# Суммирование с помощью комплексных чисел

Тригонометрическую форму комплексных чисел можно применить для преобразования суммы неограниченного числа слагаемых в сумму небольшого фиксированного числа слагаемых (т.е. выполнять суммирование).

Преобразовать сумму $1+\sum_{k=2}^{n+1} k\cos(k-1)\varphi$ ($\varphi$ – произвольное действительное число).

Положим
$S=1+\sum_{k=2}^{n+1} k\cos(k-1)\varphi=1+2\cos\varphi+3\cos 2\varphi+\ldots+(n+1)\cos n\varphi$, $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $T=2\sin\varphi+3\sin 2\varphi+\ldots+(n+1)\sin n\varphi$. Тогда по формуле Муавра $S+iT=1+2(\cos\varphi+i\sin\varphi)+3(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots+(n+1)(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n=U(z)$. Тогда $U(z)=(z+z^2+\ldots+z^{n+1})'$ есть производная от суммы геометрической прогрессии. Так как $z+z^2+\ldots+z^{n+1}=z\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}=\dfrac{z^{n+2}-z}{z-1}$, имеем по формуле дифференцирования дроби

$$U(z)=\left(\frac{z^{n+2}-z}{z-1}\right)'=\frac{((n+2)z^{n+1}-1)(z-1)-z^{n+2}+z}{(z-1)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)z^{n+2}-(n+2)z^{n+1}+1}{(z-1)^2}.$$

# Окончание примера

Преобразуем $(z-1)^2$:
$(z-1)^2 = z^2 - 2z + 1 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - 2\cos\varphi - 2i\sin\varphi + 1$.Так как
$\cos 2\varphi - 2\cos\varphi + 1 = 2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\cos\varphi$ и
$\sin 2\varphi - 2\sin\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\sin\varphi$, получаем
$(z-1)^2 = 2(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\varphi - 1)z = -4z\sin^2\frac{\varphi}{2}$.
Поскольку $z^{-1} = \overline{z}$, имеем $U(z) = -\dfrac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1} + 1}{4z\sin^2\frac{\varphi}{2}} =$
$= \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)z^n - (n+1)z^{n+1} - \overline{z}) = \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) -$
$(n+1)(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi) - \cos\varphi + i\sin\varphi) = \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\cos n\varphi -$
$(n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi) + i((n+2)\sin n\varphi - (n+1)\sin(n+1)\varphi + \sin\varphi)$.
Из $U(z) = S + iT$ получаем

$$S = \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\cos n\varphi - (n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi)$$

и

$$T = \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\sin n\varphi - (n+1)\sin(n+1)\varphi + \sin\varphi).$$

## Выражение $\cos^n x$ через $\cos mx$. Случай четного $n$

Пусть $z = \cos x + i \sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $z^{-1} = \overline{z} = \cos(-x) + i \sin(-x)$, и $z^m + z^{-m} = \cos mx + i \sin mx + \cos(-mx) + i \sin(-mx) = 2 \cos mx$. С одной стороны, $(z + \overline{z})^n = 2^n \cos^n x$. С другой стороны, по биномиальной формуле Ньютона $(z + \overline{z})^n = (z + z^{-1})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} z^{-k}$. Пусть $n = 2m$.

Из $C_{2m}^{m+k} = C_{2m}^{m-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ следует $\sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} =$

$|j = 2m - k| = \sum\limits_{j=m-1}^{0} C_{2m}^j z^j z^{j-2m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k z^{2k-2m}$. Значит,

$(z + \overline{z})^{2m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} + C_{2m}^m z^m z^{-m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} =$

$\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (z^{2m-2k} + z^{2k-2m}) + C_{2m}^m = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (2 \cos 2(m-k)x) + C_{2m}^m.$

Таким образом, $2^{2m} \cos^{2m} x = 2 \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (\cos 2(m-k)x) + C_{2m}^m$, откуда

$$\cos^{2m} x = 2^{1-2m} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + 2^{-2m} C_{2m}^m.$$

$$2^n \cos^n x = (z+\overline{z})^n = (z+z^{-1})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} z^{-k}.$$

Пусть $n = 2m+1$. Поскольку $C_{2m+1}^{m+k+1} = C_{2m+1}^{m-k}$ для $k = 0, 1, \ldots, m$, имеем

$$\sum_{k=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} = |j = 2m+1-k| = \sum_{j=m}^{0} C_{2m+1}^j z^j z^{j-2m-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k z^{2k-2m-1}.$$

Значит, $(z+\overline{z})^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} =$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k (z^{2m+1-2k} + z^{2k-2m-1}) = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k (2\cos(2(m-k)+1)x).$$

Таким образом, $2^{2m+1}\cos^{2m+1} x = 2\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2(m-k)+1)x$, откуда

$$\cos^{2m+1} x = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2(m-k)+1)x.$$

## Выражение $\sin^{2m} x$ через $\cos kx$

Пусть $z = \cos x + i \sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $z^{-1} = \overline{z} = \cos(-x) + i \sin(-x)$, и $z - \overline{z} = 2i \sin x$. Значит, $(z-\overline{z})^{2m} = 2^{2m} i^{2m} \sin^{2m} x = 2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x$. Далее, аналогично выкладкам предыдущего слайда, получаем $(z-\overline{z})^{2m} =$
$\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} + (-1)^m C_{2m}^m z^m z^{-m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} =$
$\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (z^{2m-2k} + z^{2k-2m}) + (-1)^m C_{2m}^m =$
$\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (2 \cos 2(m-k)x) + (-1)^m C_{2m}^m$. Таким образом,

$2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x = 2 \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (\cos 2(m-k)x) + (-1)^m C_{2m}^m$, откуда

$$\sin^{2m} x = 2^{1-2m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + 2^{-2m} C_{2m}^m.$$

## Выражение $\sin^{2m+1} x$ через $\sin kx$

Пусть $z = \cos x + i \sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $z^{-1} = \overline{z} = \cos(-x) + i \sin(-x)$, и $z - \overline{z} = 2i \sin x$.

Значит, $(z - \overline{z})^{2m+1} = 2^{2m+1} i^{2m+1} \sin^{2m+1} x = 2^{2m+1} (-1)^m i \sin^{2m+1} x$.

Далее, аналогично выкладкам предыдущего слайда, получаем

$(z - \overline{z})^{2m+1} =$

$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} (-1)^k C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} =$

$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k ((-1)^k z^{2m+1-2k} + (-1)^{2m+1-k} z^{2k-2m-1}) =$

$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k (z^{2m+1-2k} - z^{2k-2m-1}) =$

$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k 2i(\sin(2(m-k)+1)x)$. Таким образом,

$2^{2m+1} (-1)^m i \sin^{2m+1} x = 2i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k \sin(2(m-k)+1)x$, откуда

$$\sin^{2m+1} x = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{2m+1}^k \sin(2(m-k)+1)x.$$

# Глава III. Основные понятия

# § 1. Соответствия и отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

# Соответствие

Пусть $X, Y$ — непустые множества.

**Определения**

*Соответствием* из множества $X$ в множество $Y$ называется всякое непустое подмножество $\alpha \subseteq X \times Y$.
*Областью определения* соответствия $\alpha$ называется множество $D(\alpha) = \{x \in X | \exists y \in Y : (x, y) \in \alpha\}$.
*Областью значений* соответствия $\alpha$ называется множество $E(\alpha) = \{y \in Y | \exists x \in X : (x, y) \in \alpha\}$.

Очевидно, что $D(\alpha) \subseteq X$, $E(\alpha) \subseteq Y$ и $D(\alpha) \neq \emptyset$, $E(\alpha) \neq \emptyset$.
Соответствия между конечными множествами можно изображать диаграммами, в которых элементы множеств изображаются точками, а тот факт, что упорядоченная пара $(a, b)$ принадлежит соответствию, изображается стрелкой $a \longrightarrow b$.

# Свойства соответствий: функциональность и инъективность

Пусть $\alpha$ — соответствие из множества $X$ в множество $Y$.

**Определения**

Соответствие $\alpha$ называется *функциональным*, если для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ из $(x, y_1) \in \alpha$ и $(x, y_2) \in \alpha$ следует $y_1 = y_2$.
Соответствие $\alpha$ называется *инъективным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ из $(x_1, y) \in \alpha$ и $(x_2, y) \in \alpha$ следует $x_1 = x_2$.

На языке диаграмм свойство фунциональности означает, что невозможна ситуация изображенная на рис.1 при $y_1 \neq y_2$:

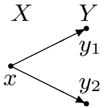


Рис. 1 а свойство инъективности означает, что невозможна ситуация изображенная на рис.2 при $x_1 \neq x_2$:

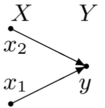


Рис. 2

# Свойства соответствий: сюръективность и всюду определенность.

## Определения

Соответствие $\alpha$ называется *сюръективным*, если $E(\alpha) = Y$, т.е. для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой что $(x, y) \in \alpha$.
Соответствие $\alpha$ называется *всюду определенным*, если $D(\alpha) = X$, т.е. для любого $x \in X$ существует $y \in Y$ такой что $(x, y) \in \alpha$.

На диаграмме сюръективного соответствия в каждый элемент множества $Y$ идет по крайней мере одна стрелка.
На диаграмме всюду определенного соответствия из каждого элемента множества $X$ выходит по крайней мере одна стрелка.

**Определения**

Всюду определенное функциональное соответствие из множества $X$ в множество $Y$ называется *отображением* множества $X$ *в* множество $Y$.
Сюръективное отображение из множества $X$ в множество $Y$ называется отображением множества $X$ *на* множество $Y$.
Инъективное отображение из множества $X$ на множество $Y$ называется *биекцией* множества $X$ на множество $Y$ или *взаимно однозначным соответствием* множества $X$ на множество $Y$.

Термин "*функция*" является синонимом термина "отображение".

Определите свойства соответствий, изображенных следующими диаграммами, и их типы:

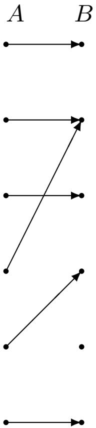


Рис. 3

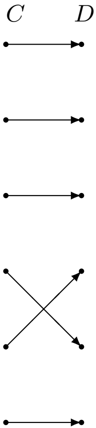


Рис. 4

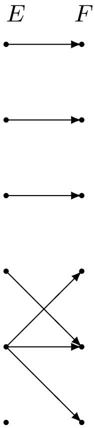


Рис. 5

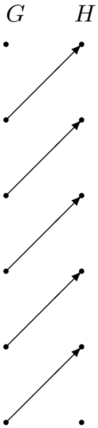


Рис. 6

# Договоренности об обозначениях и примеры

Отображение $\alpha$ из множества $X$ в множество $Y$ кратко принято записывать так: $\alpha : X \longrightarrow Y$.
Вместо $(x, y) \in \alpha$ в случае, когда $\alpha$ – отображение, будем писать $y = \alpha(x)$.
При этом $y$ называется *образом* элемента $x$, а $x$ – *прообразом* элемента $y$ при отображении $\alpha$.
При определении отображения $\alpha$ будем писать $x \mapsto \alpha(x)$.
Термин "*функция*" будет использоваться как синоним для термина "отображение".
Отображение $\alpha : X \longrightarrow Y$ будет инъективным тогда и только тогда, когда $\forall x_1, x_2 \in X$ $(\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$.
Отображение $\alpha : X \longrightarrow Y$ будет сюръективным тогда и только тогда, когда $\forall y \in Y \exists x \in X : \alpha(x) = y$.

Положим $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Тогда отображение $x \mapsto x^2$ будет отображением $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$, отображением $\mathbb{R}$ *на* $\mathbb{R}^+$ и *биекцией* $\mathbb{R}^+$ *на* $\mathbb{R}^+$.

Пусть $\alpha$ — соответствие из множества $X$ в множество $Y$.

**Определение**

*Обратным* соответствием к соответствию $\alpha$ называется соответствие $\{(y,x)|(x,y)\in\alpha\}$ из множества $Y$ в множество $X$.

Указанное соответствие обозначается через $\alpha^{-1}$.
Из определений сл.2 следует, что $E(\alpha^{-1}) = D(\alpha)$ и $D(\alpha^{-1}) = E(\alpha)$ для любого соответствия $\alpha$.
Из определений сл.3 следует, что
$\alpha$ является функциональным $\Longleftrightarrow$ $\alpha^{-1}$ является инъективным.
Из определений сл.4 следует, что
$\alpha$ является всюду определенным $\Longleftrightarrow$ $\alpha^{-1}$ является сюръективным.

# Обратимое отображение

**Определение**

Отображение $\alpha$ из множества $X$ в множество $Y$ называется *обратимым*, если обратное соответствие $\alpha^{-1}$ является отображением $Y$ на $X$. Отображение $\alpha^{-1}$ при этом называется *обратным* к отображению $\alpha$.

Из утверждений сл.8 следует, что отображение $\alpha$ является обратимым тогда и только тогда, когда оно является биекцией. При этом обратное отображение $\alpha^{-1}$ также является биекцией.

Отображение $x \mapsto x^2$ множества $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}^+$ является обратимым и обратным к нему будет отображением $x \mapsto \sqrt{x}$.

Пусть $\alpha$ — соответствие из множества $X$ в множество $Y$, $\beta$ — соответствие из множества $Y$ в множество $Z$.

**Определение**

Произведением соответствий $\alpha$ и $\beta$ называется подмножество декартова произведения $X \times Z$, определяемое формулой

$$\alpha \circ \beta = \{(x, z) | \exists y \in Y : (x, y) \in \alpha, (y, z) \in \beta\}.$$

Легко видеть, что $\alpha \circ \beta$ является соответствием тогда и только тогда, когда $E(\alpha) \cap D(\beta) \neq \emptyset$.

**Предложение**

Пусть $\alpha$ — соответствие из множества $X$ в множество $Y$, $\beta$ — соответствие из множества $Y$ в множество $Z$ и $\gamma$ – соответствие из множества $Z$ в множество $T$. Тогда $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

$\Downarrow$Пусть $(x, t) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ для некоторых $x \in X, t \in T$. Тогда существует $z \in Z$: $(x, z) \in \alpha \circ \beta$, $(z, t) \in \gamma$ и существует $y \in Y$: $(x, y) \in \alpha$ и $(y, z) \in \beta$. Следовательно, $(y, t) \in \beta \circ \gamma$ и $(x, t) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, т.е. $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. Противоположное включение доказывается аналогично.$\Uparrow$