

## Пример 2

Решить уравнение  $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$ . Формула для корней квадратного уравнения  $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ , где  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ , имеет вид

$$z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Почему перед корнем знак  $+$ ?

$$D = (2i - 7)^2 - 4(13 - i) = -4 - 28i + 49 - 52 + 4i = -7 - 24i.$$

Находим  $d_{1,2} = \sqrt{-7 - 24i}$ :  $(x + iy)^2 = -7 - 24i$ ;  $x, y \in \mathbb{R}$ ;

$$x^2 + 2xyi - y^2 = -7 - 24i; \begin{cases} x^2 - y^2 = -7, \\ 2xy = -24; \end{cases}$$

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = 49 + 576 = 625; (x^2 + y^2)^2 = 625;$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -7, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases} \quad 2x^2 = 18, \quad 2y^2 = 32, \quad x^2 = 9, \quad y^2 = 16;$$

$xy = -12$ ,  $x$  и  $y$  имеют разные знаки;  $x_1 = 3, y_1 = -4, x_2 = -3, y_2 = 4$ ;

$$d_1 = 3 - 4i, \quad d_2 = -3 + 4i.$$

$$\text{Находим корни: } z_1 = \frac{7 - 2i + d_1}{2} = \frac{7 - 2i + 3 - 4i}{2} = 5 - 3i;$$

$$z_2 = \frac{7 - 2i + d_2}{2} = \frac{7 - 2i - 3 + 4i}{2} = 2 + i.$$

Ответ:  $z_1 = 5 - 3i, z_2 = 2 + i$ .

3. Решить уравнение  $z^2 = -8$ .

Имеем  $z_{1,2} = \pm i \sqrt{-(-8)} = \pm i \sqrt{8} = \pm 2i \sqrt{2}$ .

4. Вычислить  $i^n$  для любого натурального числа  $n$ .

Вычисляем  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ ,  $i^4 = ((i)^2)^2 = 1$ . Пусть  $n \in \mathbb{N}$ .

Разделим  $n$  на 4 с остатком:  $n = 4q + m$ , где  $m = 0, 1, 2, 3$ . Тогда

$$i^n = i^{4q+m} = i^{4q} i^m = (i^4)^q i^m = i^m.$$

Таким образом,  $i^n = \begin{cases} 1, & m = 0, n = 4q; \\ i, & m = 1, n = 4q + 1; \\ -1, & m = 2, n = 4q + 2; \\ -i, & m = 3, n = 4q + 3. \end{cases}$

## Глава II. Комплексные числа

### §3. Тригонометрическая форма комплексных чисел

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Основы алгебры для направлений  
Механика и математическое моделирование и  
Прикладная математика  
(1 семестр)

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Комплексное число  $a + bi$  будем изображать точкой плоскости с координатами  $(a, b)$ . Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать единственная точка на плоскости и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать единственное комплексное число. Получается биекция множества  $\mathbb{C}$  на множество всех точек плоскости.

Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа, а точки оси ординат и только они — числа вида  $bi$ , которые при  $b \neq 0$  называются **чисто мнимыми**.

Начало координат соответствует числу 0.

## Определение

Пусть комплексное число  $z = a + bi$  изображается на плоскости точкой  $M$  (см. рис. 1 на следующем слайде). Тогда длина отрезка  $OM$  называется **модулем** числа  $z$ . Если  $z \neq 0$ , то угол между положительным направлением оси  $Ox$  и отрезком  $OM$  называется **аргументом** числа  $z$ . У числа 0 аргумент не определен. Модуль комплексного числа  $z$  обозначается через  $|z|$ , а аргумент — через  $\arg(z)$ .

На следующем рисунке  $r = |z|$  и  $\varphi = \arg(z)$ .

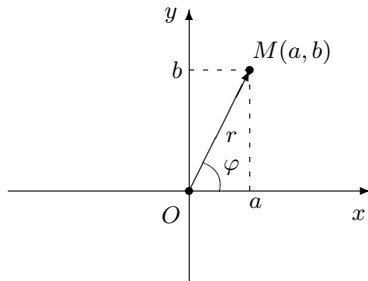


Рис. 1

Отметим, что для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса. Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, так как если  $\varphi$  — аргумент числа  $a + bi$ , то  $\varphi + 2\pi k$  — также его аргумент при любом целом  $k$ .  
 Комплексное число  $z = a + bi$  можно представить и вектором  $\overrightarrow{OM}$ . Тогда сумме чисел будет сопоставлена сумма соответствующих векторов, так как координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых.

Пусть  $r$  — модуль, а  $\varphi$  — аргумент комплексного числа  $a + bi$ . Ясно, что  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  и  $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Следовательно,

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot i \right) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

## Определение

Если  $r$  — модуль, а  $\varphi$  — аргумент комплексного числа  $a + bi$ , то выражение  $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  называется **тригонометрической формой записи** этого числа.

Любое комплексное число кроме нуля может быть записано в тригонометрической форме.

## Определение

Если  $z = x + iy$  — комплексное число, то по определению полагают  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  (здесь  $e$  — основание натуральных логарифмов). В частности,  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  и тригонометрическую форму комплексного числа можно записать в виде  $re^{i\varphi}$ .

## О функции $e^z$ . Тригонометрическая форма записи комплексных чисел (примеры)

В теории функций комплексного переменного доказывается, что

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{\frac{1}{n}} \text{ для любого } z \in \mathbb{C}.$$

1. Пусть  $u = 1 + i$ ,  $r = |u|$  и  $\varphi = \arg(u)$ . Тогда, очевидно,  $r = \sqrt{2}$ ,  $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$  и  $\sin \varphi = 1/\sqrt{2}$ . Из двух последних равенств вытекает, что  $\varphi = \pi/4$ . Следовательно, тригонометрической формой записи числа  $1 + i$  будет  $\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$ :  $1 + i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4))$ .

2. Пусть  $v = -1 + \sqrt{3}i$ ,  $\rho = |v|$  и  $\psi = \arg(v)$ . Тогда  $\rho = 2$ ,  $\cos \psi = -1/2$  и  $\sin \psi = \sqrt{3}/2$ . Значит,  $\psi = 2\pi/3$ . Тригонометрической формой записи числа  $v$  будет  $2(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$ .

Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.

## Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. Пусть

$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  и  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ . Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)] = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2))}{r_2(\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Мы видим, что:

*модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов;  
модуль частного от деления  $z_1$  на  $z_2$  равен частному от деления модуля  $z_1$  на модуль  $z_2$ , а аргумент частного — разности аргументов  $z_1$  и  $z_2$ .*



Формулы для произведения и частного комплексных чисел в тригонометрической форме полностью согласуются с представлением  $z = re^{i\varphi}$ :

$$(r_1 e^{i\varphi_1})(r_2 e^{i\varphi_2}) = (r_1 r_2)(e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}(e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2}) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

## Предложение

Для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$  справедливо неравенство  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ .

↓ При геометрическом представлении комплексных чисел векторами на плоскости сумма комплексных чисел  $z_1 + z_2$  изображается вектором, равным сумме векторов, изображающих  $z_1$  и  $z_2$ . Если сложить последние два вектора по правилу треугольников, то получится вектор, соответствующий их сумме  $z_1 + z_2$ . При этом длины векторов равны  $|z_1|$ ,  $|z_2|$ ,  $|z_1 + z_2|$ .

Если векторы, изображающие  $z_1$  и  $z_2$ , неколлинеарны, то по свойству треугольника  $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ .

Если эти векторы сонаправлены, то  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ , если они антинаправлены, то  $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ . ↑

## Возведение в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

Используя результат о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме, по индукции докажем, что

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1)$$

для любого натурального  $n$ . База индукции:  $n = 1$ . Утверждение очевидно.

Шаг индукции. Пусть утверждение доказано при  $n = k - 1$ , т.е.

$$\begin{aligned} (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{k-1} &= r^{k-1} (\cos(k-1)\varphi + i \sin(k-1)\varphi). \text{ Тогда} \\ (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^k &= (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^{k-1} (r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = \\ &= (r^{k-1} (\cos(k-1)\varphi + i \sin(k-1)\varphi)) (r(\cos \varphi + i \sin \varphi)) = \\ &= r^{k-1+1} (\cos(k-1+1)\varphi + i \sin(k-1+1)\varphi) = r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом,

*при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.*

При  $r = 1$  из формулы (1) получается равенство, известное как *формула Муавра*:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Формула Муавра оказывается удобным средством для преобразования тригонометрических выражений. Продемонстрируем это на следующем примере: выразить  $\cos 5\varphi$  и  $\sin 5\varphi$  через  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ . Будем исходить из равенства

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5,$$

которое получено из формулы Муавра при  $k = 5$ . Правую его часть преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 &= \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - \\ &\quad - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi = \\ &= (\cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi) + \\ &\quad + (5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi)i.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi, \\ \sin 5\varphi &= 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi.\end{aligned}$$

## Определение

Пусть  $n$  — натуральное число. *Корнем степени  $n$  из комплексного числа  $z$*  называется комплексное число  $w$  такое, что  $w^n = z$ .

Множество всех корней степени  $n$  из комплексного числа  $z$  обозначается через  $\sqrt[n]{z}$ .

Если  $z = 0$ , то, очевидно, для любого натурального  $n$  существует ровно один корень  $n$ -й степени из  $z$ , равный нулю. Пусть теперь  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  и  $z \neq 0$ . Корень степени  $n$  из  $z$  будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть  $w = q(\cos \psi + i \sin \psi)$  и  $w^n = z$ . Тогда, в силу формулы (1),

$$q^n (\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Получаем равенства  $q^n = r$  и  $n\psi = \varphi + 2\pi k$ , где  $k$  — некоторое целое число. Поскольку  $q$  и  $r$  — положительные действительные числа, это означает, что  $q$  — арифметический корень степени  $n$  из числа  $r$ . Для аргумента числа  $w$  справедливо равенство  $\psi = (\varphi + 2\pi k)/n$ . В частности, мы видим, что корень  $n$ -й степени из числа  $z$  всегда существует.

## Извлечение корней из комплексных чисел (2)

Выясним, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Как мы видели, все корни  $n$ -й степени из числа  $z$  задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (2)$$

где  $k$  — целое число. Ясно, что  $w_k = w_\ell$  тогда и только тогда, когда  $\frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi + 2\pi \ell}{n} + 2\pi m$  при некотором целом  $m$ . Последнее равенство равносильно равенству  $\frac{k - \ell}{n} = m$ . Иными словами, числа  $w_k$  и  $w_\ell$  совпадают тогда и только тогда, когда разность  $k - \ell$  нацело делится на  $n$ . Таким образом, чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (2) взять  $n$  последовательных значений  $k$ , например, последовательно приравнять  $k$  к  $0, 1, \dots, n - 1$ . Мы доказали, что существует ровно  $n$  различных значений корня степени  $n$  из произвольного ненулевого комплексного числа  $z$ , которые вычисляются по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad \text{где } k = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (3)$$

При этом  $\sqrt[n]{z} = \{w_0, \dots, w_{n-1}\}$ .

На комплексной плоскости корни  $n$ -й степени из  $z$  расположены на окружности радиуса  $\sqrt[n]{r}$  с центром в точке  $0$  в вершинах правильного  $n$ -угольника, одна из вершин которого расположена в точке  $\sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$ .

Рассмотрим пример: найти корни четвертой степени из числа  $1 + i$ .

Модуль этого числа равен  $\sqrt{2}$ , аргумент равен  $\pi/4$ . Согласно формуле (3) имеем

$$\sqrt[4]{1+i} = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4} \right),$$

где  $k = 0, 1, 2, 3$ . Получаем четыре значения корня:

$$\text{при } k = 0 : w_0 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right),$$

$$\text{при } k = 1 : w_1 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{16} + i \sin \frac{9\pi}{16} \right),$$

$$\text{при } k = 2 : w_2 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{17\pi}{16} + i \sin \frac{17\pi}{16} \right),$$

$$\text{при } k = 3 : w_3 = \sqrt[8]{2} \left( \cos \frac{25\pi}{16} + i \sin \frac{25\pi}{16} \right).$$

## Определение

*Корнем степени  $n$  из единицы* называется комплексное число  $\varepsilon$  такое что  $\varepsilon^n = 1$ .

Положим  $\varepsilon_{n,k} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$ . Так как  $1 = \cos 0 + i \sin 0$ , имеем  $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_{n,k} | k = 0, 1, \dots, n-1\}$  – множество всех корней  $n$ -й степени из 1. На комплексной плоскости корни  $n$ -й степени из 1 расположены на окружности радиуса 1 с центром в точке 0 в вершинах правильного  $n$ -угольника, одна из вершин которого расположена в точке 1. Легко видеть, что для любого ненулевого комплексного числа  $z$  и для любого  $x \in \sqrt[n]{z}$  справедлива формула  $\sqrt[n]{z} = x \sqrt[n]{1}$ .

## Определение

Комплексное число  $\varepsilon$  называется *первообразным корнем* степени  $n$  из единицы, если  $\varepsilon^n = 1$  и  $\varepsilon^m \neq 1$  для всех  $1 \leq m < n$ .

Очевидно, что  $\varepsilon_{n,1}$  – первообразный корень степени  $n$  из единицы, так как  $\varepsilon_{n,k} = \varepsilon_{n,1}^k$  при  $k = 1, \dots, n-1$ .

Следующее утверждение позволяет выделить первообразные корни степени  $n$  среди элементов множества  $\sqrt[n]{1}$ .

## Теорема

Число  $\varepsilon_{n,k} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$  ( $1 < k < n$ ) является первообразным корнем степени  $n$  из единицы тогда и только тогда, когда числа  $k$  и  $n$  взаимно просты.

↓ Пусть  $\varepsilon_{n,k}$  является первообразным корнем степени  $n$  из единицы. От противного, предположим, что числа  $k$  и  $n$  не взаимно просты. Пусть  $d = (n, k)$  – наибольший общий делитель,  $n = n_1 d$ ,  $k = k_1 d$ . Имеем по формуле Муавра  $\varepsilon_{n,k}^{n_1} = \cos \frac{2\pi k n_1}{n} + i \sin \frac{2\pi k n_1}{n} = \cos \frac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i \sin \frac{2\pi k_1 d n_1}{n} = \cos 2\pi k_1 + i \sin 2\pi k_1 = 1$ . Так как  $n_1 < n$ , получаем противоречие.

Предположим, что числа  $k$  и  $n$  взаимно просты и  $\varepsilon_{n,k}^m = 1$ . Тогда  $\cos \frac{2\pi k m}{n} + i \sin \frac{2\pi k m}{n} = 1$ , откуда  $\frac{2\pi k m}{n} = 2\pi q$  для некоторого целого числа  $q$ . Имеем  $km = qn$ , откуда в силу взаимной простоты  $k$  и  $n$  получаем, что  $n$  делит  $m$ . Следовательно,  $\varepsilon_{n,k}^r \neq 1$  при  $1 \leq r < n$  и  $\varepsilon_{n,k}$  – первообразный корень степени  $n$  из единицы. ↑



$$\text{Вычислить } c_0 = \sum_{0 \leq k \leq n/2} (-1)^k C_n^{2k} \text{ и } c_1 = \sum_{0 \leq k \leq (n-1)/2} (-1)^k C_n^{2k+1}.$$

Запишем  $(1+i)^n$  по формуле бинома Ньютона и по формуле Муавра.

$$(i+1)^n = \sum_{k=0}^n i^k C_n^k 1^{n-k} =$$

$$C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 + C_n^8 + \dots = c_0 + ic_1;$$

$$1+i = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4));$$

$$(1+i)^n = (\sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)))^n = 2^{\frac{n}{2}} (\cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4)).$$

Из равенства  $c_0 + ic_1 = 2^{\frac{n}{2}} (\cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4))$  следует

$$c_0 = 2^{\frac{n}{2}} \cos(n\pi/4), \quad c_1 = 2^{\frac{n}{2}} \sin(n\pi/4).$$