Тема 1: Введение. Системы линейных уравнений

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

О курсе линейной алгебры

Курс линейной алгебры на физическом факультете изучается в течение 3-го семестра. Он включает теорию матриц и определителей произвольного порядка, конечномерных линейных пространств и их линейных отображений, евклидовых пространств и квадратичных форм.

Для изучения курса можно использовать любые учебники для университетов, в названии которых есть слова "линейная алгебра". Список литературы приведен на следующем слайде.

Рекомендуемая литература

1. Ильин В.А, Позняк В.Г. Линейная алгебра. Любое издание.
2. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. Любое издание.
3. Кострикин А.И. Линейная алгебра. Любое издание.
4. Овсянников А.Я. Линейная алгебра. Изд-во Гуманитарного ун-та, Екатеринбург, 2004.
5. Задачник по алгебре и геометрии для студентов первого курса. Изд-во УрГУ, Екатеринбург, 2004; 2010 (2-е изд).

Книги [1-3] — университетские учебники, при этом [1] — учебник для студентов-физиков, а [2] и [3] — учебники повышенного уровня (для МГУ). Задачник [5] используется на практических занятиях. Книги [4-5] доступны в виде pdf файлов в закладке "Книги"страницы А.Я.Овсянникова на сайте кафедры алгебры и фундаментальной информатики.
kadm.kmath.ru Преподаватели Овсянников

О слайдах

Набор слайдов для печати будет разбит на темы, нумеруемые по порядку. Чтобы делать ссылки на утверждения, доказанные ранее, поступаем так: <утверждение> сл. n т. k означает ссылку на <утверждение> (теорему, предложение, следствие), сформулированное на слайде номер n темы k. Аналогично делаются ссылки на выделенные формулы. Если слайд, на который делается ссылка, находится в той же теме, то номер темы не указывается.

Определяемые понятия выделяются *курсивом и цветом*. Начало и конец доказательства утверждения выделяются символами $\Downarrow$ и $\Uparrow$ соответственно.

Понятие поля в алгебре

Определение

Множество F называется *полем*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall a, b \in F \exists! c \in F$ ($c = a + b$ – *сумма* a и b);
2) $\forall a, b \in F \exists! d \in F$ ($d = a \cdot b$ – *произведение* a и b);
3) $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$; *коммутативность сложения*
4) $\forall a, b \in F \quad a \cdot b = b \cdot a$; *коммутативность умножения*
5) $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c)$; *ассоциативность сложения*
6) $\forall a, b, c \in F \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; *ассоциативность умножения*
7) $\exists 0 \in F : \forall a \in F \quad a + 0 = a$; *нулевой элемент*
8) $\exists 1 \in F : \forall a \in F \quad (a \cdot 1 = a) \wedge (1 \neq 0)$; *единичный элемент*
9) $\forall a \in F \exists b \in F : a + b = 0$; *противоположный элемент*
10) $\forall a \in F (a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in F : a \cdot b = 1)$; *обратный элемент*
11) $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. *дистрибутивность*

Примерами полей являются множества $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ соответственно всех рациональных, всех действительных и всех комплексных чисел относительно обычных операций сложения и умножения.

На слайдах, если поле не определено конкретно, то подразумевается поле $\mathbb{R}$ или поле $\mathbb{C}$.

Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{R}$ может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.

Частным решением системы линейных уравнений (1) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ элементов из $\mathbb{R}$, такой, что при подстановке в каждое ее уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно это уравнение превращается в верное равенство.

Решить систему (1) означает указать определенным способом все ее частные решения или доказать, что их не существует.

Множество всех частных решений данной системы линейных уравнений называется ее *общим решением*.

Пример частного решения

Например, для системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

строка $(-1, 0, 0, 2)$ является частным решением, а строка $(1, -1, -1, 2)$ – не является.

Типы систем линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, 0, \dots, 0)$.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют совпадающие общие решения. Это означает, что каждое частное решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое частное решение второй системы будет решением первой. Любые две несовместные системы от одного и того же числа неизвестных по определению равносильны.

Элементарные преобразования системы линейных уравнений

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;
3) перестановка двух уравнений;
4) перестановка двух столбцов с неизвестными;
5) вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$.

Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$ будем называть *нулевым*.

Карл Фридрих Гаусс 1777-1855
Следующая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма

Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют ее общее решение, т.е. приводят к равносильной системе.

$\Downarrow$ Тот факт, что общее решение системы сохраняется преобразованиями 3–5, очевиден.
Очевидно также, что если верное равенство умножить на любой скаляр, то оно останется верным. Поэтому решение данной системы является и решением системы, полученной из нее умножением одного из уравнений на ненулевой скаляр t. Поскольку исходная система получается из новой преобразованием такого же типа (умножением того же уравнения на скаляр t^{-1}), всякое решение новой системы является и решением исходной системы. Таким образом, преобразование 1 также не меняет множества решений системы.

Окончание доказательства леммы

Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-того уравнения, умноженного на скаляр t, к i-тому. Поскольку если верное равенство умножить на любой скаляр t, то оно останется верным и сумма двух верных равенств – снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой. Далее, старую систему можно получить из новой последовательным выполнением трех преобразований – сначала умножаем j-тое уравнение новой системы (совпадающее с j-тым уравнением старой системы!) на $-t$, затем прибавляем полученное уравнение к i-тому уравнению новой системы. В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой. Таким образом, и преобразование 2 не меняет множества решений системы.$\Uparrow$

Система линейных уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & +\dots+ & c_{1r}x_r & +\dots+ & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & c_{22}x_2 & +\dots+ & c_{2r}x_r & +\dots+ & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & & c_{rr}x_r & +\dots+ & c_{rn}x_n & = & d_r, \end{array}\right. \qquad (2)$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, …, $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*. В частности, лестничная система может состоять из одного уравнения.

Мы будем использовать этот термин также для обозначения систем вида (2), в уравнениях которых первое слагаемое содержит не обязательно неизвестное x_1, второе — не обязательно x_2 и т.д.

Например, система

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_2 & = & 1, \\ & & 2x_3 & + & x_4 & - & x_2 & = & 0, \\ & & & & x_4 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

является лестничной.

Теорема

Если в лестничной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений. Если в лестничной системе число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

$\Downarrow$Если в лестничной системе (2) $r = n$, т.е. число неизвестных равно числу уравнений, то из последнего уравнения найдем $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$, подставим в предпоследнее и выразим из него $x_{n-1} = \frac{1}{c_{n-1,n-1}}\left(d_{n-1} - \frac{d_n c_{n-1,n}}{c_{nn}}\right)$. Двигаясь по системе (2), последовательно найдем значения $x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$.

При $r < n$ действуем аналогично: из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем в предпоследнее и выражаем из него x_{r-1}, и так далее. Получаем равносильную системе (2) систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 = g_1 + h_{11}x_{r+1} + \ldots + h_{1,n-r}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r-1} = g_{r-1} + h_{r-1,1}x_{r+1} + \ldots + h_{r-1,n-r}x_n, \\ x_r = g_r + h_{r1}x_{r+1} + \ldots + h_{r,n-r}x_n, \end{cases} \qquad (3)$$

где $g_i, h_{ij} \in F$.

Окончание доказательства теоремы

Легко понять, что если зафиксировать (*произвольным образом*) значения неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$, то можно подобрать (причем единственным образом) значения неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ так, что набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет решением системы (3), а следовательно и системы (2). Так как поле $\mathbb{R}$ бесконечное, то и множество решений будут бесконечным.$\Uparrow$

Значения неизвестных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ можно задавать произвольным образом, а значения остальных неизвестных однозначно вычисляются исходя из выбора значений $x_{r+1}, \ldots, x_n$, поэтому естественно назвать неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ *свободными*, а неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ – *связанными* или *базисными*.

Систему линейных уравнений (3) принято также называть *общим решением* системы (2).

Метод Гаусса состоит в применении к данной системе элементарных преобразований с целью получения равносильной ей лестничной или несовместной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевым коэффициентом. Тогда, при необходимости переставив уравнения, будем предполагать, что $a_{11} \neq 0$. Если $k = 1$, то система является лестничной. Пусть $k > 1$. Исключим из уравнений $2, \ldots, k$ неизвестное x_1. Для этого при $i = 2, \ldots, k$ и $a_{i1} \neq 0$ прибавим к i-му уравнению 1-е, умноженное на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\quad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad\quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \qquad\quad a'_{k2}x_2 + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k, \end{cases} \tag{4}$$

где $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$, $b'_i = b_i - \dfrac{a_{i1}b_i}{a_{11}}$ $(i = 2, \ldots, k,\ j = 2, \ldots, n)$.

Окончание общего описания метода Гаусса

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля. Здесь $\ell \leq k$, $\alpha_{22} \neq 0$ и если столбцы с неизвестными переставлялись, то неизвестные перенумерованы так, что они идут по порядку.

$$\begin{cases} \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}x'_n = \beta_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \alpha_{\ell 2}x'_2 + \ldots + \alpha_{\ell n}x'_n = \beta_\ell. \end{cases} \qquad (5)$$

Если $\ell = 2$, т.е. система (4) состоит из одного уравнения, то приведение к лестничной системе закончено. При $\ell > 2$ применим к системе (4) те же рассуждения, что и к системе (1) на сл.15, а именно исключим из $3, \ldots, \ell$ уравнений неизвестное x'_2, вычеркнем нулевые уравнения, проверим, совместна ли система. Продолжая этот процесс, мы либо установим несовместность системы (1), либо приведем ее к лестничной системе.

Пример 1

Рассмотрим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2,\\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4,\\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6,\\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3.\end{array}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4,\\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2,\\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6,\\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4,\\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2,\\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2,\\ & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & 3x_5 & = & -5.\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4,\\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2,\\ & & & & 0\cdot x_3 & + & 0\cdot x_4 & + & 0\cdot x_5 & = & 0,\\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8.\end{array}\right.$$

Вычеркивая из полученной системы третье уравнение, получаем лестничную систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{array}\right. \qquad (7)$$

которая в силу леммы эквивалентна исходной системе. В силу теоремы сл.13 система (7) совместна. Решаем ее: $x_3 = \frac{1}{5}(6x_4 + 7x_5 - 8)$;
$2x_2 = x_3 - 2x_4 + x_5 + 2 = \frac{1}{5}(6x_4 + 7x_5 - 8) - 2x_4 + x_5 + 2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{5}x_4 + \frac{12}{5}x_5$,
$x_2 = \frac{1}{5}(1 - 2x_4 + 6x_5)$;
$x_1 = -x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 4 =$
$-\frac{1}{5}(1 - 2x_4 + 6x_5) + \frac{1}{5}(6x_4 + 7x_5 - 8) - 2x_4 - x_5 + 4 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5$.
Записываем общее решение:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{11}{5} - \dfrac{2}{5}x_4 + \dfrac{6}{5}x_5, \\ x_2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}x_4 - \dfrac{4}{5}x_5, \\ x_3 = -\dfrac{8}{5} + \dfrac{6}{5}x_4 + \dfrac{7}{5}x_5. \end{array}\right. \qquad (8)$$

Еще одна запись общего решения

Свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, а базисные неизвестные выразим через c_1 и c_2 с помощью равенств (8):

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases} \tag{9}$$

Итак, множество всех решений системы (7) (равно как и системы (6) есть в точности множество всех наборов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, удовлетворяющих равенствам (9). Поэтому эти равенства мы также будем называть общим решением (6).

Пример 2

Рассмотрим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 3, \\ & & & & 6x_3 & + & x_4 & = & 7, \\ & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ & & & & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -1, \\ & & & & 6x_3 & + & x_4 & = & 7, \\ & & & - & 3x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}\right.$$

Окончание примера 2

Столбец с неизвестным x_2 поставим на последнее место, получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_2 = 2, \\ 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ 6x_3 + x_4 = 7, \\ -3x_3 - x_4 = -3. \end{cases}$$

Прибавив к третьему уравнению второе, умноженное на -2, а к четвертому – второе (ни на что не умноженное), получаем:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 + x_2 = 2, \\ 3x_3 - 4x_4 = -1, \\ 9x_4 = 9, \\ -5x_4 = -4. \end{cases}$$

Если теперь к четвертому уравнению прибавить третье, умноженное на 5/9, то мы получим уравнение $0 \cdot x_4 = 1$. Следовательно, система (10) несовместна.

Критерий совместности в терминах элементарных преобразований

Принимая во внимание, что любая лестничная система совместна, получаем следующее утверждение.

Теорема

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ее можно с помощью элементарных преобразований привести к лестничной системе.

Ненулевое решение однородной системы

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема

Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Чтобы облегчить получение общего решения, процесс исключения неизвестных можно проводить более полно. Поясним, что мы имеем в виду, на примере системы (6). Ранее мы прервали процесс преобразований этой системы, получив из нее систему (7):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 & - & 2x_4 & - & x_5, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 & - & 2x_4 & + & x_5, \\ & & & & 5x_3 & = & -8 & + & 6x_4 & + & 7x_5. \end{array}\right.$$

Продолжим теперь этот процесс. Исключим из первого и второго уравнений последней системы неизвестное x_3.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 5x_1 & + & 5x_2 & & & + & 4x_4 & - & 2x_5 & = & 12, \\ & & 10x_2 & & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8. \end{array}\right.$$

Теперь исключим x_2 из первого уравнения, для чего к первому уравнению, умноженному на 2, прибавим второе, умноженное на -1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 10x_1 & & & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & & 10x_2 & & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{array}\right. \qquad (11)$$

Переход от полученной теперь системы к общему решению тривиален: полагая $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, автоматически получаем систему (9).

Метод Гаусса, дополненный исключением неизвестных в “верхних” уравнениях, называется *методом Гаусса–Жордана* или *методом последовательного полного исключения неизвестных*.

Определение

Матрицей над множеством M называется прямоугольная таблица, составленная из элементов этого множества.
Элементы M, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем $\mathbb{R}$, чему будут посвящены слайды 30-45 ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание нулевой строки.

Преобразования 1, 2, 3 называются *элементарными преобразованиями строк матрицы*. Отметим, что преобразование 3 можно осуществить последовательным выполнением нескольких преобразований 1 и 2.

Ступенчатые матрицы

Отметим очевидную аналогию элементарных преобразований матриц над полем $\mathbb{R}$ с элементарными преобразованиями систем линейных уравнений. Далее термин "матрица" будет обозначать матрицу над полем $\mathbb{R}$, если не оговорено противное.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее понятие.

Определение

Матрица называется *ступенчатой (по строкам)*, если либо все ее элементы равны нулю (матрицы, обладающие последним свойством, называются *нулевыми*), либо выполнены следующие условия:

1) если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки;
2) если некоторая строка матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые.

Примеры ступенчатых матриц

Приведем несколько примеров ступенчатых матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (0\ \ 1\ \ 0\ \ 0),$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий вид ступенчатой матрицы

Общий вид ступенчатой матрицы изображен ниже.

$$\begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 & * & & & & \\
0 & \dots\dots\dots\dots & & 0 & * & & & \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & \ddots & & \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & 0 & * & & \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & 0 & * & \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & & \\
0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & 0
\end{pmatrix}.$$

Звездочками обозначены элементы, которые не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие ниже ломаной линии, обязаны быть равны 0. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.

Шаг индукции. Предположим. что для всех матриц, имеющих $m - 1$ строку, утверждение доказано. Выберем в матрице $A_{m \times n}$ самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-тым столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-тую строки. Обозначим полученную матрицу через B. В первой строке и j-том столбце матрицы B стоит ненулевой элемент. Обозначим его через x. Предположим, что в j-том столбце матрицы B есть ненулевой элемент y, расположенный ниже первой строки. Пусть он стоит в k-той строке.

Окончание доказательства теоремы

Прибавим к k-той строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-той строки и j-того столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-том столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0.

Полученную матрицу обозначим через C, а ее часть, расположенную ниже первой строки и правее j-того столбца – через C':

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c}
0 & \ldots & 0 & x & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\hline
0 & \ldots & 0 & 0 & \\
\multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & C' \\
0 & \ldots & 0 & 0 &
\end{array}\right).$$

Матрица C' имеет $m - 1$ строку, поэтому в силу предположения индукции ее можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. Соответствующие преобразования можно выполнить и в матрице C. В результате она будет приведена к ступенчатому виду. $\Uparrow$

Пример приведения матрицы к ступенчатому виду

Проиллюстрируем алгоритм приведения матрицы к ступенчатому виду, изложенный в доказательстве теоремы, на следующем примере. Пусть требуется привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Если матрица B может быть получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований, то мы будем писать $A \sim B$ или $A \to B$. Действуя по изложенному выше алгоритму, имеем

Продолжение примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На первом шаге мы переставили первую и вторую строки. На втором — из третьей строки, умноженной на 2, вычли первую строку, а из четвертой строки, умноженной на 2, вычли первую строку, умноженную на 3. На третьем шаге мы переставили вторую и третью строки, а на четвертом — прибавили к четвертой строке вторую.

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\dots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\dots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & +\dots+ & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{array}\right. \tag{12}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (12), а матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{pmatrix}$$

– *расширенной матрицей* этой системы.

Запись расширенной матрицы

В расширенной матрице системы часто отделяют ее последний столбец от остальных вертикальной чертой, т.е. записывают ее в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right).$$

Это делается для того, чтобы подчеркнуть «особый характер» элементов последнего столбца – в нем, в отличие от всех остальных, стоят не коэффициенты при неизвестных, а свободные члены уравнений.

Запись системы линейных уравнений по матрице

Итак, каждой системе линейных уравнений можно поставить в соответствие ее расширенную матрицу. Обратно, всякой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2\,n+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & a_{k\,n+1} \end{pmatrix},$$

содержащей более одного столбца, можно поставить в соответствие систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = a_{1\,n+1}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = a_{2\,n+1}, \\ \dotfill \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = a_{k\,n+1}. \end{cases}$$

Будем говорить, что эта система *соответствует* матрице A.

Оформление метода Гаусса

Легко заметить, что в проводившихся выше преобразованиях систем линейных уравнений менялись лишь коэффициенты при неизвестных, а сами неизвестные просто переписывались. Иными словами, фактически мы преобразовывали расширенную матрицу системы. Обычно для экономии места и времени решение системы методом Гаусса сразу оформляют в виде преобразований расширенной матрицы системы. Заметим, что при этом пятым преобразованием (вычеркивание нулевой строки) пользуются не всегда, так как в ряде случаев бывает удобно не вычеркивать нулевые строки, а «накапливать» их внизу. Кроме того, при использовании четвертого преобразования (перестановка столбцов), следует помнить о том, что нельзя переставлять местами столбец с коэффициентами при неизвестных и столбец свободных членов. Иначе говоря, среди переставляемых столбцов не должно быть последнего столбца матрицы.

Лестничные системы и ступенчатые матрицы (1)

Очевидно, что расширенная матрица всякой лестничной системы линейных уравнений является ступенчатой. Обратное неверно. Так, например, система линейных уравнений, соответствующая ступенчатой матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

не является лестничной. Чтобы получить матрицу, соответствующую лестничной системе, надо переставить в A второй и четвертый столбцы. А вот ступенчатая матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

не может быть приведена элементарными преобразованиями к матрице, соответствующей лестничной системе. В самом деле, система линейных уравнений, соответствующая матрице B, несовместна, так как содержит уравнение $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 9$.

Легко понять, что справедливо следующее

Замечание

Если A *— ступенчатая матрица, содержащая более одного столбца, то либо соответствующая ей система линейных уравнений является лестничной, либо эта система приводится к лестничной с помощью только перестановок столбцов с неизвестными, либо* A *содержит строку, в которой все элементы, кроме последнего, равны нулю, а последний элемент отличен от нуля.*

Сформулируем теперь следующий алгоритм решения систем линейных уравнений («матричную версию» метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{cases}$$

Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0*, а последний элемент отличен от нуля, то* (*независимо от того, является ли полученная к этому моменту матрица ступенчатой*) *преобразования прекращаются и констатируется, что система не имеет решений. Предположим теперь, что указанная ситуация не возникнет и мы приведем нашу матрицу к ступенчатому виду. Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице. Если эта система не является лестничной, то, переставив столбцы с неизвестными, приведем ее к лестничному виду. Остается решить эту лестничную систему так, как это описано выше (сл.19).*

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} \quad\quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Окончание примера

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, является лестничной. Общее решение этой системы найдено на сл.18. Напомним, что оно имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{5} - \dfrac{2}{5}x_4 + \dfrac{6}{5}x_5, \\ x_2 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}x_4 - \dfrac{4}{5}x_5, \\ x_3 = -\dfrac{8}{5} + \dfrac{6}{5}x_4 + \dfrac{7}{5}x_5. \end{cases}$$

Метод Гаусса–Жордана на языке матриц

Несложно переформулировать на языке матриц и метод Гаусса–Жордана. Мы не будем делать этого в общем виде, а ограничимся примерами. Продолжим элементарные преобразования расширенной матрицы системы сл.41, начиная с полученной там ступенчатой матрицы:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 5 & 5 & 0 & 4 & -2 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|r} 10 & 0 & 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы, соответствующей системе

$$\begin{cases} 10x_1 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & 10x_2 & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{cases}$$

с очевидностью вытекают равенства

$$\begin{cases} x_1 = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}x_4 + \frac{6}{5}x_5, \\ x_2 = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}x_4 - \frac{4}{5}x_5, \\ x_3 = -\frac{8}{5} + \frac{6}{5}x_4 + \frac{7}{5}x_5. \end{cases}$$

Определение

В “матричной версии” метода Гаусса-Жордана приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду называется *прямым ходом*, а решение получившейся лестничной системы – *обратным ходом*.

Случай единственного решения (1)

Особенно полезной «матричная версия» метода Гаусса–Жордана оказывается для систем, которые имеют единственное решение. Продемонстрируем это сначала на примере системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -1, \end{cases} \tag{13}$$

а затем сделаем общие выводы. Запишем расширенную матрицу системы (13) и приведем ее к ступенчатому виду, т.е. выполним прямой ход в методе Гаусса-Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Случай единственного решения (2)

Продолжим элементарные преобразования этой матрицы, выполнив обратный ход в методе Гаусса–Жордана:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 13 & 0 & 26 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right).$$

Случай единственного решения (3)

Формально «работа» метода Гаусса–Жордана завершена. Но мы сделаем еще один дополнительный шаг: разделим каждую строку последней матрицы на элемент, стоящий в основной части этой матрицы на главной диагонали (т.е. разделим первую строку на 13, а вторую и третью строки — на -13):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 13 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -13 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & -13 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, имеет вид

$$\begin{cases} x_1 &= & 1, \\ x_2 &= & 1, \\ x_3 &= & 0. \end{cases}$$

Ясно, что по существу это не система уравнений, а (единственное) решение системы (13).

Единичная матрица

Перенесем полученную информацию на общий случай. Для этого нужно следующее.

Определение

$n \times n$-матрица вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

называется *единичной матрицей* и обозначается через E_n.

Матричный вариант метода Гаусса для определенных систем

Основываясь на последнем из приведенных выше примеров, сформулируем «матричную версию» метода Гаусса–Жордана для систем, имеющих единственное решение.

Предположим, что из каких-то соображений нам известно, что система линейных уравнений имеет единственное решение. Чтобы найти его, надо с помощью элементарных преобразований расширенной матрицы привести ее основную часть к единичному виду (в рассматриваемом случае это всегда можно сделать). Последний столбец полученной матрицы будет являться (единственным) решением исходной системы.