Глава II. Комплексные числа

§ 2. Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Множество F называется *полем*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\forall a, b \in F \exists! c \in F$ $(c = a + b$ – *сумма* a и $b)$;
2) $\forall a, b \in F \exists! d \in F$ $(d = a \cdot b$ – *произведение* a и $b)$;
3) $\forall a, b \in F \;\; a + b = b + a$; *коммутативность сложения*
4) $\forall a, b \in F \;\; a \cdot b = b \cdot a$;
5) $\forall a, b, c \in F \;\; (a + b) + c = a + (b + c)$; *ассоциативность сложения*
6) $\forall a, b, c \in F \;\; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
7) $\exists 0 \in F : \forall a \in F \;\; a + 0 = a$; *нулевой элемент*
8) $\exists 1 \in F : \forall a \in F \;\; (a \cdot 1 = a) \wedge (1 \neq 0)$; *единичный элемент*
9) $\forall a \in F \exists b \in F : a + b = 0$; *противоположный элемент*
10) $\forall a \in F (a \neq 0 \Rightarrow \exists b \in F : a \cdot b = 1)$; *обратный элемент*
11) $\forall a, b, c \in F \;\; (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. *дистрибутивность*

Примерами полей являются множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно всех рациональных и всех действительных чисел относительно обычных операций сложения и умножения.
В любом поле выполняются все формулы сокращенного умножения, в частности, биномиальная формула Ньютона.

Определение

Элементы множества $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ называются *комплексными числами*.

Напомним, что если $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$, то $(a,b) = (c,d) \iff a = c$ и $b = d$.

На множестве $\mathbb{C}$ вводятся операции сложения и умножения по правилам

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d);\ (a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Теорема

Относительно введенных операций сложения и умножения множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является полем.

$\Downarrow$Положим $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ и рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow C$, определенное так: $\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Очевидно, что φ является взаимно-однозначным отображением или биекцией $\mathbb{C}$ на множество матриц C.

Продолжение доказательства

Ясно, что $\varphi((a,b)+(c,d)) = \varphi(a,b)+\varphi(c,d)$. Вычислим $\varphi(a,b)\cdot\varphi(c,d) =$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -bc-ad & -bd+ac \end{pmatrix} = \varphi((a,b)\cdot(c,d)).$$
Следовательно, множество матриц C замкнуто относительно операций сложения и умножения матриц. Кроме того, операции сложения и умножения матриц на множестве C и операции сложения и умножения комплексных чисел обладают одинаковыми свойствами благодаря наличию биекции φ, сохраняющей эти операции. Поэтому достаточно убедиться, что множество матриц C является полем относительно операций сложения и умножения над матрицами из $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
Множество матриц $\mathbb{R}^{2\times 2}$ удовлетворяет всем аксиомам из определения поля, кроме 4 и 10. Поэтому множество матриц C удовлетворяет тем аксиомам, которые используют только кванторы всеобщности, а именно, 1, 2 (закнутость относительно операций) и 3, 5, 6, 11. Остается проверить аксиомы 4 и 7-10.
Аксиомы 7 и 8 обеспечиваются тем. что $O_{2\times 2}, E_2 \in C$. Из утверждения $\forall A(A \in C \Rightarrow -A \in C)$ следует аксиома 9.
Проверим коммутативность умножения (аксиома 4). Для этого вычислим
$$\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca-db & cb+da \\ -da-cb & -db+ca \end{pmatrix}.$$ Сравнив с произведением $\varphi(a,b)\cdot\varphi(c,d)$, вычисленным выше, получаем требуемое.

Осталось проверить аксиому 10: что каждый ненулевой элемент множества C имеет обратный в C. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq O_{2\times 2}$, т.е. $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогда $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$ и матрица A является обратимой согласно теореме сл.8 §5 гл.I. По формуле сл.7 §5 гл.I имеем $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in C$. Таким образом, если $(a,b) \neq (0,0)$, то $(a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Определение

Биекция одного поля на другое, сохраняющая операции, называется *изоморфизмом*.

Комплексные числа вида $(a, 0)$ ведут себя относительно операций сложения и умножения как действительные числа:

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0), (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0).$$

Следовательно, имеется изоморфизм $a \mapsto (a, 0)$ поля действительных чисел на подполе $\{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$ поля комплексных чисел. Поэтому комплексное число $(a, 0)$ отождествляют с действительным числом a. Таким образом, выполняется включение $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Положим $i = (0, 1)$. Тогда $(b, 0)i = (0, b)$ и $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.
Каждый элемент поля $\mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $(a, b) = (a, 0) + (b, 0)i$. Комплексное число (a, b) принято записывать в виде $a + bi$, где $i^2 = -1$.

Определения

Алгебраической формой комплексного числа называется его запись в виде $a + bi$. Комплексное число i называется *мнимой единицей*.
Действительное число a называется *действительной частью* числа $a + bi$, а действительное число b — *мнимой частью* числа $a + bi$.

Алгебраическая форма записи комплексных чисел (2)

Очевидно следующее

Наблюдение

Комплексные числа $a + bi$ и $c + di$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$, т.е. комплексные числа в алгебраической форме равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и мнимые части.

Заметим, что

$$(a + bi) + (c + di) = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + (b + d)i,$$
$$(a + bi)(c + di) = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Иными словами,

сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с «неизвестным» i, при умножении дополнительно учитывается, что $i^2 = -1$.

В частности, $a(c + di) = ac + adi$ для любых $a, c, d \in \mathbb{R}$.
Пример: $(3 - 4i)(5 + 6i) = 15 - 20i + 18i - 24i^2 = 39 - 2i$.

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается через $\overline{x}$.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) x — действительное число тогда и только тогда, когда $\overline{x} = x$;
2) $x + \overline{x}$ — действительное число;
3) $x \cdot \overline{x}$ — действительное число; более того, $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, причем $x \cdot \overline{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
4) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
5) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

В частности, отображение $z \longmapsto \overline{z}$ является изоморфизмом поля комплексных чисел на себя (так называемым *автоморфизмом* поля комплексных чисел).

Комплексное сопряжение (2)

$\Downarrow$Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 вытекают из того, что, как легко проверить, если $x = a + bi$, то $x + \overline{x} = 2a$ и $x \cdot \overline{x} = a^2 + b^2$. Свойство 4 проверяется простыми вычислениями. Для доказательства свойства 5 запишем $x = a + bi$, $y = c + di$ и вычислим
$\overline{x} \cdot \overline{y} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i$,
$\overline{x \cdot y} = \overline{ac - bd + (ad + bc)i} = ac - bd - (ad + bc)i = \overline{x} \cdot \overline{y}$.$\Uparrow$

Свойство 3 можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа вида $\dfrac{a + bi}{c + di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, имеем

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

Например, $\dfrac{4-i}{1+2i} = \dfrac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{4-i-8i+2i^2}{1-4i^2} = \dfrac{2-9i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{9}{5}i.$

Комплексные числа не упорядочиваемы согласованно с операциями сложения и умножения

Предложение

На поле $\mathbb{C}$ не существует бинарного отношения $>$ со свойствами

- если $z \in \mathbb{C}$, то выполняется в точности одно из условий $z > 0$, $z = 0$ или $z < 0$;
- если $u, v \in \mathbb{C}$, то из $u > 0$ и $v > 0$ следует $u + v > 0$ и $uv > 0$.

$\Downarrow$От противного, для $z \in \mathbb{C}$ из $z \neq 0$ следует либо $z > 0$, либо $z < 0$. В обоих случаях $z^2 > 0$, так как $z^2 = zz = (-z)(-z)$. Следовательно, $i^2 > 0$ и, так как $1 = 1^2 > 0$, $0 = i^2 + 1 > 0$ – противоречие.$\Uparrow$

Таким образом, в отличие от поля действительных чисел, на поле комплексных чисел нельзя определить отношение порядка, согласованное с операциями сложения и умножения.

Извлечение квадратного корня из комплексного числа, записанного в алгебраической форме

Как найти квадратный корень из комплексного числа, показывает следующее.

Предложение

Для любого комплексного числа $u \neq 0$ существуют два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.

$\Downarrow$Пусть $u = a + bi$, $z = x + yi$, где $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a, \\ 2xy & = & b. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим два случая.
1. $b = 0$, т.е. $u = a \in \mathbb{R}$. Тогда из второго уравнения системы (1) следует $x = 0$ или $y = 0$. При $a > 0$ имеем $y = 0$ и $x^2 = a$, откуда $x = \pm\sqrt{a}$. Это обычное извлечение корня из положительного действительного числа. При $a < 0$ имеем $x = 0$ и $-y^2 = a$, откуда $y = \pm\sqrt{-a}$ и $z = \pm i\sqrt{-a}$. Так извлекается корень из отрицательного действительного числа.

Окончание доказательства

2. $b \neq 0$. Тогда $x, y \neq 0$. Возведем обе части каждого из уравнений системы (1) в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, так как x, y – действительные числа. Прибавляя и вычитая к этому уравнению первое уравнение системы (1), получаем $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$. Следовательно,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Так как $xy = \dfrac{b}{2}$, по знаку x знак y определяется однозначно и мы получаем два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.$\Uparrow$

Для комплексного числа u обозначение $\sqrt{u}$ применяется для множества из всех решений уравнения $z^2 = u$.

Таким образом, любое квадратное уравнение с комплексными коэффициентами всегда имеет комплексный корень, поскольку формула для корней квадратного уравнения выводится так же, как в случае поля $\mathbb{R}$,.