Теорема

Пусть X, Y, Z – множества, α – соответствие из X в Y, β – соответствие из Y в Z. Если α и β являются функциональными [соотв. инъективными, сюръективными, всюду определенными] соответствиями, то и их произведение $\alpha \circ \beta$ будет функциональным [соотв. инъективным, сюръективным, всюду определенным] соответствием.

$\Downarrow$Пусть α и β – функциональные соответствия. Предположим, что для некоторых $x \in X$ и $z, z' \in Z$ имеет место $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $(x, z') \in \alpha \circ \beta$. Тогда существуют $y, y' \in Y$: $(x, y) \in \alpha$, $(y, z) \in \beta$, $(x, y') \in \alpha$, $(y', z') \in \beta$. Из функциональности α и $(x, y) \in \alpha$, $(x, y') \in \alpha$ следует $y = y'$. Так как β – функциональное соответствие, из $(y, z) \in \beta$ и $(y', z') \in \beta$ следует $z = z'$. Мы доказали, что $\alpha \circ \beta$ – функциональное соответствие.

Пусть α и β – инъективные соответствия. Предположим, что для некоторых $x, x' \in X$ и $z \in Z$ имеет место $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $(x', z) \in \alpha \circ \beta$. Тогда существуют $y, y' \in Y$: $(x, y) \in \alpha$, $(y, z) \in \beta$, $(x', y') \in \alpha$, $(y', z) \in \beta$. Так как β – инъективное соответствие, из $(y, z) \in \beta$ и $(y', z) \in \beta$ следует $y = y'$. Из инъективности α и $(x, y) \in \alpha$, $(x', y') \in \alpha$ теперь следует $x = x'$. Таким образом, $\alpha \circ \beta$ – инъективное соответствие.

Окончание доказательства теоремы и следствия

Пусть α и β – сюръективные соответствия. Зафиксируем произвольный элемент $z \in Z$. Для него существует элемент $y \in Y$ такой что $(y, z) \in \beta$. Для этого элемента y существует $x \in X$: $(x, y) \in \alpha$. Следовательно, $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $\alpha \circ \beta$ – сюръективное соответствие.

Пусть α и β – всюду определенные соответствия. Зафиксируем произвольный элемент $x \in X$. Для него существует элемент $y \in Y$ такой что $(x, y) \in \alpha$. Для этого элемента y существует $z \in Z$: $(y, z) \in \beta$. Следовательно, $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $\alpha \circ \beta$ – всюду определенное соответствие.$\Uparrow$

Следствие 1

Произведение отображений является отображением.

Обозначать произведение γ отображения $\alpha : X \longrightarrow Y$ на $\beta : Y \longrightarrow Z$ будем через $\beta \bullet \alpha$, так как $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ для любого $x \in X$.

Следствие 2

Если $\alpha : X \longrightarrow Y$ и $\beta : Y \longrightarrow Z$ являются инъективными [сюръективными, биективными] отображениями, то их произведение $\beta \bullet \alpha$ будет инъективным [сюръективным, биективным] отображением.

Глава III. Основные понятия

§ 2. Бинарные отношения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть X — непустое множество.

Определение

Бинарным отношением на множестве X называется соответствие из множества X в X, т.е. всякое подмножество декартова квадрата X^2.

Пусть $\alpha \subseteq X^2$. Вместо $(x, y) \in \alpha$ обычно пишут $x\alpha y$ и говорят "элемент x находится в отношении α с элементом y".

Определения

1. Если для любого $x \in X$ имеет место $x\alpha x$, то отношение α называется *рефлексивным*.
2. Если для любых $x, y \in X$ из $x\alpha y$ следует $y\alpha x$ то отношение α называется *симметричным*.
3. Если для любых $x, y, z \in X$ из $x\alpha y$ и $y\alpha z$ следует $x\alpha z$, то отношение α называется *транзитивным*.
4. Если для любых $x, y \in X$ из $x\alpha y$ и $y\alpha x$ следует $x = y$, то отношение α называется *антисимметричным*.

Примеры бинарных отношений

1. X – множество всех людей. Отношение α определено так: $A\alpha B \iff A$ и B родились в одном и том же году. Оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

2. X – множество всех прямых в пространстве. Отношение α определено так: $\ell\alpha m \iff \ell = m$ или $\ell \parallel m$. Оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

3. $X = \mathbb{N}$, отношение α определено так: $m\alpha n \iff m$ *делит* n ($n = k \cdot m$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$). Обозначение: $m|n$. Это отношение рефлексивно, не симметрично, транзитивно, антисимметрично.

4. $X = \mathbb{Z}$, отношение α определено так же, как в примере 3: $m\alpha n \iff m|n$. Оно рефлексивно, не симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

5. $X = \mathbb{R}$, отношение α определено так: $m\alpha n \iff m \leq n$. Оно рефлексивно, не симметрично, транзитивно, антисимметрично.

6. $X = \mathbb{Z}$, отношение α определено так: $m\alpha n \iff 5|(m-n)$. Оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично. Транзитивность следует из того, что если $m\alpha n$ и $n\alpha k$, то $5|(m-n)$ и $5|(n-k)$, поэтому $5|(m-k)$, так как $m-k = (m-n)+(n-k)$. Следовательно, $m\alpha k$.

Свойства бинарных отношений в терминах операций над соответствиями

Определения

Пусть X – непустое множество. Положим $\triangle_X = \{(x,x) | x \in X\}$, $\triangledown_X = X \times X$.Тогда $\triangle_X$ называется *отношением равенства*, а $\triangledown_X$ — *универсальным отношением* на множестве X.

Пусть α – бинарное отношение на множестве X. Что такое α^{-1}? Это обратное соответствие к α, т.е. бинарное отношение, определенное так: $x\alpha^{-1}y \Longleftrightarrow y\alpha x$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Бинарное отношение α рефлексивно $\Longleftrightarrow \triangle_X \subseteq \alpha$.
2. Бинарное отношение α симметрично $\Longleftrightarrow \alpha^{-1} \subseteq \alpha \Longleftrightarrow \alpha^{-1} = \alpha$.
3. Бинарное отношение α транзитивно $\Longleftrightarrow \alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.
4. Бинарное отношение α антисимметрично $\Longleftrightarrow \alpha^{-1} \cap \alpha \subseteq \triangle_X$.

Утверждения 1, 3, 4 являются непосредственными следствиями соответствующих определений.

В утверждении 2 нужно лишь проверить, что $\alpha^{-1} \subseteq \alpha \Longrightarrow \alpha^{-1} = \alpha$.

Покажем, что из $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$ следует $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$:

$x\alpha y \Longrightarrow y\alpha^{-1}x \Longrightarrow y\alpha x \Longrightarrow x\alpha^{-1}y$.

Определения

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.
Система подмножеств $\{A_i | i \in I\}$ множества X называется *разбиением множества* X, если $A_i \neq \emptyset$ при всех $i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $X = \cup_{i \in I} A_i$.
Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X, $x \in X$. *Классом эквивалентности элемента* x *по отношению* α называется множество $\{y \in X | y \alpha x\}$. Обозначение: x^α.

На сл.3 отношения эквивалентности – примеры 1, 2, 6.

Теорема

Для любого отношения эквивалентности α на множестве X множество всех классов эквивалентности по α образует разбиение множества X.
Для любого разбиения $\{A_i | i \in I\}$ множества X бинарное отношение, определенное условием $x \alpha y \iff x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$, является отношением эквивалентности, и его классы эквивалентности являются множествами A_i $(i \in I)$.

$\Downarrow$Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X.
Так как $x \in x^\alpha$, $x^\alpha \neq \emptyset$ и $X = \cup_{x \in X} x^\alpha$.
Убедимся, что $x^\alpha \cap y^\alpha = \emptyset$ при $x^\alpha \neq y^\alpha$. Для этого докажем, что

$$x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha.$$

Докажем, что $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y$.
Пусть $z \in x^\alpha \cap y^\alpha$. Тогда $z\alpha x$ и $z\alpha y$, откуда в силу симметричности отношения α следует $x\alpha z$ и в силу транзитивности $x\alpha y$. Следовательно, $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Rightarrow x\alpha y$.
Обратное утверждение очевидно, так как из $x\alpha y$ следует $x \in y^\alpha$ и значит $x \in x^\alpha \cap y^\alpha$. Мы доказали, что $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y$.
Докажем, что $x\alpha y \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha$. Если $x\alpha y$, то для любого $z \in x^\alpha$ имеем $z\alpha x$, откуда в силу транзитивности α следует $z\alpha y$, т.е. $z \in y^\alpha$. Значит, $x^\alpha \subseteq y^\alpha$.
Поскольку из $x\alpha y$ в силу симметричности отношения α следует $y\alpha x$, аналогично получаем $y^\alpha \subseteq x^\alpha$, т.е. $x^\alpha = y^\alpha$. Итак, доказана импликация $x\alpha y \Rightarrow x^\alpha = y^\alpha$.
Если $x^\alpha = y^\alpha$, то очевидно, что $x \in y^\alpha$, и $x\alpha y$.
Таким образом, $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha$ и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть $\{A_i | i \in I\}$ — разбиение множества X и α — бинарное отношение, определенное условием $x\alpha y \iff x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$.
Очевидно, что отношение α рефлексивно и симметрично. Проверим, что оно транзитивно.
Пусть $x\alpha y$ и $y\alpha z$. Тогда $x, y \in A_i$ и $y, z \in A_j$ для некоторых $i, j \in I$. Так как $y \in A_i \cap A_j$, заключаем, что $i = j$ и $x\alpha z$. Этим доказана транзитивность α. Следовательно, α — отношение эквивалентности.
Из определений класса эквивалентности и отношения α непосредственно следует, что классы эквивалентности α — это в точности множества A_i.
Теорема доказана.$\Uparrow$

Определение

Множество всех классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности α называется *фактормножеством* и обозначается через X/α.

Охарактеризуйте классы эквивалентности для отношений из примеров 1, 2, 6 на слайде 3.

Важные примеры отношений эквивалентности

1. $X = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, для любых $x, y \in \mathbb{Z}$ $x\rho_n y \iff n$ делит $x - y$. При этом говорят, что числа x и y *сравнимы по модулю* n.
Очевидно, что отношение ρ_n рефлексивно и симметрично.
Оно транзитивно, так как если $x\rho_n y$ и $y\rho_n z$, то n делит $x - y$ и $y - z$, и потому n делит $x - z = (x - y) + (y - z)$.
Для числа $x \in \mathbb{Z}$ через $\overline{x}_n$ обозначим целое число из отрезка $[0, n-1]$ такое что $x = qn + \overline{x}_n$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$.
Очевидно, что $x\rho_n y \iff \overline{x}_n = \overline{y}_n$. Поэтому фактормножество $\mathbb{Z}/\rho_n$ состоит из n элементов, называемых *вычетами* по модулю n.
Вычет x^{ρ_n} равен $\{\overline{x}_n + qn | q \in \mathbb{Z}\}$.

2. Пусть X, Y — множества и $\varphi : X \longrightarrow Y$ — отображение множества X на множество Y. Определим отношение $\ker(\varphi)$ на множестве X, полагая $x_1 \ker(\varphi) x_2 \iff \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
Легко проверить, что $\ker(\varphi)$ — отношение эквивалентности на множестве X.
Его классы эквивалентности суть *полные прообразы* элементов множества Y при отображении φ: $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X | \varphi(x) = y\}$.
Отображение $\varphi^{-1}(y) \mapsto y$ является биекцией фактормножества $X/\ker(\varphi)$ на множество Y.