Доказательство

⇓Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма

Пусть $f(x)/g(x)$ – правильная дробь и $g = g_1 g_2$, где $(g_1, g_2) = 1$. Тогда $f(x)/g(x) = f_1(x)/g_1(x) + f_2(x)/g_2(x)$, где $f_j(x)/g_j(x)$ $(j = 1, 2)$ – правильные дроби.

⇓ Согласно теореме сл.12 §2 существуют многочлены u_1, u_2 такие что $u_1 g_1 + u_2 g_2 = 1$. Умножив обе части этого равенства на f, получим $f = f u_1 g_1 + f u_2 g_2$. Разделим $f u_1$ на g_2 с остатком: $f u_1 = q g_2 + r$, $\deg(r) < \deg(g_2)$. Имеем $f = (q g_2 + r) g_1 + f u_2 g_2 = r g_1 + (q g_1 + f u_2) g_2$. Так как $(q g_1 + f u_2) g_2 = f - r g_1$ и $\deg(f) < \deg(g) = \deg(g_1) + \deg(g_2)$, $\deg(r) < \deg(g_2)$, заключаем, что $\deg(q g_1 + f u_2) < \deg(g_1)$. Положим $f_1 = q g_1 + f u_2$ и $f_2 = r$. Тогда $f/g = (f_1 g_2 + f_2 g_1)/(g_1 g_2) = f_1/g_1 + f_2/g_2$, что и требуется доказать.⇑

Пусть f/g – ненулевая правильная дробь и $g = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ – неприводимое разложение ее знаменателя. Применяя несколько раз лемму, получаем $f/g = f_1/p_1^{k_1} + \ldots + f_m/p_m^{k_m}$, где $\deg(f_j) < k_j \deg(p_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Пусть h/p^k – правильная дробь, где p – неприводимый многочлен. Разделим h на p^{k-1} с остатком: $h = q_1p^{k-1} + r_1$. Тогда $\deg(q_1) < \deg(p)$и $\deg(r_1) < (k-1)\deg(p)$. Разделим r_1 на p^{k-2} с остатком: $r_1 = q_2p^{k-2} + r_2$. Тогда $\deg(q_2) < \deg(p)$ и $\deg(r_2) < (k-2)\deg(p)$. Продолжая эти действия, получим последовательность равенств $r_j = q_{j+1}p^{k-j-1} + r_{j+1}$, где $\deg(q_{j+1}) < \deg(p)$ и $\deg(r_{j+1}) < (k-j-1)\deg(p)$, $j = 2, \ldots, k-2$. Отсюда $h = q_1p^{k-1} + q_2p^{k-2} + \ldots + q_{k-1}p + r_{k-1}$ и $h/p^k = q_1/p + q_2/p^2 + \ldots + q_{k-1}/p^{k-1} + r_{k-1}/p^k$. Существование представления правильной дроби в виде суммы простейших дробей доказано.

Докажем единственность. Пусть S_1 и S_2 — два представления одной правильной дроби в виде суммы простейших дробей. Тогда $S_1 - S_2 = 0$. От противного, предположим, что не все слагаемые в левой части взаимно уничтожаются, остается сумма S. Если f/p^k – простейшая дробь с наибольшим показателем степени k из всех дробей суммы S, то умножая S на $p^{k-1}P$, где P – общий знаменатель всех остальных простейших дробей S, не имеющих степени p в знаменателе (в частности, $(p, P) = 1$), получим равенство $(fP)/p + q = 0$ для некоторого многочлена $q \neq 0$. Отсюда $fP = -pq$ и p делит fP, что противоречит условиям $(p, f) = 1$ (так как $\deg(f) < \deg(p)$) и $(p, P) = 1$. Полученное противоречие показывает, что S_1 и S_2 отличаются лишь порядком слагаемых.⇑

Алгоритм разложения правильной дроби в сумму простейших дробей

Чтобы разложить правильную дробь $f(x)/g(x)$ в сумму простейших дробей, нужно разложить знаменатель $g(x)$ на неприводимые множители над полем F, затем записать сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами в числителях. Приведя полученное выражение к общему знаменателю и приравняв его числитель к $f(x)$, можно определить значения неизвестных коэффицентов, либо составив для них систему линейных уравнений, либо подставляя вместо x конкретные числовые значения.

Представление правильных рациональных дробей в виде суммы простейших дробей над полем $\mathbb{R}$ играет важную роль при вычислении неопределенных интегралов от дробно-рациональных функций в математическом анализе.

Разложить дробь $\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$ в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

Для того, чтобы разложить знаменатель на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$, находим рациональные корни знаменателя, используя предложение сл.2 §5. Имеем
$x^5-2x^3+2x^2-3x+2=(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$. Тогда

$$\frac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{(x-1)^2}+\frac{\gamma}{x+2}+\frac{\delta x+\lambda}{x^2+1}.$$

Приводим в правой части к общему знаменателю и записываем равенство числителей: $2x^4-10x^3+7x^2+4x+3=\alpha(x-1)(x+2)(x^2+1)+\beta(x+2)(x^2+1)+\gamma(x-1)^2(x^2+1)+(\delta x+\lambda)(x-1)^2(x+2)$.

Так как многочлены равны, они принимают одинаковые значения при всех значениях x (в том числе комплексных, а также обращающих знаменатель дроби в нуль). Подставив $x=1$, получаем $6=6\beta$, и $\beta=1$. Подставив $x=-2$, получим $135=45\gamma$ и $\gamma=3$:

	2	-10	7	4	3
-2	2	-14	35	-66	135

Окончание примера

Подставив $x = i$ (комплексное число), получим
$2i^4 - 10i^3 + 7i^2 + 4i + 3 = (\delta i + \lambda)(i-1)^2(i+2)$ и
$-2 + 14i = (-2i)(i+2)(\delta i + \lambda)$, откуда
$\lambda + \delta i = \dfrac{-1+7i}{1-2i} = \dfrac{(-1+7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \dfrac{-1-14+7i-2i}{5} = -3+i$ и
$\lambda = -3$, $\delta = 1$. Наконец, подставив $x = 0$, получим $3 = -2\alpha + 2\beta + \gamma + 2\lambda$,
т.е. $2\alpha = 2 + 3 - 6 - 3$ и найдем $\alpha = -2$.
Итак, $\dfrac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = -\dfrac{2}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{x-3}{x^2+1}$.

Глава IV. Многочлены

§ 7. Многочлены от нескольких переменных

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

В §1 было определено понятие кольца многочленов над полем. Как отмечено на сл.12 §1, можно определить кольцо многочленов $K[x]$ над кольцом K, называемым кольцом коэффициентов. Свойства кольца многочленов $K[x]$ зависят от свойств кольца коэффициентов K. Пусть F – поле. Положим $K_1 = F[x_1]$ – кольцо многочленов от переменной x_1 и $K_2 = K_1[x_2]$, где x_2 – независимая переменная, отличная от x_1. Любой многочлен из K_2 можно записать в виде $\sum\limits_{j=0}^{m} f_j(x_1)x_2^j = \sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{i=0}^{k_j} \alpha_{ij}x_1^i x_2^j$, где $f_j(x_1) = \sum\limits_{i=0}^{k_j} \alpha_{ij}x_1^i$. Положим $F[x_1, x_2] = K_2$. Продолжая по индукции, получим $F[x_1, x_2, \ldots, x_n] = F[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}][x_n]$.

Определение

Кольцо $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ называется *кольцом многочленов* над полем F от (коммутирующих) переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Важное свойство кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$

Любой элемент кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ является суммой конечного числа одночленов вида $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$, где $\alpha \in F$, $s_1, s_2, \dots, s_n$ – неотрицательные целые числа, и $x_j^0 = 1$. При $\alpha \neq 0$ *степенью* одночлена $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ называется $\sum_{j=1}^{n} s_j$.
Так как кольцо многочленов от одной переменной над кольцом без делителей нуля само является кольцом без делителей нуля, справедливо следующее

Наблюдение

Кольцо $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ не содержит делителей нуля, т.е. является областью целостности.

Определение

Говорят, что одночлен $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ *ниже* одночлена $\beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$, если $\alpha, \beta \neq 0$ и либо $s_1 < t_1$, либо существует индекс $m, 1 \leq m \leq n-1$ такой что $s_j = t_j$ при $j = 1, \dots, m$ и $s_{m+1} < t_{m+1}$. Обозначение: $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} \prec \beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$.

Бинарное отношение $\prec$ называется *лексикографическим порядком* на множестве ненулевых одночленов кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Рекомендуется проверить, что это отношение транзитивно (сравните со сл.11 §2 гл.III).
На множестве всех одночленов с коэффициентом 1 отношение $\preceq$ является отношением линейного порядка (сравните со сл.10 §2 гл.III).
Любой ненулевой многочлен этого кольца имеет *высший член* – такой одночлен, что все остальные ненулевые одночлены, входящие в данный многочлен, ниже его. Например, многочлен $x_1^2 x_3 + x_1 x_2^{10} + x_2^{20} x_3^{100}$ имеет высший член $x_1^2 x_3$.

Лемма

Высший член произведения двух ненулевых многочленов кольца $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ равен произведению их высших членов.

$\Downarrow$ Пусть $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ – высший член многочлена f, $\gamma x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$ – другой его ненулевой одночлен (если такой существует), $\beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$ – высший член многочлена g, $\delta x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$ – другой его ненулевой одночлен (если такой существует). Докажем, что $\alpha\delta x_1^{s_1+q_1} x_2^{s_2+q_2} \ldots x_n^{s_n+q_n} \prec \alpha\beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \ldots x_n^{s_n+t_n}$. Это очевидно, если $q_1 < t_1$. Пусть $q_j = t_j$ при $j = 1, \ldots, m$ и $q_{m+1} < t_{m+1}$. Тогда $s_j + q_j = s_j + t_j$ при $j = 1, \ldots, m$ и $s_{m+1} + q_{m+1} < s_{m+1} + t_{m+1}$, что и требуется доказать. Аналогично доказывается, что $\beta\gamma x_1^{p_1+t_1} x_2^{p_2+t_2} \ldots x_n^{p_n+t_n} \prec \alpha\beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \ldots x_n^{s_n+t_n}$. Докажем, что $\gamma\delta x_1^{p_1+q_1} x_2^{p_2+q_2} \ldots x_n^{p_n+q_n} \prec \alpha\beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n+t_n}$. Это очевидно, если $p_1 < s_1$ или $q_1 < t_1$. Пусть $p_j = s_j$ при $j = 1, \ldots, m$, $p_{m+1} < s_{m+1}$ и $q_j = t_j$ при $j = 1, \ldots, \ell$, $q_{\ell+1} < t_{\ell+1}$. Пусть k – наименьшее из чисел m, ℓ. Тогда ясно, что $p_j + q_j = s_j + t_j$ при $j = 1, \ldots, k$ и $p_{k+1} + q_{k+1} < s_{k+1} + t_{k+1}$.$\Uparrow$

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, σ – подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, т.е. биекция этого множества на себя. Обозначим через f_σ многочлен $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, полученный из многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заменой переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменными $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Например, если $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 x_3$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, то $f_\sigma = x_1 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3$.

Определение

Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ называется *симметрическим*, если для любой подстановки σ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место равенство $f_\sigma = f$.

Из определения сразу следует

Наблюдение

Высший член любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет вид $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$.

Каждый одночлен $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$, порождает *однородный* симметрический многочлен $\sum_{\sigma \in S_n} (\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n})_\sigma$.

Определение

Следующие симметрические многочлены от n переменных называются *элементарными*: $s_1 = x_1 + \ldots + x_n$, $s_2 = \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k, \ldots,$ $s_m = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n} x_{j_1} \ldots x_{j_m}, \ldots,$ $s_n = x_1 \ldots x_n$.

Например, $s_1(x, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,
$s_2(x, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,
$s_3(x, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$,
$s_4(x, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3x_4$.

Теорема

Для любого ненулевого симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует единственный многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ такой что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$.

$\Downarrow$ Пусть $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ – высший член симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$. Учитывая, что $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$, определим многочлен $g_1(y_1, \ldots, y_n) = \alpha y_1^{k_1 - k_2} \ldots y_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} y_n^{k_n}$, где нулевая степень переменной равна 1. Легко понять, что высший член многочлена s_m^r равен $x_1^r \ldots x_m^r$, поэтому согласно лемме сл.5 высший член $g_1(s_1, \ldots, s_n)$ равен $\alpha x_1^{k_1 - k_2} (x_1 x_2)^{k_2 - k_3} \ldots (x_1 \ldots x_{n-1})^{k_{n-1} - k_n} (x_1 \ldots x_n)^{k_n} = \alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$.