Занятие 1. Понятие линейного пространства

Задачи в аудитории

Пример 1, 8.1.1 а), б), 8.1.2 а), б), г), 8.1.3 б), 8.1.4, 8.1.5 а), в), 8.1.6 в), д), пример 2, 8.1.8, 8.1.9, пример 3.

Домашнее задание

8.1.1 в), г), 8.1.2 в), 8.1.3 а), 8.1.5 б), 8.1.6 г), е), 8.1.7.

Пример 1. Пусть V - линейное пространство над полем F, $U \subset V$. Доказать, что U является линейным пространством, если выполняются следующие условия:

а) $U \neq \emptyset$;

б) $\forall x, y \in U \; x + y \in U$ (U замкнуто относительно сложения векторов);

в) $\forall x \in U \; \forall \lambda \in F \; \lambda x \in U$ (U замкнуто относительно умножения на скаляры из поля F).

Пример 2. Пусть $V = \mathcal{F}(X, F)$ - множество всех функций из непустого множества X в поле F. Доказать, что V является линейным пространством над полем F относительно операций

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), (\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

для любых $f, g \in V, x \in X, \lambda \in F$.

Пример 3. Элементарные преобразования системы векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ определяются аналогично элементарным преобразованиям строк (или столбцов) матриц:

(i) перестановка двух векторов в системе;

(ii) умножение вектора на ненулевой скаляр;

(iii) прибавление к одному вектору другого вектора из этой системы, умноженного на скаляр.

Доказать, что если система векторов $(b_1, \ldots, b_k)$ получается из системы системы векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ с помощью конечного числа элементарных преобразований, то $\langle b_1, \ldots, b_k \rangle = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$.