СПЕЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП

Б.М.Верников, Д.В.Скоков, В.Ю.Шапрынский

Уральский федеральный университет

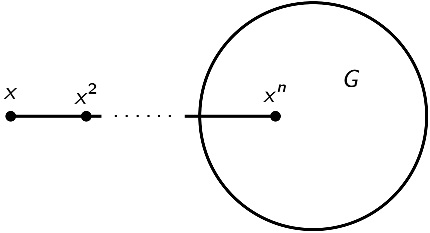
Международная конференция «Алгебра и математическая логика: теория и приложения»

Казань

5 июня 2014 г.

Эпигруппы

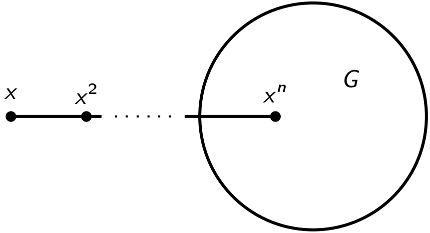
$\forall x \in S\ \exists n\colon x^n \in G \quad (G$ — подгруппа в $S)$



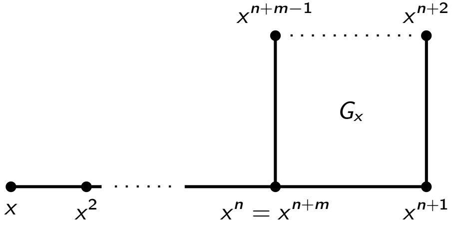
G_x — максимальная подгруппа, содержащая x

Эпигруппы

$$\forall x \in S\ \exists n\colon x^n \in G \quad (G \text{ — подгруппа в } S)$$



G_x — максимальная подгруппа, содержащая x

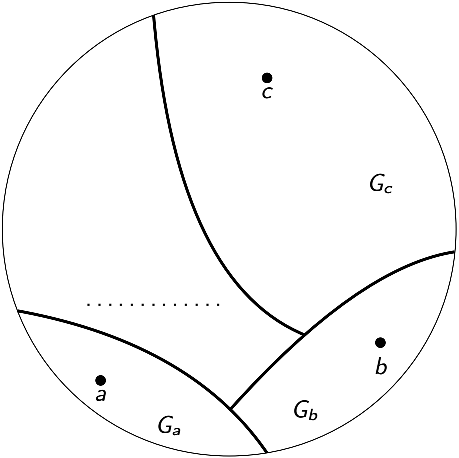


$$x^n = x^{n+m}$$

$$G_x = \{x^n, x^{n+1}, \ldots, x^{n+m-1}\}$$

$$S = \bigcup_{x \in S} G_x$$

$$x \in G_x$$



Унарная полугруппа — полугруппа с дополнительной унарной операцией.

Во вполне регулярной полугруппе: x^{-1} — обратный к x в G_x

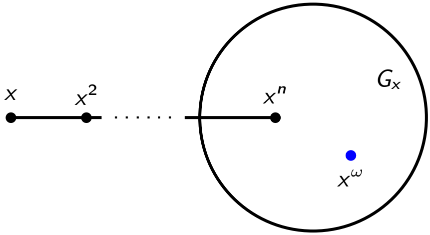
Унарная полугруппа — полугруппа с дополнительной унарной операцией.

Во вполне регулярной полугруппе: x^{-1} — обратный к x в G_x

Унарная полугруппа — полугруппа с дополнительной унарной операцией.

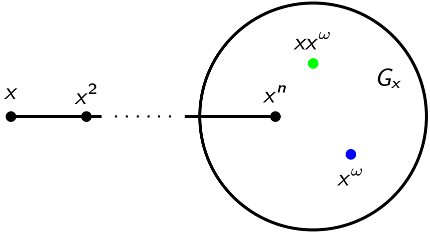
Во вполне регулярной полугруппе: x^{-1} — обратный к x в G_x

В эпигруппе:



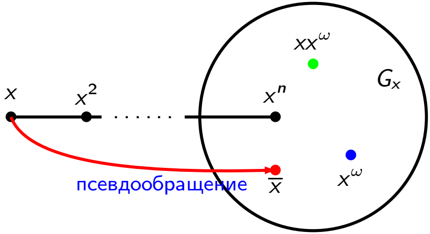
x^ω — единица в G_x

В эпигруппе:



x^ω — единица в G_x; $xx^\omega = x^\omega x \in G_x$

В эпигруппе:



x^ω — единица в G_x; $xx^\omega = x^\omega x \in G_x$; $\overline{x} = (xx^\omega)^{-1}$ в G_x

$\overline{x}$ — *псевдообратный* к x

Вполне регулярный случай

Если S вполне регулярна, то $\overline{x} = x^{-1}$

Многообразия вполне регулярных полугрупп являются многообразиями эпигрупп

a — *нейтральный элемент* в L:

$\forall x, y \in L\colon \quad a, x, y$ порождают дистрибутивную подрешетку

или, эквивалентно,

$$\forall x, y \in L\colon \quad (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

Если a — нейтральный в L, то L — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$,

где $\quad (a] = \{x \in L \mid x \leq a\}, \quad [a) = \{x \in L \mid a \leq x\}$

Нейтральные элементы решеток

a — *нейтральный элемент* в L:

$\forall x, y \in L$: $\quad a, x, y$ порождают дистрибутивную подрешетку

или, эквивалентно,

$$\forall x, y \in L: \quad (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

Если a — нейтральный в L, то L — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$,

где $\quad (a] = \{x \in L \mid x \leq a\}, \quad [a) = \{x \in L \mid a \leq x\}$

a — *нейтральный элемент* в L:

$\forall x, y \in L$: $\quad a, x, y$ порождают дистрибутивную подрешетку

или, эквивалентно,

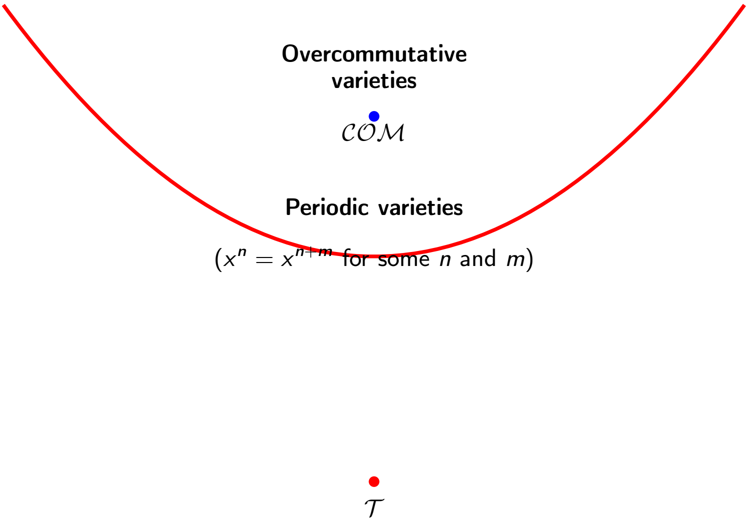
$$\forall x, y \in L: \quad (a \vee x) \wedge (x \vee y) \wedge (y \vee a) = (a \wedge x) \vee (x \wedge y) \vee (y \wedge a)$$

Если a — нейтральный в L, то L — подпрямое произведение $(a]$ и $[a)$,

где $\quad (a] = \{x \in L \mid x \leq a\}, \quad [a) = \{x \in L \mid a \leq x\}$

Теорема 1

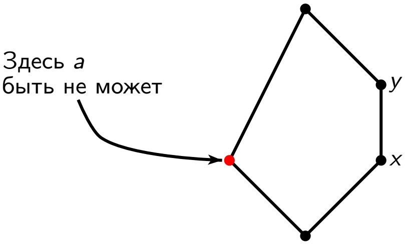
Нейтральными элементами решетки всех многообразий эпигрупп являются тривиальное многообразие $\mathbf{T}$, *многообразие полурешеток* $\mathbf{SL}$, *многообразие полугрупп с нулевым умножением* $\mathbf{ZM}$, *многообразие* $\mathbf{SL} \vee \mathbf{ZM}$ *и только они.*



The "map" of **SEM**

a — *модулярный элемент* в L:

$$\forall x, y \in L\colon \quad x \leq y \longrightarrow (a \vee x) \wedge y = (a \wedge y) \vee x$$



0-*приведенные тождества*: $w = 0$, т. е. $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в запись слова w

подстановочные тождества: $v = w$, где w получается из v переименованием переменных

Теорема 2

Если многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— нильмногообразие, заданное только* 0*-приведенными и подстановочными тождествами.*

Полная редукция к нильмногообразиям.

Теорема 3

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— многообразие, удовлетворяющее тождеству* $x^2y = 0$.

0-приведенные тождества: $w = 0$, т. е. $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в запись слова w

подстановочные тождества: $v = w$, где w получается из v переименованием переменных

Теорема 2

Если многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, где $\mathbf{X}$ — одно из многообразий $\mathbf{T}$ и $\mathbf{SL}$, а $\mathbf{N}$ — нильмногообразие, заданное только 0-приведенными и подстановочными тождествами.

Полная редукция к нильмногообразиям.

Теорема 3

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, где $\mathbf{X}$ — одно из многообразий $\mathbf{T}$ и $\mathbf{SL}$, а $\mathbf{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождеству $x^2y = 0$.

Модулярные элементы решетки многообразий эпигрупп

0-приведенные тождества: $w = 0$, т. е. $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в запись слова w

подстановочные тождества: $v = w$, где w получается из v переименованием переменных

Теорема 2

Если многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— нильмногообразие, заданное только* 0*-приведенными и подстановочными тождествами.*

Полная редукция к нильмногообразиям.

Теорема 3

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— многообразие, удовлетворяющее тождеству* $x^2y = 0$.

0-*приведенные тождества*: $w = 0$, т. е. $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в запись слова w

подстановочные тождества: $v = w$, где w получается из v переименованием переменных

Теорема 2

Если многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— нильмногообразие, заданное только* 0*-приведенными и подстановочными тождествами.*

Полная редукция к нильмногообразиям.

Теорема 3

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— многообразие, удовлетворяющее тождеству* $x^2y = 0$.

0-приведенные тождества: $w = 0$, т. е. $wx = xw = w$, где x — буква, не входящая в запись слова w

подстановочные тождества: $v = w$, где w получается из v переименованием переменных

Теорема 2

Если многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— нильмногообразие, заданное только* 0*-приведенными и подстановочными тождествами.*

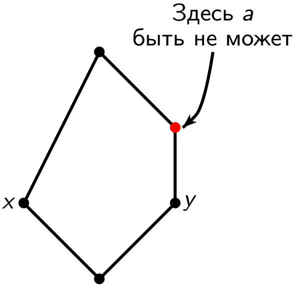
Полная редукция к нильмногообразиям.

Теорема 3

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда* $\mathbf{V} = \mathbf{X} \vee \mathbf{N}$, *где* $\mathbf{X}$ *— одно из многообразий* $\mathbf{T}$ *и* $\mathbf{SL}$, *а* $\mathbf{N}$ *— многообразие, удовлетворяющее тождеству* $x^2y = 0$.

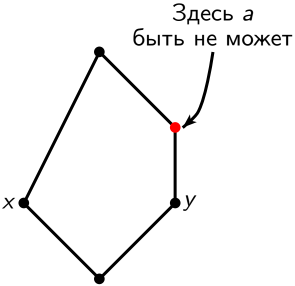
a — *верхнемодулярный элемент* в L:

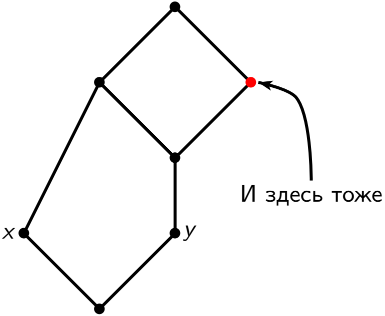
$$\forall x, y \in L: \quad y \leq a \longrightarrow (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee y$$



a — *верхнемодулярный элемент* в L:

$$\forall x, y \in L: \quad y \leq a \longrightarrow (x \vee y) \wedge a = (x \wedge a) \vee y$$





Теорема 4

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является верхнемодулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда либо* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{G} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$, *либо* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{SL} \vee \mathbf{E}$, *где* $\mathbf{G}$ *— произвольное многообразие абелевых групп,* $\mathbf{C} = \mathit{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$, $\mathbf{D} = \mathit{var}\{x^2y = 0,\ xy = yx\}$, *а* $\mathbf{E} = \mathit{var}\{x^2y = xy^2,\ x^2yz = 0,\ xy = yx\}$.

Следствие

Если коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то оно является верхнемодулярным элементом этой решетки.*

Теорема 4

Коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является верхнемодулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп тогда и только тогда, когда либо* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{G} \vee \mathbf{C} \vee \mathbf{D}$, *либо* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{SL} \vee \mathbf{E}$, *где* $\mathbf{G}$ — *произвольное многообразие абелевых групп,* $\mathbf{C} = \mathit{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$, $\mathbf{D} = \mathit{var}\{x^2y = 0,\ xy = yx\}$, *а* $\mathbf{E} = \mathit{var}\{x^2y = xy^2,\ x^2yz = 0,\ xy = yx\}$.

Следствие

Если коммутативное многообразие эпигрупп $\mathbf{V}$ *является модулярным элементом решетки всех многообразий эпигрупп, то оно является верхнемодулярным элементом этой решетки.*