Пусть K – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей (в частности, поле). Для записи формулы определителя матрицы $A \in K^{n\times n}$ нужны понятия перестановки и подстановки на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$.

Определения

Перестановкой множества $\{1, 2, \dots, n\}$ называется любой кортеж $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$. Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ обозначим через S_n.
Подстановкой на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ называется любая биекция этого множества на себя.

Любой подстановке φ на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$ сопоставим матрицу $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$, где $\varphi(j_m) = i_m$, $m = 1, 2, \dots, n$ и $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ – некоторая перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда и $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ будет перестановкой на этом множестве. Взяв $(j_1, j_2, \dots, j_n) = (1, 2, \dots, n)$ и заставив φ пробегать множество всех подстановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, получаем биекцию между ним и множеством S_n.

При любой перестановке столбцов в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \dots & \varphi(n) \end{pmatrix}$ подстановки φ получается матрица, определяющая указанным выше образом ту же самую подстановку φ.

Определение

Перестановка $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ получается из перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *транспозицией* символов i_p и i_q, если $j_m = i_m$ при $m \notin \{p, q\}$ и $j_p = i_q$, $j_q = i_p$. Транспозиция называется *смежной*, если $q = p + 1$.

Теорема

Все $n!$ элементов множества перестановок S_n можно расположить в виде последовательности так, что каждая последующая перестановка получается из предыдущей с помощью одной транспозиции. При этом начать можно с любой перестановки.

$\Downarrow$Используем индукцию по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что для всех $1 \leq m < n$ требуемое доказано. Запишем любую перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Применяя предположение индукции к перестановке $(i_2, \ldots, i_n)$, получим расположение $(n-1)!$ перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ с первым элементом i_1. В последней перестановке $(i_1, j_2, \ldots, j_n)$ сделаем транспозицию символов i_1 и j_2 и снова применим предположение индукции. В последней перестановке этого расположения сделаем транспозицию первого элемента с элементом, отличным от i_1. Продолжая этот процесс, за n шагов получим требуемое.$\Uparrow$

Инверсии в перестановках

Определение

Элементы i_p, i_q образуют *инверсию* в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, если $p < q$ и $i_p > i_q$. Количество инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ обозначим через $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$.

Например, $I(3, 5, 6, 1, 2, 4) = 2 + 3 + 3 = 8$.

Определение

Перестановка $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ называется *четной* [*нечетной*], если $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – четное [нечетное] число.

Теорема

Одна транспозиция меняет четность перестановки.

$\Downarrow$Утверждение теоремы очевидно для смежной транспозиции. Предположим, что в транспозиции переставляются элементы i_p и i_q, где $p < q$. Тогда эту транспозицию можно осуществить с помощью $q - p$ смежных транспозиций, переставив i_p на место q-го элемента и затем с помощью $q - p - 1$ смежных транспозиций переставить i_q на место p-го элемента. Таким образом, четность перестановки изменяется нечетное число раз.$\Uparrow$

Из теорем сл.9 и 10 получается такое

Следствие

Количество четных перестановок в множестве S_n равно количеству нечетных перестановок и равно $\dfrac{n!}{2}$.

Рассмотрим подстановку φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которой соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$. Переставляя столбцы этой матрицы, получаем матрицу $\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$. В силу теорем сл.9 и 10 сумма $I(s_1, s_2, \ldots, s_n) + I(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ сохраняет четность при любой перестановке столбцов матрицы.

Определение

Подстановка φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которой соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, называется *четной* [*нечетной*], если $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – четное [нечетное] число.

Пусть K – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей (в частности, поле), $A \in K^{n\times n}$. Перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через σ.

Формула

Определитель матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ есть элемент кольца K, равный $\sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$.

Таким образом,

Определитель матрицы порядка n представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой ее строки и каждого столбца, если перестановка σ четная, и $-a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$, если перестановка σ нечетная.

Отметим, что знак при $a_{i_1j_1} a_{i_2j_2} \ldots a_{i_nj_n}$, где $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ – подстановка, определяется четностью этой подстановки (минус если нечетная).

Для матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ положим $\delta(A) = \sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$ и проверим, что эта функция удовлетворяет аксиомам $\Delta\mathrm{I} - \Delta\mathrm{III}$ сл.2 §3 гл.I.

Проверим аксиому $\Delta\mathrm{I}$. Пусть для некоторого $j \in \{1, \dots, n-1\}$ в матрице A j-й столбец совпадает с $j+1$-м, т.е. $a_{ij} = a_{i,j+1}$ при $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим произвольное слагаемое $(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$ из правой части. Пусть $\sigma_p = j$, $\sigma_q = j+1$. Обозначим через τ перестановку, полученную из σ транспозицией σ_p и σ_q. Тогда в силу теоремы сл.4 $(-1)^{I(\sigma)} = -(-1)^{I(\tau)}$. Далее, так как $\sigma_r = \tau_r$ при $r \neq p, q$ и $a_{p\sigma_p} = a_{pj} = a_{p,j+1} = a_{q\tau_q}$ и $a_{q\sigma_q} = a_{q,j+1} = a_{qj} = a_{p\tau_p}$, т.е. произведения $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$ и $a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \dots a_{n\tau_n}$ отличаются лишь порядком множителей, имеем $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n} = a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \dots a_{n\tau_n}$.

Таким образом, слагаемые $(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$ и $(-1)^{I(\tau)} a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \dots a_{n\tau_n}$ в правой части формулы взаимно уничтожаются. Поскольку слагаемых в правой части четное число и было выбрано произвольное слагаемое, все слагаемые взаимно уничтожаются, $\delta(A) = 0$ и аксиома $\Delta\mathrm{I}$ проверена.

Окончание доказательства формулы

Проверим аксиому $\Delta\mathrm{II}$. Пусть для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ в матрице A ее j-й столбец равен сумме двух столбцов, т.е. $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ при $i = 1, \ldots, n$. Требуется доказать, что $\delta(A) = \delta(A') + \delta(A'')$, где матрицы A' и A'' получены из матрицы A заменой элементов a_{ij} на a'_{ij} и a''_{ij} соответственно при $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим произвольное слагаемое $(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n}$ из правой части формулы. Пусть $\sigma_p = j$. Тогда

$(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \ldots a_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n} = (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \ldots (a'_{p\sigma_p} + a''_{p\sigma_p}) \ldots a_{n\sigma_n} =$
$(-1)^{I(\sigma)} (a_{1\sigma_1} \ldots a'_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n} + a_{1\sigma_1} \ldots a''_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n}) =$
$(-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \ldots a'_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n} + (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \ldots a''_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n}.$

Следовательно,

$\delta(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{n\sigma_n} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \ldots a'_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n} +$
$\sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} \ldots a''_{p\sigma_p} \ldots a_{n\sigma_n} = \delta(A') + \delta(A'')$ и первая часть аксиомы $\Delta\mathrm{II}$ проверена. Вторая часть проверяется аналогично.

Аксиома $\Delta\mathrm{III}$ $(\delta(E_n) = 1)$ выполняется очевидным образом, так как в правой части формулы получается единственное ненулевое слагаемое $a_{11} a_{22} \ldots a_{nn} = 1$ и в соответствующей перестановке нет инверсий.

В силу теоремы единственности (сл.14 §3 гл.I) формула для определителя порядка n доказана.

В развернутом виде характеристический многочлен матрицы $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ имеет вид

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-x \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Вспоминая определение определителя порядка n (сл.12), получаем:

$$\chi_A(x) = |A| + \ldots + (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn})x^{n-1} + (-1)^n x^n,$$

поскольку $\chi_A(0) = |A|$ и члены, содержащие x^n, x^{n-1}, могут получиться только из произведения $(\alpha_{11} - x)(\alpha_{22} - x)\ldots(\alpha_{nn} - x)$.

Важное обозначение

Для матрицы $A = (a_{ij}) \in F^{n\times n}$ обозначим через $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ определитель $\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix}$ порядка k, составленный из элементов матрицы A.

Здесь индексы $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ и $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$, они не обязательно различны и не обязательно идут в порядке возрастания.

В частности, при $k > n$ всегда $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix} = 0.$

Определение

При $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ и $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$ определитель $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ j_1 & j_2 & \dots & j_k \end{pmatrix}$ называется *минором* порядка k матрицы A.

Таким образом, минор порядка k – это определитель квадратной подматрицы порядка k матрицы A.

Предложение

Коэффициент при x^{n-k} в характеристическом многочлене $\chi_A(x)$ матрицы A равен сумме миноров $(-1)^{n-k}\sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$.

$\Downarrow$Обозначим $(b_{ij})_{n\times n} = A - xE_n$, т.е. $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i\neq j; \\ a_{ii} - x, i = j. \end{cases}$ Тогда $\chi_A(x) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)} b_{1\sigma_1}b_{2\sigma_2}\dots b_{n\sigma_n}$. Коэффициент при x^{n-k} получается следующим образом. Зафиксируем индексы $1\leq j_1<\dots<j_{n-k}\leq n$. Выберем в определителе (1) строки и столбцы с одинаковыми номерами $j_1,\dots,j_{n-k}$. Тогда x^{n-k} получается из произведений $b_{1\sigma_1}b_{2\sigma_2}\dots b_{n\sigma_n}$ для всех $\sigma\in S_n$ таких что $\sigma_{j_m} = j_m$ при всех $m = 1,\dots,n-k$, при этом из разности $a_{j_m j_m} - x$ берется слагаемое $-x$. Индексы $1\leq i_1<\dots<i_k\leq n$ из множества $\{1,\dots,n\}\backslash\{j_1,\dots,j_{n-k}\}$ образуют в такой перестановке σ перестановку $\overline{\sigma} = (\sigma_{i_1},\dots,\sigma_{i_k})$. Покажем. что $(-1)^{I(\sigma)} = (-1)^{I(\overline{\sigma})}$. Для этого убедимся. что подстановки $S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$ и $\overline{S} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \sigma_{i_1} & \sigma_{i_2} & \dots & \sigma_{i_k} \end{pmatrix}$ имеют одинаковую четность. Переставим в S столбцы так, чтобы $S = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{n-k} & i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_{n-k} & \sigma_{i_1} & \dots & \sigma_{i_k} \end{pmatrix}$; каждое число j_r образует одно и

то же число инверсий в 1-й строке и во 2-й строке, так как $\{i_1, \dots, i_k\} = \{\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k}\}$. Поэтому сумма числа инверсий в 1-й и 2-й строках S превосходит сумму числа инверсий в 1-й и 2-й строках $\overline{S}$ на четное число.

Положим $T(j_1, \dots, j_{n-k}) = \{\sigma \in S_n | \sigma_{j_m} = j_m,\ m = 1, \dots, n-k\}$ и рассмотрим сумму $S(j_1, \dots, j_{n-k})$ всех слагаемых из определителя (1), содержащих в качестве множителей элементы $a_{j_m j_m} - x$ $(m = 1, \dots, n-k)$. Тогда

$S(j_1, \dots, j_{n-k}) = \sum_{\tau \in T(j_1, \dots, j_{n-k})} (-1)^{I(\tau)} b_{1\tau_1} b_{2\tau_2} \cdots b_{n\tau_n} =$
$= \prod_{m=1}^{n-k} (a_{j_m j_m} - x) \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{I(\tau)} a_{i_1 \tau_{i_1}} \cdots a_{i_k \tau_{i_k}} =$
$\prod_{m=1}^{n-k} (a_{j_m j_m} - x) \cdot A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$, так как $\{(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_k}) | \tau \in T(j_1, \dots, j_{n-k})\} = S_k$ (все перестановки на множестве $\{i_1, \dots, i_k\}$) и $(-1)^{I(\tau)} = (-1)^{I(\tau_{i_1}, \dots, \tau_{i_k})}$. Поэтому получается минор $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$.

Следовательно, в определителе (1) коэффициент при x^{n-k} равен коэффициенту при x^{n-k} в сумме $\displaystyle\sum_{1 \le j_1 < \dots < j_{n-k} \le n} S(j_1, \dots, j_{n-k})$, который равен $(-1)^{n-k} \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$. $\Uparrow$

Вычислить характеристический многочлен матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

и найти его корни.

$$\chi_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 4 \\ 4 & -7-x & 8 \\ 6 & -7 & 7-x \end{vmatrix} =$$

$$(1-x)\begin{vmatrix} -7-x & 8 \\ -7 & 7-x \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-x \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & -7-x \\ 6 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)(x^2 - 49 + 56) + 3(28 - 4x - 48) + 4(-28 + 42 + 6x) =$$

$$= (1-x)(x^2 + 7) + 3(-20 - 4x) + 4(14 + 6x) =$$

$$= x^2 + 7 - x^3 - 7x - 60 - 12x + 56 + 24x = -x^3 + x^2 + 5x + 3;$$

	-1	1	5	3
3	-1	-2	-1	0

$$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x-3)(-x^2 - 2x - 1),\ x_1 = 3,\ x_{2,3} = -1.$$

Вычислить характеристический многочлен матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8 & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8 & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ и найти его корни.

$$\chi_A(x) = \det(A - xE_4) = \begin{vmatrix} 4-x & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -8-x & 5 & 4 \\ 6 & -12 & 8-x & 5 \\ 1 & -3 & 2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 & x \\ 5 & -8-x & 5 & 4 \\ 2 & 0 & -x & 4x-3 \\ 1 & -3 & 2 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$= -(8+x)\begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 1 & 2 & 2-x \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & -x & 4x-3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ -8-x & -16-2x & (x-2)(x+8) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 15 & 15 & 12 \end{vmatrix} =$$

Окончание примера 2

$$= \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 7-x & -1-2x & x^2+6x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 4 & -2x & x^2+5x-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 0 & 0 & x^2-3x+2 \end{vmatrix} = (x^2-3x+2) \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2-3x+2)^2 = (x-1)^2(x-2)^2.$$

Корни $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, кратности 2.

Теорема

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все корни характеристического многочлена $\chi_A(x)$ с учетом кратности. Тогда $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_n)$ – все корни характеристического многочлена $\chi_{g(A)}(x)$ с учетом кратности.

$\Downarrow$Пусть $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{j=1}^n (x-\lambda_j)$, $g(x) = a_0 \prod_{\ell=1}^m (x-\mu_\ell)$. Покажем, что $|g(A)| = \displaystyle\prod_{j=1}^n g(\lambda_j)$. Имеем $g(A) = a_0 \displaystyle\prod_{\ell=1}^m (A-\mu_\ell E_n)$. Перейдем к определителям: $|g(A)| = \left| a_0 \displaystyle\prod_{\ell=1}^m (A-\mu_\ell E_n)\right| = a_0^n \displaystyle\prod_{\ell=1}^m |A-\mu_\ell E_n| =$

$$= a_0^n \prod_{\ell=1}^m \chi_A(\mu_\ell) = (-1)^{mn} a_0^n \prod_{\ell=1}^m \prod_{j=1}^n (\mu_\ell - \lambda_j) = \prod_{j=1}^n a_0 \prod_{\ell=1}^m (\lambda_j - \mu_\ell) =$$

$= \displaystyle\prod_{j=1}^n g(\lambda_j)$. В полученную формулу $|g(A)| = \displaystyle\prod_{j=1}^n g(\lambda_j)$ подставим вместо многочлена $g(x)$ многочлен $g(x)-y$: $|g(A)-yE_n| = \prod_{j=1}^n (g(\lambda_j)-y)$.

Заменив y на x, получаем $\chi_{g(A)}(x) = \displaystyle\prod_{j=1}^n (g(\lambda_j)-x)$.$\Uparrow$

Зафиксируем матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Положим $\varphi_A(x) = (-1)^n \chi_A(x)$. Тогда $\varphi_A(x) = |xE_n - A| = x^n - p_1x^{n-1} - p_2x^{n-2} - \ldots - p_{n-1}x - p_n$. При $x = 0$ имеем $|-A| = -p_n$, откуда $p_n = (-1)^{n-1}|A|$.

Через $B(x)$ обозначим присоединенную к матрице $xE_n - A$. Как и в доказательстве теоремы Гамильтона-Кэли, запишем $B(x) = x^{n-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + \ldots + x^1B_{n-2} + B_{n-1}$, где $B_j \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Метод Д.К.Фаддеева предназначен для одновременного определения скалярных коэффициентов $p_1, \ldots, p_n$ многочлена $\varphi_A(x)$ и матричных коэффициентов $B_1, \ldots, B_{n-1}$ присоединенной x-матрицы $B(x)$ к матрице $xE_n - A$.

Описание алгоритма

$A_1 = A, p_1 = \text{tr}(A_1), B_1 = A_1 - p_1E_n$

$A_2 = A \cdot B_1, p_2 = \dfrac{1}{2}\text{tr}(A_2), B_2 = A_2 - p_2E_n$

....

$A_{n-1} = A \cdot B_{n-2}, p_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}\text{tr}(A_{n-1}), B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1}E_n$

$A_n = A \cdot B_{n-1}, p_n = \dfrac{1}{n}\text{tr}(A_n), B_n = A_n - p_nE_n = O.$

Сначала выясним связи между скалярами $p_1, \dots, p_n$ и матрицами $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$. По свойству присоединенной матрицы $(xE_n - A) \cdot (x^{n-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + \ldots + B_{n-1}) = (x^n - p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_{n-1}x - p_n)E_n$. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получаем $B_0 = E_n$, $B_1 - A = -p_1 E_n$, $B_2 - A \cdot B_1 = -p_2 E_n, \ldots$, $B_{n-1} - A \cdot B_{n-2} = -p_{n-1}E_n$, $-A \cdot B_{n-1} = -p_n E_n$. Таким образом, для матриц B_j имеем соотношения, указанные в алгоритме: $B_0 = E_n$, $B_k = A \cdot B_{k-1} - p_k E_n$ $(k = 1, \dots, n-1)$ и $A \cdot B_{n-1} = p_n E_n$, откуда следует $B_n = A_n - p_n E_n = O$. Если $|A| \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{p_n} B_{n-1}$, так как $p_n = (-1)^{n-1}|A| \neq 0$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все корни характеристического многочлена $\chi_A(x)$ с учетом кратности. В силу обобщенной теоремы Виета $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = -\mathrm{tr}(A)$. Многочлен $\varphi_A(x) = |xE_n - A|$ имеет те же корни, значит, $p_1 = \mathrm{tr}(A)$. Согласно теореме сл.8 для натурального числа m имеем $\varphi_{A^m}(x) = (x - \lambda_1^m) \ldots (x - \lambda_n^m)$, так как $\varphi_{A^m}(x) = (-1)^n \chi_{A^m}(x)$. Поэтому $\mathrm{tr}(A^m) = \lambda_1^m + \ldots + \lambda_n^m = S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Для краткости обозначим $S_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ через S_m. Согласно обобщенной теореме Виета, примененной к многочлену $\varphi_A(x)$, заключаем, что $p_m = (-1)^{m-1} s_m(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Окончание обоснования алгоритма

Двигаясь по формулам алгоритма сверху вниз, получаем
$A_2 = A(A - p_1E_n) = A^2 - p_1A$,
$A_3 = A^3 - p_1A^2 - p_2A, \ldots$,
$A_m = A^m - p_1A^{m-1} - \ldots - p_{m-1}A \ (4 \leq m \leq n)$.
Таким образом, $\mathrm{tr}(A_m) = \mathrm{tr}(A^m) - p_1\mathrm{tr}(A^{m-1}) - \ldots - p_{m-1}\mathrm{tr}(A) =$
$S_m - s_1S_{m-1} + s_2S_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}s_{m-1}S_1$. Согласно предложению сл.13 §7 (формула Ньютона для $m \leq n$) имеем
$S_m - s_1S_{m-1} + s_2S_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1}s_{m-1}S_1 = (1)^{m-1}ms_m = mp_m$.
Следовательно, $p_m = \dfrac{1}{m}\mathrm{tr}(A_m)$. Обоснование алгоритма закончено.

Если $A \in F^{n\times n}$ для некоторого числового поля F, то метод Д.К.Фаддеева можно применять, так как любое числовое поле содержится в поле $\mathbb{C}$, а все вычисления метода производятся в поле F.

Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ p_1 = \mathrm{tr}(A) = 4,$$

$$B_1 = A - 4E_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = A \cdot B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ p_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_2) = -2,$$

$$B_2 = A_2 + 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = A \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \ p_3 = \frac{1}{3}\mathsf{tr}(A_3) = -5,$$

$$B_3 = A_3 + 5E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = A \cdot B_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ p_4 = \frac{1}{4}\mathsf{tr}(A_3) = -2,$$

$$B_4 = A_4 + 2E_4 = O;$$

$$\chi_A(x) = \varphi_A(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x + 2, \ |A| = 2, \ A^{-1} = \frac{1}{p_4}B_3.$$