

## К экзамену по спецкурсу «Сложность по Колмогорову»

### Вопросы

1. Отсутствие аддитивно оптимальной функции для класса всех частичных функций. Существование аддитивно оптимальной функции для класса всех частично рекурсивных функций. Определение сложности по Колмогорову.
2. Верхние оценки для сложности по Колмогорову и условной сложности по Колмогорову.
3. Несжимаемые строки. Количество  $c$ -несжимаемых строк.
4. Нерекурсивность сложности по Колмогорову.
5. Аппроксимация сложности по Колмогорову монотонно убывающей последовательностью рекурсивных функций.
6. Свойства сложности по Колмогорову как функции натурального аргумента.
7. Тесты случайности. Существование универсального теста случайности.
8. Связь между сложностью по Колмогорову и случайностью для равномерного распределения.

### Задачи

1. Доказать, что  $C(xx) \leq C(x) + O(1)$  для каждой бинарной строки  $x$ .
2. Доказать, что  $C(xy) \leq C(x) + C(y) + 2 \log(\min(C(x), C(y)))$  для всех бинарных строк  $x$  и  $y$ .
3. Доказать, что  $C(x + C(x)) \leq C(x) + O(1)$  для каждого натурального числа  $x$ .
4. Доказать, что если  $p$  есть кратчайшая программа для бинарной строки  $x$ , т. е.  $C(x) = \ell(p)$ , то программа  $p$  уже несжимаема. Другими словами, существует такая константа  $c$ , что для всех строк  $x$  справедливо неравенство  $C(p) \geq \ell(p) - c$ .
5. Доказать, что множество пар натуральных чисел  $\{(x, a) \mid C(x) \leq a\}$  рекурсивно перечислимо, но нерекурсивно.
6. Множество бинарных строк  $A$  называется *тощим*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{x \in A \mid \ell(x) \leq n\}|}{2^n} = 0.$$

Доказать, что  $A$  – рекурсивное тощее множество, то для каждой константы  $c$  лишь конечно много строк в  $A$  могут быть  $c$ -несжимаемыми.

7. Доказать, что  $|C(x + y) - C(x)| \leq 2\ell(y) + O(1)$  для всех натуральных чисел  $x$  и  $y$ .
8. Доказать, что любой взаимно однозначной рекурсивной функции  $\varphi(x) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  существует такая константа  $c$ , что  $|C(\varphi(x)) - C(x)| \leq c$  для всех натуральных  $x$ .