Отношения линейного порядка

Определения

Отношением линейного порядка на множестве X называется отношение частичного порядка σ, удовлетворяющее следующему дополнительному условию: для любых $x, y \in X$ имеет место либо $x\sigma y$, либо $y\sigma x$.
Последнее условие для бинарного отношения называется *линейностью*.
Множество с зафиксированным на нем отношением линейного порядка называется *линейно упорядоченным множеством*.

Примеры.
1. Естественное отношение порядка $\leq$ на каждом из множеств чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ является отношением линейного порядка.
2. Для любого множества X отношение включения $\subseteq$ на булеане $\mathcal{B}(X)$ является отношением линейного порядка тогда и только тогда, когда X — либо пустое, либо одноэлементное множество.
3. Пусть $(X, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, $n \in \mathbb{N}$. На множестве X^n определим отношение *лексикографического порядка* $\preceq$: $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$, если либо $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, либо $x_1 < y_1$, либо существует натуральное число k, такое что $1 \leq k < n$, $x_i = y_i$ для $i = 1, \ldots, k$ и $x_{k+1} < y_{k+1}$.
Легко проверить, что это отношение является рефлексивным, антисимметричным и линейным.

Убедимся, что оно транзитивно. Пусть $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \preceq (z_1, \ldots, z_n)$ и оба неравенства строгие, так как иначе доказывать нечего. Тогда $x_1 \leq y_1 \leq z_1$ и если по крайней мере одно из этих неравенств строгое, то $x_1 < z_1$ и $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (z_1, \ldots, z_n)$. Предположим, что $x_1 = y_1 = z_1$. Тогда существуют числа $1 < i, j < n$ такие, что $x_1 = y_1$,...,$x_i = y_i$, $x_{i+1} < y_{i+1}$ и $y_1 = z_1$,...,$y_j = z_j$, $y_{j+1} < z_{j+1}$. Пусть k – наименьшее из чисел i, j. Тогда $x_1 = z_1$,...,$x_k = z_k$, $x_{k+1} < z_{k+1}$ и $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (z_1, \ldots, z_n)$, что и требуется доказать.

Определения

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $M \subseteq X$ — его непустое подмножество.
Элемент m называется *максимальным* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ из $m \leq x$ следует $x = m$.
Элемент m называется *минимальным* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ из $x \leq m$ следует $x = m$.

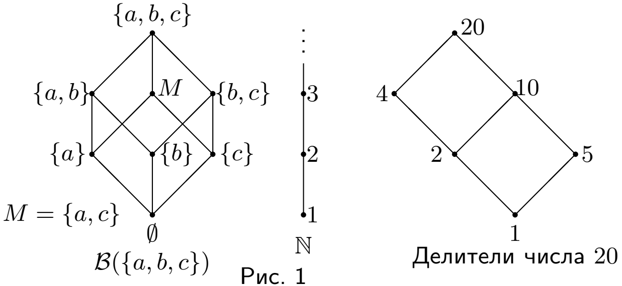

Рис. 1

Некоторые частично упорядоченные множества можно изображать диаграммами. Элементы множеств изображаются точками. Если элементы x, y частично упорядоченного множества (X, σ) таковы, что $x\sigma y$ и для любого $z \in X$ из $x\sigma z\sigma y$ следует $z = x$ или $z = y$, то x и y соединяются отрезком прямой.

Наибольшие и наименьшие элементы

Определения

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $M \subseteq X$ — его непустое подмножество.
Элемент m называется *наибольшим* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $x \leq m$.
Элемент m называется *наименьшим* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $m \leq x$.

Легко проверить, что наибольший (соотв. наименьший) элемент любого непустого подмножества частично упорядоченного множества единствен.
Верно ли это для максимальных и минимальных элементов?
Также ясно, что наибольший элемент является максимальным, а наименьший элемент — минимальным. Верно ли обратное?

Глава III. Основные понятия

§ 3. Алгебраические операции

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть X — непустое множество.

Определение

Бинарной алгебраической операцией на множестве X называется отображение из декартова квадрата $X \times X$ в X.

Отображение $f : X \times X \longrightarrow X$ является алгебраической операцией. Вместо $z = f(x, y)$ принято писать $z = x\, f\, y$, а вместо f используются символы $\circ$, $*$ и т.п.

Примеры алгебраических операций.

1. Операция сложения на множестве чисел $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.
2. Операция умножения на множестве чисел $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.
3. Операция сложения векторов на множестве всех геометрических векторов.
4. Операция сложения матриц на множестве всех матриц размеров $k \times n$.
5. Операция умножения матриц на множестве всех квадратных матриц размеров $n \times n$.

6. Операция умножения на множестве всех отображений из множества X в множество X.

7. Операция умножения на множестве всех бинарных отношений на множестве X.

8. Операция сложения по модулю n на множестве целых чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$: $x +_n y = z$, где z — остаток от деления на n числа $x + y$.

9. Операция умножения по модулю n на множестве целых чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$: $x \cdot_n y = z$, где z — остаток от деления на n числа $x \cdot y$.

10. Операция $\bullet$ на множестве $\{a, b, c, d\}$, заданная таблицей Кэли

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Здесь первый аргумент берется в левом столбце, а второй - в первой строке, и на пересечении строки и столбца указан результат. Например, $b \bullet c = d$.

Артур Кэли (1821-1895) - английский математик.

Основные свойства операций

Пусть $\circ$ — бинарная алгебраическая операция на множестве X.

Определения

1. Операция $\circ$ называется *коммутативной*, если $\forall x, y \in X \;\; x \circ y = y \circ x$.
2. Операция $\circ$ называется *ассоциативной*, если $\forall x, y, z \in X \;\; (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
3. Элемент $e \in X$ называется *нейтральным* относительно операции $\circ$, если $\forall x \in X \;\; x \circ e = e \circ x = x$.
4. Пусть e — нейтральный элемент относительно операции $\circ$. Элемент $y \in X$ называется *симметричным* к элементу $x \in X$, если $x \circ y = y \circ x = e$.

Проверка свойств бинарных операций на конечных множествах, заданных таблицами Кэли

Пусть на конечном множестве $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ бинарная операция $\circ$ задана с помощью таблицы Кэли. Проверка коммутативности не представляет труда: таблица Кэли должна быть симметрична относительно ее "главной диагонали".

Чтобы проверить, будет ли эта операция ассоциативной, для каждого элемента x множества X строятся таблицы Кэли двух вспомогательных операций: $y *_x z = (y \circ x) \circ z$ и $y \star_x z = y \circ (x \circ z)$. Если таблицы Кэли этих операций совпадают при любом x из X, то операция $\circ$ будет ассоциативной.

Для построения таблицы Кэли операции $*_x$ нужно записать по порядку строки из исходной таблицы Кэли, соответствующие элементам $x_1 \circ x, \ldots, x_n \circ x$. Для построения таблицы Кэли операции $\star_x$ нужно записать по порядку столбцы из исходной таблицы Кэли, соответствующие элементам $x \circ x_1, \ldots, x \circ x_n$. Для проверки ассоциативности достаточно построить таблицы Кэли операций $*_x$ и проверить, является ли каждая из них таблицей Кэли для соответствующей операции $\star_x$.

Нейтральный элемент обнаруживается без труда: строка в его продолжении совпадает с заглавной строкой таблицы, а столбец - с самым левым столбцом. Легко также определить, есть ли у данного элемента симметричный к нему элемент.

Пример

Проверим, что операция 10 на сл.3 ассоциативна. Для этого построим таблицы Кэли для операций $*_x$ и $\star_x$ для $x \in \{a, b, c, d\}$.

$*_d$	a	b	c	d
$(a \bullet d)a$	d	a	b	c
$(b \bullet d)b$	a	b	c	d
$(c \bullet d)c$	b	c	d	a
$(d \bullet d)d$	c	d	a	b

$\star_d$	$(d \bullet a)a$	$(d \bullet b)b$	$(d \bullet c)c$	$(d \bullet d)d$
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

$*_a$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$*_b$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$*_c$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$\star_a$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\star_b$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$\star_c$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

Мы видим, что во всех случаях таблицы Кэли операций $*_x$ и $\star_x$ совпадают. Следовательно, операция $\bullet$ ассоциативна.

Примеры

Операции 1–4 со слайда 2 и 8–10 со слайда 3 являются коммутативными.

Все операции 1–10 являются ассоциативными.

Операция сложения на множестве $\mathbb{N}$ не имеет нейтрального элемента, на остальных множествах чисел нейтральный элемент — 0.
Для умножения на всех множествах чисел нейтральный элемент — 1.
Для сложения векторов нейтральный элемент $\vec{0}$, для сложения матриц – нулевая матрица, для умножения матриц – единичная матрица, для умножения отображений и бинарных отношений на множестве X — отношение равенства $\triangle_X$ (определение см на сл.9 §2).
Для операции 10 нейтральным элементом будет a.

Для операции сложения на множествах $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ каждый элемент обладает симметричным.
Для операции умножения на множестве $\mathbb{N}$ симметричным обладает только 1, на множестве $\mathbb{Z}$ — только $-1, 1$, на множествах $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — каждое ненулевое число.
Каждый вектор обладает симметричным относительно операции сложения векторов.
Каждая матрица обладает симметричной относительно операции сложения матриц.

Примеры-2

Симметричными элементами относительно умножения матриц обладают обратимые матрицы и только они.

Биекции и только они обладают симметричными элементами относительно операций умножения отображений и бинарных отношений.

Для операции 10 элементы a и c являются симметричными к самим себе, d является симметричным к b.