Окончание доказательства теоремы

Следовательно, высший член многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - g_1(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$ ниже $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$. Применяя к его высшему члену те же рассуждения, получаем многочлен $g_2(y_1, \ldots, y_n)$ такой, что высший член многочлена $f_1(x_1, \ldots, x_n) - g_2(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$ ниже высшего члена $f_1(x_1, \ldots, x_n)$. Так как существует лишь конечное число одночленов вида $\beta x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \ldots x_n^{\ell_n}$ со свойством $\ell_1 \geq \ell_2 \geq \ldots \geq \ell_n$, которые ниже $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, через конечное число шагов многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ будет построен.

Установим единственность. Предположим, что существуют различные многочлены $g(y_1, \ldots, y_n)$ и $h(y_1, \ldots, y_n)$ такие, что $g(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n)) = h(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$. Тогда $(g - h)(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ и $g - h \neq 0$. Для одночлена $\gamma y_1^{r_1} \ldots y_n^{r_n}$ высший член симметрического многочлена $\gamma s_1^{r_1} \ldots s_n^{r_n}$ имеет вид $x_1^{r_1}(x_1 x_2)^{r_2} \ldots (x_1 \ldots x_{n-1})^{r_{n-1}}(x_1 \ldots x_n)^{r_n} = x_1^{r_1+\ldots+r_n} x_2^{r_2+\ldots+r_n} \ldots x_n^{r_n}$. По этому одночлену степени переменных одночлена $\gamma y_1^{r_1} \ldots y_n^{r_n}$ определяются однозначно. Выберем среди одночленов многочлена $g - h$ такой одночлен p, у которого высший член q соответствующего симметрического многочлена выше высших членов симметрических многочленов для остальных одночленов. Тогда q не может взаимно уничтожиться при замене $y_1, \ldots, y_n$ на $s_1, \ldots, s_n$ в многочлене $g - h$. Получаем противоречие.$\Uparrow$

Выразить симметрический многочлен $f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^4 x_2^2 x_3)_\sigma + \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^3 x_2^2)_\sigma$ через элементарные симметрические многочлены.

Применим метод неопределенных коэффициентов. Запишем возможные распределения показателей при x_1, x_2, x_3 высших членов симметрических многочленов, которые ниже $x_1^4 x_2^2 x_3$ (соотв. ниже $x_1^3 x_2^2$):

x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
4	2	1	$s_1^2 s_2 s_3$	3	2	0	$s_1 s_2^2$
3	3	1	$s_2^2 s_3$	3	1	1	$s_1^2 s_3$
3	2	2	$s_1 s_3^2$	2	2	1	$s_2 s_3$

Положим $f_1 = \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^4 x_2^2 x_3)_\sigma$ и $f_2 = \sum_{\sigma \in S_3} (x_1^3 x_2^2)_\sigma$. Тогда $f_1 = s_1^2 s_2 s_3 + \alpha s_2^2 s_3 + \beta s_1 s_3^2$ и $f_2 = s_1 s_2^2 + \gamma s_1^2 s_3 + \delta s_2 s_3$. Для определения $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ придадим x_1, x_2, x_3 конкретные значения и вычислим соответствующие значения f_1, f_2, s_1, s_2, s_3. Получим уравнения относительно $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	6	6	3	3	1	$6 = 27 + 9\alpha + 3\beta$	$6 = 27 + 9\gamma + 3\delta$
1	-1	1	2	2	1	-1	-1	$2 = 1 - \alpha + \beta$	$2 = 1 - \gamma + \delta$

$$\begin{cases} 9\alpha + 3\beta = -21, \\ \alpha - \beta = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 9\gamma + 3\delta = -21, \\ \gamma - \delta = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 12\alpha = -24, \\ \beta = 1 + \alpha. \end{cases}$$

Окончание примера

Получаем $\alpha = \gamma = -2$, $\beta = \delta = -1$. Таким образом,
$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^2 s_2 s_3 - 2s_2^2 s_3 - s_1 s_3^2 + s_1 s_2^2 - 2s_1^2 s_3 - s_2 s_3$, т.е.
$f(x_1, x_2, x_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, где
$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 y_3 - 2y_2^2 y_3 - y_1 y_3^2 + y_1 y_2^2 - 2y_1^2 y_3 - y_2 y_3$.

Рассмотрим многочлен $(y-x_1)(y-x_2)\dots(y-x_n)$ от переменных $y, x_1, \dots, x_n$. Раскрывая скобки, записывая полученный многочлен как элемент из $K[x_1, \dots, x_n][y]$ и принимая во внимание, что y^{n-k} получается, когда из некоторых $n-k$ скобок берется y, а из оставшихся k скобок – $-x_j$, приходим к формуле

$$(y-x_1)(y-x_2)\dots(y-x_n) = y^n - s_1(x_1,\dots,x_n)y^{n-1} + \qquad (1)$$
$$+s_2(x_1,\dots,x_n)y^{n-2} + \dots + (-1)^k s_k(x_1,\dots,x_n)y^{n-k} \dots + (-1)^n s_n(x_1,\dots,x_n),$$

где $s_k(x_1,\dots,x_n)$ – элементарный симметрический многочлен (см. сл.7).

Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все корни многочлена $f(x)$ с учетом кратности. Тогда для $k = 1, \dots, n$ справедливо равенство $s_k(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_0}$.

Для доказательства достаточно записать неприводимое разложение $f(x) = a_0(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$ и сравнить с формулой (1).

При $n = 2$ получается известная из школьного курса математики теорема Виета для корней квадратного уравнения.

Вычисление значений симметрического многочлена от корней многочлена

Обобщенная теорема Виета вместе с теоремой сл.7 позволяет вычислять значения симметрического многочлена от n переменных от всех комплексных корней многочлена n-й степени из $\mathbb{C}[x]$, не вычисляя эти корни. Рассмотрим пример.

Найти значение симметрического многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$, указанного на сл.10, от комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ многочлена $h(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 7$.

Вычислим с помощью теоремы сл.11 значения элементарных симметрических многочленов $s_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -2$, $s_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{5}{4}$, $s_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{7}{4}$. Представим $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов, используя результаты сл.10: $f(x_1, x_2, x_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, где $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 y_3 - 2y_2^2 y_3 - y_1 y_3^2 + y_1 y_2^2 - 2y_1^2 y_3 - y_2 y_3$. Следовательно, $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = g(-2, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}) = \frac{317}{32} = 9\frac{29}{32}$.

Замечание

Заметим, что если коэффициенты многочлена $h(x)$ и симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат числовому полю F, то и значения элементарных симметрических многочленов $s_k(x_1, \ldots, x_n)$ от всех корней h, и коэффициенты многочлена, посредством которого f выражается через s_k, также принадлежат полю F, и потому значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех корней h принадлежит полю F.

Положим $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Эти многочлены называются *степенными суммами*. Через s_j $(j = 1, \ldots, n)$ как и выше обозначаем элементарные симметрические многочлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предложение

Для любого натурального числа $k \leq n$ справедлива формула $S_k - s_1 S_{k-1} + s_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} s_{k-1} S_1 + (-1)^k k s_k = 0$.

$\Downarrow$Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ положим $r_{k,j} = s_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Сначала докажем формулу

$$r_{k,j} = s_k - x_j s_{k-1} + x_j^2 s_{k-2} - x_j^3 s_{k-3} + \ldots + (-1)^{k-1} x_j^{k-1} s_1 + (-1)^k x_j^k. \quad (1)$$

Все слагаемые в правой части равенства (1), не содержащие x_j, в сумме дают $r_{k,j}$, так как это слагаемые из $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не содержащие x_j. Докажем, что все слагаемые, содержащие x_j, в правой части (1) взаимно уничтожаются.

$s_k - x_j s_{k-1} + x_j^2 s_{k-2} - x_j^3 s_{k-3} + \ldots + (-1)^m x_j^m s_{k-m} +$
$(-1)^{m+1} x_j^{m+1} s_{k-m-1} + \ldots + (-1)^{k-1} x_j^{k-1} s_1 + (-1)^k x_j^k$
В самом деле, пусть $j \notin \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$. Тогда $x_j x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ из s_k взаимно уничтожается с $-x_j x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ из $-x_j s_{k-1}$, $-x_j^2 x_{i_1} \ldots x_{i_{k-2}}$ из $-x_j s_{k-1}$ взаимно уничтожается с $x_j^2 x_{i_1} \ldots x_{i_{k-2}}$ из $x_j^2 s_{k-2}$, и так далее, $(-1)^m x_j^{m+1} x_{i_1} \ldots x_{i_{k-m-1}}$ из $(-1)^m x_j^m s_{k-m}$ взаимно уничтожается с $(-1)^{m+1} x_j^{m+1} x_{i_1} \ldots x_{i_{k-m-1}}$ из $(-1)^{m+1} x_j^{m+1} s_{k-m-1}$, и так далее, $(-1)^{k-1} x_j^k$ из $(-1)^{k-1} x_j^{k-1} s_1$ взаимно уничтожается с $(-1)^k x_j^k$.
Таким образом, равенство (1) доказано.
Просуммировав равенства (1) по j от 1 до n, получим

$$\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} = n s_k - S_1 s_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} S_{k-1} s_1 + (-1)^k S_k. \tag{2}$$

Вычтем из обеих частей равенства (2) $k s_k$, перенесем $(n-k)s_k$ в левую часть, поменяем части местами и умножим обе части получившегося равенства на $(-1)^k$. Таким образом придем, записав слагаемые в обратном порядке, к равенству
$S_k - s_1 S_{k-1} + s_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} s_{k-1} S_1 + (-1)^k k s_k =$
$(-1)^k \left(\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} - (n-k) s_k \right).$

Окончание доказательства формулы Ньютона

Остается проверить, что $\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} - (n-k)s_k = 0$, т.е. $\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} = (n-k)s_k$.

Это следует из того, что каждый одночлен $x_{i_1} \dots x_{i_k}$ встречается один раз в каждом многочлене $r_{k,j}$, для которого $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, а количество таких многочленов равно $n-k$.$\Uparrow$

Приведем без доказательства формулу Ньютона для случая $k > n$:

$$S_k - s_1 S_{k-1} + s_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^n s_n S_{k-n} = 0.$$

Глава IV. Многочлены

§ 8. Многочлены и матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть F – поле, n – натуральное число. Рассмотрим кольцо многочленов $F^{n\times n}[x]$ над кольцом квадратных матриц $F^{n\times n}$. Элементы этого кольца можно рассматривать и как матрицы, состоящие из многочленов, т.е. элементы кольца матриц $F[x]^{n\times n}$. Пусть $A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m \in F^{n\times n}[x]$ и $A_s = \left(\alpha_{ij}^{(s)}\right)$ для $s = 1, \ldots, m$. Тогда по правилам действий над матрицами получаем $A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m = G$, где $G = (g_{ij}) \in F[x]^{n\times n}$, и многочлены $g_{ij} = \alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)}x + \ldots + \alpha_{ij}^{(m)}x^m$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. При этом действия над одними и теми же многочленами по правилам умножения многочленов и умножения матриц приводят к одинаковым результатам.

Вот пример записи многочлена из $F^{3\times 3}[x]$ в виде матрицы из $F[x]^{3\times 3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+3x+x^2 & 2 & 3+x+x^2 \\ 2x & 5+x+x^2 & -1 \\ 6-x+x^2 & x & 1+5x+x^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть F – поле, $A \in F^{n\times n}$.

Определения

Характеристической матрицей матрицы A называется матрица $A - xE_n$.
Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен $|A - xE_n|$ – определитель характеристической матрицы $A - xE_n$.
Обозначение: $\chi_A(x)$.

В развернутом виде характеристический многочлен матрицы $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ имеет вид

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

В частности,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})x + x^2.$$

Отметим, что коэффициенты при x^n и x^{n-1} в многочлене $\chi_A(x)$ равны соответственно $(-1)^n$ и $(-1)^{n-1}\sum_{j=1}^n a_{jj}$. Скаляр $\sum_{j=1}^n a_{jj}$ называется *следом матрицы* A и обозначается через tr(A).

Пусть F – поле, $A \in F^{n\times n}$, $f \in F[x]$.

Определение

Будем говорить, что многочлен f *аннулирует* матрицу A, если $f(A) = O$.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{n\times n}$ ее характеристический многочлен $\chi_A(x)$ аннулирует A.

$\Downarrow$Запишем присоединенную матрицу $(A - xE_n)^{\sim}$ (см. сл.7 §5 гл.I) к характеристической матрице $A - xE_n$ в виде матричного многочлена (так как при этом каждое алгебраическое дополнение получается из определителя порядка $n-1$ и имеет степень по x не выше $n-1$, указанный многочлен также имеет степень не выше $n-1$):
$(A - xE_n)^{\sim} = B_0 + B_1x + \ldots + B_{n-1}x^{n-1}$, где $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in F^{n\times n}$.
Пусть $\chi_A(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$. Так как
$(A - xE_n)^{\sim} \cdot (A - xE_n) = |A - xE_n|E_n$, имеем
$\gamma_0 E_n + \gamma_1 xE_n + \ldots + \gamma_n x^n E_n = (B_0 + B_1x + \ldots + B_{n-1}x^{n-1})(A - xE_n)$.
Раскрывая скобки и приравнивая матрицы-коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем цепочку равенств, приведенную на следующем слайде (слева от каждого равенства записана соответствующая степень x).

Окончание доказательства теоремы Гамильтона-Кэли

$$
\begin{array}{ccc}
x^0 & B_0A = \gamma_0 E_n & \\
x^1 & B_1A - B_0 = \gamma_1 E_n & A \\
x^2 & B_2A - B_1 = \gamma_2 E_n & A^2 \\
\dots & \dots & \dots \\
x^k & B_kA - B_{k-1} = \gamma_k E_n & A^k \\
\dots & \dots & \dots \\
x^{n-1} & B_{n-1}A - B_{n-2} = \gamma_{n-1} E_n & A^{n-1} \\
x^n & -B_{n-1} = \gamma_n E_n & A^n
\end{array}
$$

Умножим каждое равенство, начиная со второго, справа на соответствующую степень матрицы A (эти степени записаны справа от каждого равенства) и сложим все равенства. Все слагаемые слева взаимно уничтожатся, а справа получится значение $\chi_A(A)$. Теорема доказана.$\Uparrow$

В силу теоремы Гамильтона-Кэли для любой матрицы $A \in F^{n\times n}$ существует многочлен степени n, аннулирующий ее. Ясно, что существует ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий A. Назовем такие многочлены *минимальными аннулирующими* для матрицы A.

Предложение

Пусть $A \in F^{n\times n}$, $m(x)$ – минимальный аннулирующий многочлен для A, $f(x)$ – произвольный многочлен, аннулирующий A. Тогда $m(x)$ делит $f(x)$.

$\Downarrow$По определению минимального аннулирующего многочлена имеем $\deg(m) \leq \deg(f)$. Разделим f на m с остатком: $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ (см. сл.7 §1). От противного, предположим, что $r(x) \neq 0$. Тогда $\deg(r) < \deg(m)$. Из равенства $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ получаем $f(A) = q(A)m(A) + r(A)$. Так как $f(A) = O$ и $m(A) = O$, заключаем, что и $r(A) = O$. Это противоречит выбору многочлена $m(x)$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Из предложения следует, что любые два минимальные аннулирующие многочлены одной и той же матрицы ассоциированы.

Определение

Минимальным многочленом квадратной матрицы A называется ее минимальный аннулирующий многочлен со старшим коэффициентом 1. Обозначение: $\mu_A(x)$.

Примеры минимальных многочленов

Предлагается проверить следующие утверждения.

1. Минимальный многочлен скалярной матрицы λE_n есть $\mu_{(\lambda E_n)}(x) = x - \lambda$.
2. Минимальный многочлен квадратной матрицы порядка 2, не являющейся скалярной, равен ее характеристическому многочлену.
3. Минимальный многочлен матрицы $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ порядка n есть $(x-\lambda)^n$ – многочлен, ассоциированный с ее характеристическим многочленом.