A) = \dim V$ , т.е. что ранг матрицы  $A$  совпадает с ее порядком. Это возможно тогда и только тогда, когда  $A$  является невырожденной. Поэтому из (1) следует (4) и из (5) – (1). Утверждение (5) непосредственно следует из (4). ↑



Из теоремы предыдущего слайда сразу получается

## Следствие

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора  $\mathcal{A}$  на линейном пространстве  $U$ :

- (1)  $\mathcal{A}$  является изоморфизмом линейного пространства  $U$  на себя;
- (2)  $\text{Im}\mathcal{A} = U$  ( $r(\mathcal{A}) = \dim U$ );
- (3)  $\text{Ker}\mathcal{A} = \{0_U\}$  ( $d(\mathcal{A}) = 0$ ).
- (4) Матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  относительно любого базиса является невырожденной;
- (5) Матрица  $A$  оператора  $\mathcal{A}$  относительно некоторого базиса является невырожденной.

## Определение

Линейное отображение  $\mathcal{A}$  линейного пространства  $U$  на линейное пространство  $V$  называется **обратимым**, если существует обратное отображение  $\mathcal{A}^{-1}$  (т.е. если  $\mathcal{A}$  является изоморфизмом  $U$  на  $V$ ).

## Наблюдение

Обратное отображение  $\mathcal{A}^{-1}$  к линейному отображению  $\mathcal{A}$  само является линейным отображением.

В самом деле, если  $x, y \in V$ , то  $\mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x + \mathcal{A}^{-1}y) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}x) + \mathcal{A}(\mathcal{A}^{-1}y) = x + y$ , откуда  $\mathcal{A}^{-1}(x + y) = \mathcal{A}^{-1}x + \mathcal{A}^{-1}y$ . Аналогично доказывается, что  $\mathcal{A}^{-1}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}^{-1}x)$ .

Из теоремы слайда 16 вытекает

## Предложение

Следующие условия для линейного отображения  $\mathcal{A}$  конечномерного линейного пространства  $U$  на линейное пространство  $V$  эквивалентны:

- (1) отображение  $\mathcal{A}$  обратимо;
- (2) матрица отображения  $\mathcal{A}$  в некотором базисе невырожденная;
- (3) матрица отображения  $\mathcal{A}$  в любом базисе невырожденная.