

## Занятие 3. Линейная зависимость и независимость 2

Задачи в аудитории

Пример 1, пример 3, 8.2.9 а), г), примеры 4-6, 8.2.10 а), 8.2.11.

Домашнее задание

Пример 2, 8.2.9 б), в), 8.2.10 б).

Пример 1. Даны векторы  $a_1 = (0, 1, 0, 2, 0)$ ,  $a_2 = (7, 4, 1, 8, 3)$ ,  $a_3 = (0, 3, 0, 4, 0)$ ,  $a_4 = (1, 9, 5, 7, 1)$ ,  $a_5 = (0, 1, 0, 5, 0)$  из линейного пространства  $\mathbb{R}^5$ . Существуют ли числа  $\gamma_{ij}$  такие, что векторы  $b_i = \sum_{j=1}^5 \gamma_{ij} a_j$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) линейно независимы?

Пример 2. При каких значениях  $\lambda$  из линейной независимости системы векторов  $(a_1, a_2)$  следует линейная независимость системы векторов  $(\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2)$ ?

Пример 3. При каких значениях  $\lambda$  из линейной независимости системы векторов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  следует линейная независимость системы векторов  $(a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + \lambda a_1)$ ?

Пример 4. Доказать, что система функций  $1, \sin x, \sin^2 x, \dots, \sin^n x$  линейно независима над полем  $\mathbb{R}$ .

Пример 5. При каких условиях для системы чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  система функций  $1, e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$  будет линейно независима над полем  $\mathbb{R}$ ?

Пример 6. Доказать, что в линейном пространстве  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  векторы  $f_1, f_2, \dots, f_n$  линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  такие, что  $\det(f_i(\alpha_j)) \neq 0$ .