Системы линейных уравнений

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Понятие системы линейных уравнений

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \qquad (1)$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.

Частным решением системы линейных уравнений (1) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ элементов из F,

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.
Частным решением системы линейных уравнений (1) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ элементов из F, такой, что при подстановке в каждое ее уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно это уравнение превращается в верное равенство.

Понятие системы линейных уравнений

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.

Частным решением системы линейных уравнений (1) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ элементов из F, такой, что при подстановке в каждое ее уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно это уравнение превращается в верное равенство.

Решить систему (1) означает указать определенным способом все ее частные решения или доказать, что их не существует.

Понятие системы линейных уравнений

Пусть F – поле. *Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными* над полем F может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{1}$$

Определения

Здесь $a_{ij} \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (1), $b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными.

Частным решением системы линейных уравнений (1) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ элементов из F, такой, что при подстановке в каждое ее уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно это уравнение превращается в верное равенство.

Решить систему (1) означает указать определенным способом все ее частные решения или доказать, что их не существует.

Множество всех частных решений данной системы линейных уравнений называется ее *общим решением*.

Пример частного решения

Например, для системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

строка $(-1, 0, 0, 2)$ является частным решением,

Пример частного решения

Например, для системы линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 4; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

строка $(-1, 0, 0, 2)$ является частным решением, а строка $(1, -1, -1, 2)$ – не является.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто);

Типы систем линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Типы систем линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0.

Типы систем линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, 0, \ldots, 0)$.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, 0, \dots, 0)$.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют совпадающие общие решения.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, 0, \ldots, 0)$.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют совпадающие общие решения. Это означает, что каждое частное решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое частное решение второй системы будет решением первой.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, – *неопределенной*. Далее будет установлено, что неопределенная система над бесконечным полем всегда имеет бесконечно много решений.

Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях равны 0. Однородная система линейных уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $(0, 0, \ldots, 0)$.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют совпадающие общие решения. Это означает, что каждое частное решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое частное решение второй системы будет решением первой. Любые две несовместные системы от одного и того же числа неизвестных по определению равносильны.

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;

Элементарные преобразования системы линейных уравнений

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;
3) перестановка двух уравнений;

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;
3) перестановка двух уравнений;
4) перестановка двух столбцов с неизвестными;

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;
3) перестановка двух уравнений;
4) перестановка двух столбцов с неизвестными;
5) вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.

Элементы поля для краткости будем называть *скалярами*.
Следующие преобразования системы линейных уравнений называются *элементарными*:

1) умножение уравнения на ненулевой скаляр;
2) прибавление одного уравнения, умноженного на скаляр, к другому;
3) перестановка двух уравнений;
4) перестановка двух столбцов с неизвестными;
5) вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$.

Уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 0$ будем называть *нулевым*.

Следующая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма

Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют ее общее решение, т.е. приводят к равносильной системе.

Обоснование метода Гаусса

Следующая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма

Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют ее общее решение, т.е. приводят к равносильной системе.

$\Downarrow$ Тот факт, что общее решение системы сохраняется преобразованиями 3–5, очевиден.

Следующая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма

Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют ее общее решение, т.е. приводят к равносильной системе.

$\Downarrow$ Тот факт, что общее решение системы сохраняется преобразованиями 3–5, очевиден.

Очевидно также, что если верное равенство умножить на любой скаляр, то оно останется верным. Поэтому решение данной системы является и решением системы, полученной из нее умножением одного из уравнений на ненулевой скаляр t.

Следующая лемма играет ключевую роль в обосновании метода Гаусса.

Лемма

Элементарные преобразования системы линейных уравнений сохраняют ее общее решение, т.е. приводят к равносильной системе.

$\Downarrow$ Тот факт, что общее решение системы сохраняется преобразованиями 3–5, очевиден.
Очевидно также, что если верное равенство умножить на любой скаляр, то оно останется верным. Поэтому решение данной системы является и решением системы, полученной из нее умножением одного из уравнений на ненулевой скаляр t. Поскольку исходная система получается из новой преобразованием такого же типа (умножением того же уравнения на скаляр t^{-1}), всякое решение новой системы является и решением исходной системы. Таким образом, преобразование 1 также не меняет множества решений системы.

Окончание доказательства леммы

Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-того уравнения, умноженного на скаляр t, к i-тому.

Окончание доказательства леммы

Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-того уравнения, умноженного на скаляр t, к i-тому. Поскольку если верное равенство умножить на любой скаляр t, то оно останется верным и сумма двух верных равенств – снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой.

Окончание доказательства леммы

Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-того уравнения, умноженного на скаляр t, к i-тому. Поскольку если верное равенство умножить на любой скаляр t, то оно останется верным и сумма двух верных равенств – снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой. Далее, старую систему можно получить из новой последовательным выполнением двух преобразований – сначала умножаем j-тое уравнение новой системы (совпадающее с j-тым уравнением старой системы!) на $-t$, затем прибавляем полученное уравнение к i-тому уравнению новой системы.

Окончание доказательства леммы

Пусть теперь новая система получена из старой прибавлением j-того уравнения, умноженного на скаляр t, к i-тому. Поскольку если верное равенство умножить на любой скаляр t, то оно останется верным и сумма двух верных равенств – снова верное равенство, всякое решение старой системы является и решением новой. Далее, старую систему можно получить из новой последовательным выполнением двух преобразований – сначала умножаем j-тое уравнение новой системы (совпадающее с j-тым уравнением старой системы!) на $-t$, затем прибавляем полученное уравнение к i-тому уравнению новой системы. В силу сказанного выше, всякое решение новой системы является и решением старой. Таким образом, и преобразование 2 не меняет множества решений системы. Лемма доказана.$\Uparrow$

Система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + \cdots + & c_{1r}x_r & + \cdots + & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & c_{22}x_2 & + \cdots + & c_{2r}x_r & + \cdots + & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & & c_{rr}x_r & + \cdots + & c_{rn}x_n & = & d_r, \end{cases} \qquad (2)$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, $\ldots$, $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*.

Система линейных уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & +\cdots+ & c_{1r}x_r & +\cdots+ & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & c_{22}x_2 & +\cdots+ & c_{2r}x_r & +\cdots+ & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & & c_{rr}x_r & +\cdots+ & c_{rn}x_n & = & d_r, \end{array}\right. \qquad (2)$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, ..., $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*. В частности, лестничная система может состоять из одного уравнения.

Система линейных уравнений вида

$$\begin{cases} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + \cdots + & c_{1r}x_r & + \cdots + & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & c_{22}x_2 & + \cdots + & c_{2r}x_r & + \cdots + & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ & & & & c_{rr}x_r & + \cdots + & c_{rn}x_n & = & d_r, \end{cases} \qquad (2)$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, $\dots$, $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*. В частности, лестничная система может состоять из одного уравнения.

Мы будем использовать этот термин также для обозначения систем вида (2), в уравнениях которых первое слагаемое содержит не обязательно неизвестное x_1, второе — не обязательно x_2 и т.д.

Система линейных уравнений вида

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl} c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & +\cdots+ & c_{1r}x_r & +\cdots+ & c_{1n}x_n & = & d_1, \\ & & c_{22}x_2 & +\cdots+ & c_{2r}x_r & +\cdots+ & c_{2n}x_n & = & d_2, \\ & & & \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ & & & & c_{rr}x_r & +\cdots+ & c_{rn}x_n & = & d_r, \end{array}\right. \qquad (2)$$

где $c_{11} \neq 0$, $c_{22} \neq 0$, $\ldots$, $c_{rr} \neq 0$, называется *лестничной*. В частности, лестничная система может состоять из одного уравнения.

Мы будем использовать этот термин также для обозначения систем вида (2), в уравнениях которых первое слагаемое содержит не обязательно неизвестное x_1, второе — не обязательно x_2 и т.д.

Например, система

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_2 & = & 1, \\ & & 2x_3 & + & x_4 & - & x_2 & = & 0, \\ & & & & x_4 & + & x_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

является лестничной.

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы.

Общее описание метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевым коэффициентом.

Общее описание метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевым коэффициентом. Тогда, при необходимости переставив уравнения, будем предполагать, что $a_{11} \neq 0$. Если $k = 1$, то система является лестничной.

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевым коэффициентом. Тогда, при необходимости переставив уравнения, будем предполагать, что $a_{11} \neq 0$. Если $k = 1$, то система является лестничной. Пусть $k > 1$. Исключим из уравнений $2, \ldots, k$ неизвестное x_1.

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевым коэффициентом. Тогда, при необходимости переставив уравнения, будем предполагать, что $a_{11} \neq 0$. Если $k = 1$, то система является лестничной. Пусть $k > 1$. Исключим из уравнений $2, \ldots, k$ неизвестное x_1. Для этого при $i = 2, \ldots, k$ и $a_{i1} \neq 0$ прибавим к i-му уравнению 1-е, умноженное на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad\qquad \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \qquad\qquad a'_{k2}x_2 + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k, \end{cases} \tag{3}$$

Метод Гаусса состоит в применении к системе элементарных преобразований с целью получения лестничной системы. Рассмотрим систему (1) сл.2.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases}$$

Будем считать, что каждое неизвестное встречается по крайней мере в одном уравнении с ненулевым коэффициентом. Тогда, при необходимости переставив уравнения, будем предполагать, что $a_{11} \neq 0$. Если $k = 1$, то система является лестничной. Пусть $k > 1$. Исключим из уравнений $2, \ldots, k$ неизвестное x_1. Для этого при $i = 2, \ldots, k$ и $a_{i1} \neq 0$ прибавим к i-му уравнению 1-е, умноженное на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$. Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \qquad\qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2; \\ \qquad\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \qquad\qquad a'_{k2}x_2 + \ldots + a'_{kn}x_n = b'_k, \end{cases} \qquad (3)$$

где $a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$, $b'_i = b_i - \dfrac{a_{i1}b_i}{a_{11}}$ $(i = 2, \ldots, k,\ j = 2, \ldots, n)$.

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения.

Окончание общего описания метода Гаусса

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1).

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения.

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля.

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля. Здесь $\ell \leq k$, $\alpha_{22} \neq 0$ и если столбцы с неизвестными переставлялись, то неизвестные перенумерованы так, что они идут по порядку.

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}x'_n = \beta_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{\ell 2}x'_2 + \ldots + \alpha_{\ell n}x'_n = \beta_\ell. \end{array} \right. \qquad (4)$$

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля. Здесь $\ell \leq k$, $\alpha_{22} \neq 0$ и если столбцы с неизвестными переставлялись, то неизвестные перенумерованы так, что они идут по порядку.

$$\left\{\begin{array}{r} \alpha_{22}x_2' + \ldots + \alpha_{2n}x_n' = \beta_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{\ell 2}x_2' + \ldots + \alpha_{\ell n}x_n' = \beta_\ell. \end{array}\right. \tag{4}$$

Если $\ell = 2$, т.е. система (4) состоит из одного уравнения, то приведение к лестничной системе закончено.

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля. Здесь $\ell \leq k$, $\alpha_{22} \neq 0$ и если столбцы с неизвестными переставлялись, то неизвестные перенумерованы так, что они идут по порядку.

$$\begin{cases} \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}x'_n = \beta_2; \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ \alpha_{\ell 2}x'_2 + \ldots + \alpha_{\ell n}x'_n = \beta_\ell. \end{cases} \tag{4}$$

Если $\ell = 2$, т.е. система (4) состоит из одного уравнения, то приведение к лестничной системе закончено. При $\ell > 2$ применим к системе (4) те же рассуждения, что и к системе (1) на сл.9, а именно исключим из $3, \ldots, \ell$ уравнений неизвестное x'_2, вычеркнем нулевые уравнения, проверим, совместна ли система.

В силу леммы сл.6 система (3) равносильна системе (1). Вычеркнем из нее все нулевые уравнения. Если полученная система содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = d$, где $d \neq 0$, то она несовместна, и вместе с ней несовместна система (1). Если после вычеркивания в системе остается более одного уравнения, то рассматриваем систему, полученную из последней системы отбрасыванием первого уравнения. В этой системе по крайней мере одно неизвестное встречается с ненулевым коэффициентом. Запишем ее, переставив уравнения и столбцы с неизвестными так, чтобы первый коэффициент был отличен от нуля. Здесь $\ell \leq k$, $\alpha_{22} \neq 0$ и если столбцы с неизвестными переставлялись, то неизвестные перенумерованы так, что они идут по порядку.

$$\left\{\begin{array}{c} \alpha_{22}x'_2 + \ldots + \alpha_{2n}x'_n = \beta_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \alpha_{\ell 2}x'_2 + \ldots + \alpha_{\ell n}x'_n = \beta_\ell. \end{array}\right. \qquad (4)$$

Если $\ell = 2$, т.е. система (4) состоит из одного уравнения, то приведение к лестничной системе закончено. При $\ell > 2$ применим к системе (4) те же рассуждения, что и к системе (1) на сл.9, а именно исключим из $3, \ldots, \ell$ уравнений неизвестное x'_2, вычеркнем нулевые уравнения, проверим, совместна ли система. Продолжая этот процесс, мы либо установим несовместность системы (1), либо приведем ее к лестничной системе.

Из рассуждений сл.9 и 10, принимая во внимание, что любая лестничная система совместна, получаем следующее утверждение.

Из рассуждений сл.9 и 10, принимая во внимание, что любая лестничная система совместна, получаем следующее утверждение.

Теорема

Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ее можно с помощью элементарных преобразований привести к лестничной системе.

Остается вопрос о том, как искать решение лестничной системы. Она решается "снизу вверх"(см. систему (2) сл.8): из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем его выражение в предпоследнее, из него выражаем x_{r-1}, и так далее.

Остается вопрос о том, как искать решение лестничной системы. Она решается "снизу вверх"(см. систему (2) сл.8): из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем его выражение в предпоследнее, из него выражаем x_{r-1}, и так далее. Рассмотрим это на примере лестничной системы:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8. \end{array}\right. \qquad (5)$$

Остается вопрос о том, как искать решение лестничной системы. Она решается "снизу вверх"(см. систему (2) сл.8): из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем его выражение в предпоследнее, из него выражаем x_{r-1}, и так далее. Рассмотрим это на примере лестничной системы:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8. \end{array}\right. \tag{5}$$

Легко понять, что если зафиксировать (*произвольным образом*) значения неизвестных x_4 и x_5, то можно подобрать (причем единственным образом) значения неизвестных x_1, x_2 и x_3 так, что набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ будет решением этой системы.

Остается вопрос о том, как искать решение лестничной системы. Она решается "снизу вверх"(см. систему (2) сл.8): из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем его выражение в предпоследнее, из него выражаем x_{r-1}, и так далее. Рассмотрим это на примере лестничной системы:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8. \end{array}\right. \tag{5}$$

Легко понять, что если зафиксировать (*произвольным образом*) значения неизвестных x_4 и x_5, то можно подобрать (причем единственным образом) значения неизвестных x_1, x_2 и x_3 так, что набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ будет решением этой системы. Ее неизвестные x_4, x_5 называются *свободными*, а неизвестные x_1, x_2, x_3 — *базисными*.

Остается вопрос о том, как искать решение лестничной системы. Она решается "снизу вверх"(см. систему (2) сл.8): из последнего уравнения выражаем x_r, подставляем его выражение в предпоследнее, из него выражаем x_{r-1}, и так далее. Рассмотрим это на примере лестничной системы:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\ & & & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8. \end{array}\right. \tag{5}$$

Легко понять, что если зафиксировать (*произвольным образом*) значения неизвестных x_4 и x_5, то можно подобрать (причем единственным образом) значения неизвестных x_1, x_2 и x_3 так, что набор $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ будет решением этой системы. Ее неизвестные x_4, x_5 называются *свободными*, а неизвестные x_1, x_2, x_3 — *базисными*. Перенося в ней свободные неизвестные в правую часть, получим систему

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 4 & - & 2x_4 & - & x_5, \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 & - & 2x_4 & + & x_5, \\ & & & & 5x_3 & = & -8 & + & 6x_4 & + & 7x_5. \end{array}\right. \tag{6}$$

Свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, а базисные неизвестные выразим через c_1 и c_2 с помощью равенств системы (6). После очевидных преобразований получим, что

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases} \tag{7}$$

Свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1$ и $x_5 = c_2$, а базисные неизвестные выразим через c_1 и c_2 с помощью равенств системы (6). После очевидных преобразований получим, что

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases} \tag{7}$$

Итак, множество всех решений системы (6) есть в точности множество всех наборов $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, удовлетворяющих равенствам (7).

Число решений лестничной системы

Поскольку свободным переменным можно придавать произвольные значения, ясно, что если при решении системы возникает хотя бы одна свободная переменная, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений.

Поскольку свободным переменным можно придавать произвольные значения, ясно, что если при решении системы возникает хотя бы одна свободная переменная, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений. С другой стороны, из приведенного выше рассмотрения системы (5) ясно, что свободные переменные появляются тогда, когда после приведения системы к лестничному виду получается система, содержащая меньше уравнений, чем неизвестных.

Поскольку свободным переменным можно придавать произвольные значения, ясно, что если при решении системы возникает хотя бы одна свободная переменная, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений. С другой стороны, из приведенного выше рассмотрения системы (5) ясно, что свободные переменные появляются тогда, когда после приведения системы к лестничному виду получается система, содержащая меньше уравнений, чем неизвестных. Если же в лестничной системе число уравнений равно числу неизвестных, то она (а значит, и любая система, которая приводится к ней элементарными преобразованиями) имеет единственное решение.

Сформулируем сделанные наблюдения в виде теоремы.

Теорема

Если в лестничной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений.

Сформулируем сделанные наблюдения в виде теоремы.

Теорема

Если в лестничной системе линейных уравнений число уравнений меньше числа неизвестных, и поле F бесконечно, то система имеет бесконечно много решений.
Если в лестничной системе число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Теорема

Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет по крайней мере одно ненулевое решение.

Метод Гаусса, дополненный исключением неизвестных в “верхних” уравнениях, называется *методом Гаусса–Жордана* или *методом последовательного полного исключения неизвестных*.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание нулевой строки.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание нулевой строки.

Преобразования 1, 2, 3 называются *элементарными преобразованиями строк матрицы*. Отметим, что преобразование 3 можно осуществить последовательным выполнением нескольких преобразований 1 и 2.

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана удобно проводить с помощью матриц над полем F, чему будут посвящены слайды ниже.

Определение

Следующие преобразования матрицы называются *элементарными*:

1) умножение строки на ненулевой скаляр;
2) прибавление одной строки, умноженной на скаляр, к другой;
3) перестановка двух строк;
4) перестановка двух столбцов;
5) вычеркивание нулевой строки.

Преобразования 1, 2, 3 называются *элементарными преобразованиями строк матрицы*. Отметим, что преобразование 3 можно осуществить последовательным выполнением нескольких преобразований 1 и 2. Очевидна аналогия элементарных преобразований матриц над полем F и элементарных преобразований систем линейных уравнений над этим полем.

Определение

Матрица называется *ступенчатой (по строкам)*, если либо все ее элементы равны нулю (матрицы, обладающие последним свойством, называются *нулевыми*), либо выполнены следующие условия:

Определение

Матрица называется *ступенчатой (по строкам)*, если либо все ее элементы равны нулю (матрицы, обладающие последним свойством, называются *нулевыми*), либо выполнены следующие условия:

1) если некоторая строка матрицы, отличная от первой, не является нулевой, то в начале этой строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей строки;
2) если некоторая строка матрицы является нулевой, то и все ее последующие строки — нулевые.

Приведем несколько примеров ступенчатых матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (0 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 0),$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Общий вид ступенчатой матрицы изображен ниже.

$$
\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & \multicolumn{1}{|c}{*} & & & & & \\
0 & \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 & \multicolumn{1}{|c}{*} & & & & \\
\multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ddots & & & \\
0 & \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 & \multicolumn{1}{|c}{*} & & \\
0 & \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 & \multicolumn{1}{|c}{*} & \\
0 & \multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0 \\
\multicolumn{9}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\
0 & \multicolumn{7}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & 0
\end{pmatrix}.
$$

Общий вид ступенчатой матрицы изображен ниже.

$$\begin{pmatrix}
0 & \ldots & 0 & * & & & & & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & * & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & * & \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & * \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 0
\end{pmatrix}.$$

Звездочками обозначены элементы, которые не должны быть равны 0. Напротив, все элементы, стоящие ниже ломаной линии, обязаны быть равны 0. Нулевых столбцов в левой части матрицы, как и нулевых строк в ее нижней части, может не быть.

Важное свойство элементарных преобразований

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.
Шаг индукции. Предположим. что для всех матриц, имеющих $m - 1$ строку, утверждение доказано.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.

Шаг индукции. Предположим. что для всех матриц, имеющих $m - 1$ строку, утверждение доказано. Выберем в матрице $A_{m \times n}$ самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.
Шаг индукции. Предположим. что для всех матриц, имеющих $m - 1$ строку, утверждение доказано. Выберем в матрице $A_{m \times n}$ самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-тым столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-тую строки.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.

Шаг индукции. Предположим. что для всех матриц, имеющих $m-1$ строку, утверждение доказано. Выберем в матрице $A_{m\times n}$ самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-тым столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-тую строки. Обозначим полученную матрицу через B. В первой строке и j-том столбце матрицы B стоит ненулевой элемент. Обозначим его через x.

Теорема

Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований строк можно привести к ступенчатому виду.

$\Downarrow$.Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Можно считать, что она содержит по крайней мере один ненулевой элемент, так как в противном случае A уже имеет ступенчатый вид. Применим индукцию по m. База индукции $m = 1$ — матрица A имеет единственную строку и имеет ступенчатый вид.

Шаг индукции. Предположим. что для всех матриц, имеющих $m - 1$ строку, утверждение доказано. Выберем в матрице $A_{m\times n}$ самый левый столбец, содержащий по крайней мере один ненулевой элемент. Пусть этот столбец имеет номер j. Далее, выберем самую верхнюю строку, на пересечении которой с j-тым столбцом стоит ненулевой элемент. Пусть эта строка имеет номер i. Если $i > 1$, поменяем местами первую и i-тую строки. Обозначим полученную матрицу через B. В первой строке и j-том столбце матрицы B стоит ненулевой элемент. Обозначим его через x. Предположим, что в j-том столбце матрицы B есть ненулевой элемент y, расположенный ниже первой строки. Пусть он стоит в k-той строке.

Окончание доказательства теоремы

Прибавим к k-той строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-той строки и j-того столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$.

Окончание доказательства теоремы

Прибавим к k-той строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-той строки и j-того столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-том столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0.

Прибавим к k-той строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-той строки и j-того столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-том столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0.
Полученную матрицу обозначим через C, а ее часть, расположенную ниже первой строки и правее j-того столбца – через C':

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \ldots & 0 & x & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cline{5-5} 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ \multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & C' \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Прибавим к k-той строке, умноженной на x, первую строку, умноженную на $-y$. В результате на пересечении k-той строки и j-того столбца будет стоять элемент $xy - yx = 0$. Таким образом можно добиться того, что в j-том столбце все элементы, расположенные ниже первой строки, будут равны 0.
Полученную матрицу обозначим через C, а ее часть, расположенную ниже первой строки и правее j-того столбца – через C':

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & \ldots & 0 & x & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ \multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & C' \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Матрица C' имеет $m-1$ строку, поэтому в силу предположения индукции ее можно привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк. Соответствующие преобразования можно выполнить и в матрице C. В результате она будет приведена к ступенчатому виду. $\Uparrow$

Пусть требуется привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Пусть требуется привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Если матрица B может быть получена из матрицы A с помощью конечного числа элементарных преобразований, то мы будем писать $A \sim B$ или $A \to B$.

Окончание примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

Окончание примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

Окончание примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Окончание примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

Окончание примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$ На первом шаге мы переставили первую и вторую строки.

Окончание примера

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. На первом шаге мы переставили первую и вторую строки. На втором — из третьей строки, умноженной на 2, вычли первую строку, а из четвертой строки, умноженной на 2, вычли первую строку, умноженную на 3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -8 & 3 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

. На первом шаге мы переставили первую и вторую строки. На втором — из третьей строки, умноженной на 2, вычли первую строку, а из четвертой строки, умноженной на 2, вычли первую строку, умноженную на 3. На третьем шаге мы переставили вторую и третью строки, а на четвертом — прибавили к четвертой строке вторую.

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & +\cdots+ & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{array}\right. \tag{8}$$

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \qquad (8)$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (8),

Определение

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{lclclcl}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\dots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\dots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\
\multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & +\dots+ & a_{kn}x_n & = & b_k.
\end{array}\right. \tag{8}$$

Матрица

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn}
\end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей* (или просто *матрицей*) *системы* (8), а матрица

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\
a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k
\end{pmatrix}$$

– *расширенной матрицей* этой системы.

Запись расширенной матрицы

В расширенной матрице системы часто отделяют ее последний столбец от остальных вертикальной чертой, т.е. записывают ее в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right).$$

В расширенной матрице системы часто отделяют ее последний столбец от остальных вертикальной чертой, т.е. записывают ее в виде

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c|}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}\right).$$

Это делается для того, чтобы подчеркнуть «особый характер» элементов последнего столбца – в нем, в отличие от всех остальных, стоят не коэффициенты при неизвестных, а свободные члены уравнений.

Итак, каждой системе линейных уравнений можно поставить в соответствие ее расширенную матрицу. Обратно, всякой матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2\,n+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & a_{k\,n+1} \end{pmatrix},$$

содержащей более одного столбца, можно поставить в соответствие систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & a_{1\,n+1}, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & a_{2\,n+1}, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \dots + & a_{kn}x_n & = & a_{k\,n+1}. \end{cases}$$

Будем говорить, что эта система *соответствует* матрице A.

Сформулируем теперь следующий алгоритм решения систем линейных уравнений («матричную версию» метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \cdots + & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{cases}$$

Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить ее к ступенчатому виду.

Сформулируем теперь следующий алгоритм решения систем линейных уравнений («матричную версию» метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & +\cdots+ & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{array}\right.$$

Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0*, а последний элемент отличен от нуля, то* (*независимо от того, является ли полученная к этому моменту матрица ступенчатой*) *преобразования прекращаются и констатируется, что система не имеет решений.*

Сформулируем теперь следующий алгоритм решения систем линейных уравнений («матричную версию» метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & +\cdots+ & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{cases}$$

Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0*, а последний элемент отличен от нуля, то* (*независимо от того, является ли полученная к этому моменту матрица ступенчатой*) *преобразования прекращаются и констатируется, что система не имеет решений. Предположим теперь, что указанная ситуация не возникнет и мы приведем нашу матрицу к ступенчатому виду. Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице.*

Сформулируем теперь следующий алгоритм решения систем линейных уравнений («матричную версию» метода Гаусса).

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + \dots + & a_{kn}x_n & = & b_k. \end{cases}$$

Запишем ее расширенную матрицу и начнем приводить ее к ступенчатому виду. Если на каком-то шаге в матрице возникнет строка, в которой все элементы, кроме последнего, равны 0, *а последний элемент отличен от нуля, то* (*независимо от того, является ли полученная к этому моменту матрица ступенчатой*) *преобразования прекращаются и констатируется, что система не имеет решений. Предположим теперь, что указанная ситуация не возникнет и мы приведем нашу матрицу к ступенчатому виду. Выпишем систему линейных уравнений, соответствующую полученной матрице. Если эта система не является лестничной, то, переставив столбцы с неизвестными, приведем ее к лестничному виду. Остается решить эту лестничную систему так, как это описано выше.*

Пример

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$
\left\{
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & - & x_5 & = & 2, \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 4, \\
x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 4x_4 & & & = & 6, \\
2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & - & x_5 & = & 3.
\end{array}
\right.
$$

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} \quad 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$

Пример

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} \phantom{x_1 +{}} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} \phantom{x_1 + {}} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim$$

Приведем пример. Запишем расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} \phantom{x_1 +{}} 2x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_5 = 3. \end{cases}$$

и приведем ее к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -4 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая последней матрице, является лестничной. Общее решение этой системы найдено на сл.12-13. Напомним, что оно имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 + \frac{11}{5}, \\ x_2 = -\frac{2}{5}c_1 + \frac{6}{5}c_2 + \frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{6}{5}c_1 + \frac{7}{5}c_2 - \frac{8}{5}, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2. \end{cases}$$

Несложно переформулировать на языке матриц и метод Гаусса–Жордана. Мы не будем делать этого в общем виде, а приведем пример.

Несложно переформулировать на языке матриц и метод Гаусса–Жордана. Мы не будем делать этого в общем виде, а приведем пример. Продолжим элементарные преобразования расширенной матрицы системы сл.43, начиная с полученной там ступенчатой матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 5 & 0 & 4 & -2 & 12 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 10 & 0 & 0 & 4 & 8 & 22 \\ 0 & 10 & 0 & 4 & -12 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -6 & -7 & -8 \end{array}\right).$$

Последняя матрица соответствует системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & 10x_2 & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{cases}$$

из которой с очевидностью вытекают равенства

Последняя матрица соответствует системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & 10x_2 & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{cases}$$

из которой с очевидностью вытекают равенства

$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{2}{5}c_1 & - & \frac{4}{5}c_2 & + & \frac{11}{5}, \\ x_2 & = & -\frac{2}{5}c_1 & + & \frac{6}{5}c_2 & + & \frac{1}{5}, \\ x_3 & = & \frac{6}{5}c_1 & + & \frac{7}{5}c_2 & - & \frac{8}{5}, \\ x_4 & = & c_1 & & & & , \\ x_5 & = & & & c_2 & & . \end{cases}$$

Последняя матрица соответствует системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 & & & + & 4x_4 & + & 8x_5 & = & 22, \\ & 10x_2 & & + & 4x_4 & - & 12x_5 & = & 2, \\ & & 5x_3 & - & 6x_4 & - & 7x_5 & = & -8, \end{cases}$$

из которой с очевидностью вытекают равенства

$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{2}{5}c_1 & - & \frac{4}{5}c_2 & + & \frac{11}{5}, \\ x_2 & = & -\frac{2}{5}c_1 & + & \frac{6}{5}c_2 & + & \frac{1}{5}, \\ x_3 & = & \frac{6}{5}c_1 & + & \frac{7}{5}c_2 & - & \frac{8}{5}, \\ x_4 & = & c_1 & & & & , \\ x_5 & = & & & c_2 & & . \end{cases}$$

Определение

В “матричной версии” метода Гаусса-Жордана приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду называется *прямым ходом*, а решение получившейся лестничной системы – *обратным ходом*.