

Тема 10: Линейные отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Пусть U, V – линейные пространства над полем F .

Определение линейного отображения

Отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ называется *линейным*, если выполняются следующие условия:

- 1 $\mathcal{A}(x + y) = \mathcal{A}(x) + \mathcal{A}(y)$ для любых $x, y \in U$;
- 2 $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda(\mathcal{A}(x))$ для любых $x \in U, \lambda \in F$.

Условие 1 называется *аддитивностью*, условие 2 – *однородностью* отображения \mathcal{A} .

Определение линейного оператора

Линейное отображение $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ линейного пространства V в само себя называется *линейным оператором* на пространстве V .

Для простоты будем писать Ax вместо $\mathcal{A}(x)$, если это не вызовет двусмысленности.

Оператор поворота на плоскости

Пусть π – плоскость, φ – угол. Положим $\mathcal{R}_\varphi \vec{x} = \vec{y}$, где вектор \vec{y} получается из вектора $\vec{x} \in V_\pi$ поворотом на угол φ против часовой стрелки, если $\vec{x} \neq \vec{0}$, и $\vec{y} = \vec{0}$ при $\vec{x} = \vec{0}$. Тогда $\mathcal{R}_\varphi : V_\pi \rightarrow V_\pi$ – линейный оператор.

Отображение проектирования на плоскость параллельно вектору

Пусть π – плоскость, $\vec{b} \in V_g$ – вектор и $\vec{b} \not\parallel \pi$. Положим $\mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} \vec{x} = \vec{y}$, где вектор \vec{y} – компонента вектора \vec{x} на плоскость π параллельно вектору \vec{b} . Тогда $\mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} : V_g \rightarrow V_\pi$ – линейное отображение.

Вектор \vec{y} можно определить как вектор $\vec{x} - \tau \vec{b}$ ($\tau \in \mathbb{R}$), компланарный плоскости π .

Оператор симметрии относительно плоскости

Пусть π – плоскость. $\mathcal{S}_\pi \vec{x} = \vec{y}$, где вектор \vec{y} – симметричный к \vec{x} относительно плоскости π . Тогда $\mathcal{S}_\pi : V_g \rightarrow V_g$ – линейный оператор.

Проверка линейности указанных отображений производится с использованием элементарных геометрических утверждений.

Основной пример

Пусть F – поле, $k, n \in \mathbb{N}$, $U = F^n$, $V = F^k$, $A \in F^{k \times n}$. Положим $Ax = A \cdot x$ для любого столбца $x \in U$. Тогда $A : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

Умножение на матрицы

Пусть F – поле, $k, n, \ell, p \in \mathbb{N}$, $U = F^{k \times n}$, $V = F^{\ell \times p}$, $A \in F^{\ell \times k}$, $B \in F^{n \times p}$. Положим $M_{A,B}X = A \cdot X \cdot B$ для любой матрицы $X \in U$. Тогда $M_{A,B} : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

Линейность этих отображений следует из свойств операций над матрицами (сл.15 темы 2).

Первый из примеров этого слайда описывает в некотором смысле любое линейное отображение конечномерных линейных пространств (см. сл.17 ниже).

Изоморфизм

Любой изоморфизм одного линейного пространства на другое (определение см. на сл.11 т.6) является линейным отображением.

Оператор дифференцирования

Пусть F – поле. Положим $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$.

Получаем линейные операторы $\mathcal{D} : F[x] \rightarrow F[x]$ и

$\mathcal{D} : VP_n(F) \rightarrow VP_n(F)$ для любого натурального числа n (определение линейного пространства $VP_n(F)$ см. на сл.5 т.4).

Отображение дифференцирования

Полагая $\mathcal{D}f = f'$ для любого многочлена $f \in F[x]$, для любого натурального числа n получаем линейное отображение

$\mathcal{D} : VP_n(F) \rightarrow VP_{n-1}(F)$.

Линейность дифференцирования следует из свойств производной.

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение.

Предложение

- 1 $\mathcal{A}0_U = 0_V$;
- 2 $\mathcal{A}(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m) = \lambda_1 \mathcal{A}u_1 + \dots + \lambda_m \mathcal{A}u_m$ для любых векторов $u_1, \dots, u_m \in U$ и любых скаляров $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$.

Имеем $\mathcal{A}0_U = \mathcal{A}(0 \cdot 0_U) = 0\mathcal{A}(0_U) = 0_V$. Второе утверждение следует из определения линейного отображения.

Пусть $C = (c_1, \dots, c_m)$ – система векторов из U . Обозначим через $\mathcal{A}C$ систему $(\mathcal{A}c_1, \dots, \mathcal{A}c_m)$ из образов этих векторов при отображении \mathcal{A} . Пусть $\Gamma \in F^{m \times p}$ – матрица из скаляров. Тогда из утверждения 2 предложения с учетом матричной записи линейных комбинаций (см. сл.9 т.4) получаем

$$\mathcal{A}(C \cdot \Gamma) = (\mathcal{A}C) \cdot \Gamma. \quad (1)$$

Теорема

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис пространства U . Тогда для любой системы векторов (v_1, \dots, v_n) пространства V существует единственное линейное отображение $A : U \rightarrow V$ такое что $Ab_j = v_j$ для $j = 1, \dots, n$.

↓ Возьмем вектор $x \in U$ и разложим его по базису B :

$x = \xi_1 b_1 + \dots + \xi_n b_n$. Положим $Ax = \xi_1 v_1 + \dots + \xi_n v_n$. В силу единственности разложения вектора по базису получаем отображение линейного пространства U на подпространство $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Имеем $Ax = (v_1, \dots, v_n)[x]_B = (AB) \cdot [x]_B$. В силу свойств координат (сл.10 т.6) отображение A является линейным. Очевидно, что $Ab_j = v_j$ для $j = 1, \dots, n$.

Докажем единственность. Пусть $A' : U \rightarrow V$ – произвольное линейное отображение такое что $A'b_j = v_j$ для $j = 1, \dots, n$. Тогда $A'B = AB$. Для любого $x \in U$ в силу равенства (1) сл.5 имеем $A'x = A'(B \cdot [x]_B) = (A'B) \cdot [x]_B = (AB) \cdot [x]_B = Ax$ и потому $A' = A$. ↑

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис пространства U , $C = (c_1, \dots, c_k)$ – базис пространства V . Пусть $A : U \rightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V . Разложим вектор Ab_j по базису C :

$$Ab_j = \alpha_{1j}c_1 + \alpha_{2j}c_2 + \dots + \alpha_{kj}c_k, \quad j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Определение

Матрицей линейного отображения A в базисах B, C называется матрица $(\alpha_{ij})_{k \times n}$, составленная из столбцов координат векторов Ab_j ($j = 1, \dots, n$) в базисе C .

Обозначается матрица линейного отображения в базисах через $A_{B,C}$.

Будем использовать также обозначение $A \longleftrightarrow_{B,C} A$.

Равенства (2) можно записать в матричном виде:

$$AB = C \cdot A_{B,C}. \quad (3)$$

Отметим, что матрица линейного отображения в базисах является матрицей размеров $k \times n$, где $n = \dim U$, $k = \dim V$.

Пусть V – линейное пространство над полем F , $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис пространства V и пусть $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ – линейный оператор пространства V . В случае линейного оператора матрица определяется с помощью одного базиса:

$$Ab_j = \alpha_{1j}b_1 + \alpha_{2j}b_2 + \dots + \alpha_{nj}b_n, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Определение

Матрицей линейного оператора \mathcal{A} в базисе B называется матрица $(\alpha_{ij})_{n \times n}$, составленная из столбцов координат векторов Ab_j ($j = 1, \dots, n$) в базисе B .

Обозначается матрица линейного оператора в базисе через A_B . Будем использовать также обозначение $\mathcal{A} \longleftrightarrow_B A$.

Равенства (4) можно записать в матричном виде:

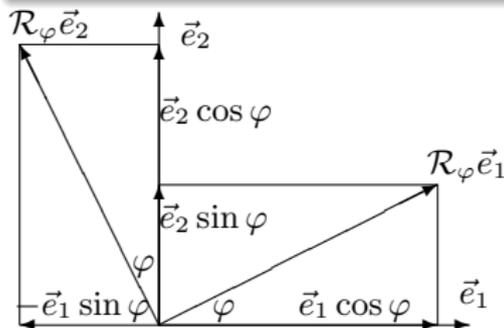
$$AB = B \cdot A_B. \quad (5)$$

Отметим, что матрица линейного оператора в базисе является квадратной матрицей порядка $n = \dim V$.

Оператор поворота определен на сл.3.

Матрица оператора поворота

Выберем на плоскости ортонормированный базис (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Тогда матрица оператора поворота \mathcal{R}_φ в этом базисе имеет вид $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$



Длина векторов $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_1$ и $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_2$ равна 1. Разлагая их по базису (\vec{e}_1, \vec{e}_2) , получаем $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi$, $\mathcal{R}_\varphi \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi$.

Примеры. Матрица отображения проектирования на плоскость параллельно вектору

Определение см. на сл.3. Пусть π – плоскость. Рассматривая отображение проектирования на пространство V_π параллельно вектору \vec{b} , выберем в пространстве V_g базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, а в пространстве V_π векторов на плоскости π – базис (\vec{a}_1, \vec{a}_2) . Тогда, очевидно, $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b})$ – базис пространства V_g . Имеем

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \alpha_{11}\vec{a}_1 + \alpha_{21}\vec{a}_2 + \alpha_{31}\vec{b}, \\ \vec{e}_2 &= \alpha_{12}\vec{a}_1 + \alpha_{22}\vec{a}_2 + \alpha_{32}\vec{b}, \\ \vec{e}_3 &= \alpha_{13}\vec{a}_1 + \alpha_{23}\vec{a}_2 + \alpha_{33}\vec{b}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} \vec{e}_1 &= \alpha_{11}\vec{a}_1 + \alpha_{21}\vec{a}_2, \\ \mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} \vec{e}_2 &= \alpha_{12}\vec{a}_1 + \alpha_{22}\vec{a}_2, \\ \mathcal{P}_{\pi \parallel \vec{b}} \vec{e}_3 &= \alpha_{13}\vec{a}_1 + \alpha_{23}\vec{a}_2.\end{aligned}$$

Матрица отображения проектирования на плоскость параллельно вектору

$$P_{\pi \parallel \vec{b}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$$

Определение см. на сл.3. Пусть π – плоскость. Выберем в пространстве V_g базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ так, что \vec{e}_1, \vec{e}_2 компланарны плоскости π (т.е. $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_\pi$) и $\vec{e}_3 \perp \pi$. Тогда

$$S_\pi \vec{e}_1 = \vec{e}_1,$$

$$S_\pi \vec{e}_2 = \vec{e}_2,$$

$$S_\pi \vec{e}_3 = -\vec{e}_3.$$

$$S_\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Определение см. на сл.4. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$. Выберем в пространствах F_n и F_k стандартные базисы (состоящие из столбцов единичных матриц E_n и E_k соответственно, взятых по порядку). Обозначим столбцы матрицы E_n через (e_1, e_2, \dots, e_n) , а столбцы матрицы E_k – через (f_1, f_2, \dots, f_k) . Тогда, так как $Ae_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{kj})^\top$, получаем

$$Ae_j = \alpha_{1j}f_1 + \alpha_{2j}f_2 + \dots + \alpha_{kj}f_k.$$

Следовательно, матрица оператора \mathcal{A} имеет вид $(\alpha_{ij})_{k \times n}$, т.е. совпадает с исходной матрицей A . Это обозначение согласуется с нашей договоренностью о соответствии обозначений отображения и его матрицы.

Определение см. на сл.4. Пусть $A = (\alpha_{ij})_{\ell \times k}$, $B = (\beta_{ij})_{n \times p}$. Выберем в пространствах $F^{k \times n}$ и $F^{\ell \times p}$ базисы, состоящие из матричных единиц $e_{i,j;k \times n}$ и $e_{i,j;\ell \times p}$, расположенных в порядке $e_{11;k \times n}, e_{12;k \times n}, \dots, e_{1n;k \times n}, e_{21;k \times n}, e_{22;k \times n}, \dots, e_{2n;k \times n}, \dots, e_{k1;k \times n}, e_{k2;k \times n}, \dots, e_{kn;k \times n}$ и во втором базисе в таком же порядке (по строкам). По определению произведения

матриц $e_{i,j;k \times n} \cdot e_{s,t;n \times p} = \begin{cases} e_{i,t;k \times p}, j = s; \\ O_{k \times p}, j \neq s. \end{cases}$ Так как

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{A,B} e_{i,j;k \times n} &= A \cdot e_{i,j;k \times n} \cdot B = \\ &= \left(\sum_{s=1}^{\ell} \sum_{q=1}^k \alpha_{sq} e_{s,q;\ell \times k} \right) \cdot e_{i,j;k \times n} \cdot \left(\sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^p \beta_{rt} e_{r,t;n \times p} \right) = \\ &= \left(\sum_{s=1}^{\ell} \sum_{q=1}^k \alpha_{sq} e_{s,q;\ell \times k} \cdot e_{i,j;k \times n} \right) \cdot \left(\sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^p \beta_{rt} e_{r,t;n \times p} \right) = \\ &= \left(\sum_{s=1}^{\ell} \alpha_{si} e_{s,j;\ell \times n} \right) \cdot \left(\sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^p \beta_{rt} e_{r,t;n \times p} \right) = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{t=1}^p \alpha_{si} \beta_{jt} e_{s,t;\ell \times p}, \text{ получаем} \end{aligned}$$

$$\mathcal{M}_{A,B} e_{i,j;k \times n} = \sum_{s=1}^{\ell} \sum_{t=1}^p \alpha_{si} \beta_{jt} e_{s,t;\ell \times p}.$$

Следовательно, матрица отображения $M_{A,B}$ в рассматриваемых базисах имеет вид

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \dots & \alpha_{11}\beta_{n1} & \alpha_{12}\beta_{11} & \dots & \alpha_{12}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{n1} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{11}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{11}\beta_{np} & \alpha_{12}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{12}\beta_{np} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{1k}\beta_{np} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{\ell 1}\beta_{11} & \dots & \alpha_{\ell 1}\beta_{n1} & \alpha_{\ell 2}\beta_{11} & \dots & \alpha_{\ell 2}\beta_{n1} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{11} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{n1} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{\ell 1}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{\ell 1}\beta_{np} & \alpha_{\ell 2}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{\ell 2}\beta_{np} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{1p} & \dots & \alpha_{\ell k}\beta_{np} \end{pmatrix}.$$

Возьмем в пространстве $VP_n(F)$ базис $B = (1, x, x^2, \dots, x^n)$. Так как $(x^k)' = kx^{k-1}$, получаем равенство

Матрица оператора дифференцирования D на пространстве $VP_n(F)$

$$D_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как линейное пространство $F[x]$ не является конечномерным, для оператора дифференцирования на этом пространстве матрица не определена.

Возьмем в пространстве $VP_n(F)$ базис $B = (1, x, x^2, \dots, x^n)$, а в пространстве $VP_{n-1}(F)$ – базис $C = (1, x, x^2, \dots, x^{n-1})$

Матрица отображения дифференцирования $\mathcal{D}_1 : VP_n(F) \rightarrow VP_{n-1}(F)$

$$D_{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}.$$

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис пространства U , $C = (c_1, \dots, c_k)$ – базис пространства V . Пусть $A : U \rightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V и $A \leftrightarrow_{B,C} A_{B,C}$, т.е. $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения A в базисах B, C . Найдем координаты образа вектора Ax в базисе C , считая известными координаты вектора x в базисе B . Так как $x = B[x]_B$ (см. формулу (2) сл.9 т.6), в силу формулы (1) сл.5 имеем $Ax = A(B \cdot [x]_B) = (AB) \cdot [x]_B = (C \cdot A_{B,C}) \cdot [x]_B = C \cdot (A_{B,C} \cdot [x]_B)$, поэтому $Ax = C \cdot (A_{B,C} \cdot [x]_B)$. В силу единственности координат имеем

Формула для координат образа вектора

$$[Ax]_C = A_{B,C} \cdot [x]_B.$$

Полученная формула совпадает с формулой из определения отображения в основном примере на сл.4. Это объясняет название "основной пример".

Пусть U, V – линейные пространства над полем F , $A : U \rightarrow V$ – линейное отображение пространства U в V . Пусть $B = (b_1, \dots, b_n)$ – базис пространства U , $C = (c_1, \dots, c_k)$ – базис пространства V и $A_{B,C}$ – матрица линейного отображения A в базисах B, C . Предположим, что в пространствах U и V заданы другие базисы $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ и $C' = (c'_1, \dots, c'_k)$. Как связаны между собой матрицы $A_{B,C}$ и $A_{B',C'}$? Будем считать известными матрицы перехода T от базиса B к базису B' и S от базиса C к базису C' . Таким образом, $B' = B \cdot T$ и $C' = C \cdot S$. Из равенства $AB' = C' \cdot A_{B',C'}$ получаем $AB' = A(B \cdot T) = (AB) \cdot T = (C \cdot A_{B,C}) \cdot T = C \cdot (A_{B,C} \cdot T)$. С другой стороны, $AB' = C' \cdot A_{B',C'} = (C \cdot S) \cdot A_{B',C'} = C \cdot (S \cdot A_{B',C'})$. Таким образом, $C \cdot (A_{B,C} \cdot T) = C \cdot (S \cdot A_{B',C'})$. В силу единственности разложения вектора по базису имеем $A_{B,C} \cdot T = S \cdot A_{B',C'}$. Так как матрица перехода S является обратимой, из последнего равенства получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы линейного отображения при изменении базисов

$$A_{B',C'} = S^{-1} \cdot A_{B,C} \cdot T.$$

Применяя формулу сл.18 к случаю линейного оператора $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ линейного V пространства над полем F , получаем следующую формулу.

Формула изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса

$$A_{B'} = T^{-1} \cdot A_B \cdot T.$$

В этой формуле B и B' – базисы пространства V , T – матрица перехода T от базиса B к базису B' .

Определение

Пусть F – поле и A, A' – матрицы из $F^{n \times n}$. Говорят, что матрица A' *подобна* матрице A , если существует обратимая матрица $T \in F^{n \times n}$ такая что $A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$. Обозначение: $A' \propto A$.

Таким образом, матрица линейного оператора в одном базисе подобна матрице того же линейного оператора в другом базисе.