

Вопросы к экзамену по алгебре и геометрии
(Весенний семестр 2014/2015 учебного года)

1. Основные понятия теории делимости. Отношение ассоциированности.
2. Евклидовы кольца. Евклидовость кольца целых гауссовых чисел.
3. Теорема о наибольшем общем делителе в евклидовых кольцах. Алгоритм Евклида.
4. Существование и однозначность разложения на неразложимые множители в евклидовых кольцах.
5. Поле частных области.
6. Лемма Гаусса и ее следствия.
7. Однозначность разложения на неприводимые многочлены в кольце многочленов над областью с однозначным разложением.
8. Неприводимые многочлены с целыми коэффициентами. Критерий Эйзенштейна.
9. Многочлены как функции. Определяемость многочлена n -й степени значениями в $n + 1$ точке. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
10. Теорема Безу. Корни многочлена. Кратные корни. Число корней многочлена n -й степени.
11. Поле разложения многочлена.
12. Симметрические многочлены. Формулы Виета. Основная теорема о симметрических многочленах.
13. Лемма о модуле старшего члена. Основная теорема алгебры комплексных чисел. Классификация неприводимых многочленов над полями комплексных и действительных чисел.
14. Ранг матрицы.
15. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли.
16. Пространство решений однородной системы, его базис (фундаментальная система решений) и размерность.
17. Линейный оператор. Действия с линейными операторами. Матрица линейного оператора. Связь между действиями над операторами и действиями над матрицами.
18. Замена базисов. Изменение матрицы линейного оператора при замене базисов. Подобные матрицы.

19. Ядро и образ линейного оператора, теорема о соотношении между их размерностями.
20. Алгоритм параллельного вычисления базисов ядра и образа линейного оператора.
21. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен линейного оператора.
22. Предложение о линейной независимости собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям. Признак диагонализуемости линейного оператора.
23. Разложение Фиттинга.
24. Корневые подпространства. Теорема о корневом разложении. Алгоритм построения базиса корневого подпространства.
25. Минимальный многочлен линейного оператора. Теорема Гамильтона–Кэли. Критерий диагонализуемости линейного оператора.
26. Жорданов базис нильпотентного оператора. Алгоритм построения жорданова базиса
27. Нормальная форма Жордана. Матричная форма теоремы Жордана. Единственность жордановой формы. Критерий подобия матриц.
28. Аксиомы унитарного (евклидова) пространства. Длина вектора. Неравенство Коши–Буняковского.
29. Ортогональные системы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортонормированный базис.
30. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональные разложения.
31. Линейные функционалы. Теорема о строении линейного функционала на унитарном (евклидовом) пространстве.
32. Сопряженный оператор. Линейность сопряженного оператора. Свойства операции сопряжения. Матрица сопряженного оператора.
33. Нормальный оператор. Ортогональность собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям нормального оператора. Теорема о строении нормального оператора на унитарном пространстве.
34. Теорема о строении нормального оператора на евклидовом пространстве.

35. Унитарный (ортогональный) оператор. Матрица унитарного (ортогонального) оператора. Характеризация унитарного (ортогонального) оператора как движения.
36. Теорема о строении унитарного (ортогонального) оператора на унитарном (евклидовом) пространстве.
37. Самосопряженный оператор. Матрица самосопряженного оператора. Теорема о строении самосопряженного оператора.
38. Квадратичные формы. Приведение действительной квадратичной формы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
39. Закон инерции действительных квадратичных форм.
40. Положительно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестера.