

Занятие 19. Матрица Грама, определитель Грама

Задачи в аудитории

Пример 1. Постройте матрицу Грама стандартного базиса в пространстве задачи 11.1.1 (в).

Пример 2. В пространстве \mathbb{R}^4 для векторов $a_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (0, 1, 0, -1)$, $a_3 = (0, 0, -1, 1)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$

- найти объем параллелепипеда, построенного на векторах a_1, a_2, a_3, a_4 ;
- найти длину ортогональной составляющей вектора a_4 относительно подпространства $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$;
- найти обобщенное векторное произведение векторов a_1, a_2, a_3 .

Дополнительные задачи для аудитории

Пример 3. Для скалярного произведения из примера 1 занятия 17 (см. дополнительные задачи)

- постройте матрицу Грама стандартного базиса $1, x, x^2$;
- найдите объем параллелепипеда, построенного на многочленах стандартного базиса;
- используя построенную матрицу Грама решите пункты (б, в) примера 1 занятия 17;

Домашнее задание

Пример 3 (если не решили или недорешали в аудитории).

Пример 4. Пусть L — пространство многочленов степени не выше 2 над \mathbb{R} .

Для любых двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ определим

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx.$$

- докажите, что указанная функция является скалярным произведением;
- постройте матрицу Грама стандартного базиса $1, x, x^2$;
- найдите объем параллелепипеда, построенного на многочленах стандартного базиса;
- постройте ортонормированный базис пространства L ;
- найдите длину ортогональной составляющей x^2 относительно $\langle 1, x \rangle$;
- найдите обобщенное векторное произведение $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$.