

Вопросы к экзамену по линейной алгебре  
(II семестр 2009/2010 учебного года)

1. Аксиомы линейного пространства. Линейная зависимость. Лемма о правом крайнем
2. Системы образующих и базисы. Теорема о существовании базиса.
3. Теорема о равносильности базисов. Размерность пространства. Теорема о продолжении.
4. Координаты вектора. Связь координат в разных базисах. Критерий равенства определителя нулю.
5. Изоморфизм линейных пространств.
6. Подпространства и операции над ними. Теорема о размерности суммы двух подпространств.
7. Прямые суммы.
8. Ранг матрицы.
9. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.
10. Пространство решений однородной системы, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
11. Линейный оператор. Действия с линейными операторами. Матрица линейного оператора. Связь между действиями над операторами и действиями над матрицами.
12. Замена базисов. Изменение матрицы линейного оператора при замене базисов. Подобные матрицы.
13. Ядро и образ линейного оператора, теорема о соотношении между их размерностями.
14. Строение линейного оператора из одного пространства в другое.
15. Алгоритм параллельного вычисления базисов ядра и образа линейного оператора.
16. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора.
17. Предложение о линейной независимости собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Признак диагонализуемости линейного оператора.

18. Разложение Фиттинга.
19. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении.  $R$ -алгоритм.
20. Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Критерий диагонализируемости линейного оператора.
21. Жорданов базис нильпотентного оператора.  $J$ -алгоритм.
22. Нормальная форма Жордана. Матричная форма теоремы Жордана. Критерий подобия матриц.
23. Аксиомы унитарного (евклидового) пространства. Длина вектора. Неравенство Коши–Буняковского.
24. Ортогональные системы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортонормированный базис. Изоморфизм унитарных (евклидовых) пространств.
25. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональные разложения.
26. Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на унитарном (евклидовом) пространстве.
27. Сопряженный оператор. Линейность сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения. Матрица сопряженного оператора.
28. Нормальный оператор. Ортогональность собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям нормального оператора. Теорема о строении нормального оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
29. Унитарный (ортогональный) оператор. Матрица унитарного (ортогонального) оператора. Характеризация унитарного (ортогонального) оператора как движения. Теорема о строении унитарного (ортогонального) оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
30. Самосопряженный оператор. Матрица самосопряженного оператора. Теорема о строении самосопряженного оператора.
31. Неотрицательный самосопряженный оператор. Квадратный корень из неотрицательного самосопряженного оператора.
32. Полярное разложение линейного оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.