ТОЖДЕСТВА И ПОЛУМОДУЛЯРНОСТЬ В РЕШЕТКАХ МНОГООБРАЗИЙ ЭПИГРУПП

Б.М.Верников, М.В.Волков, Д.В.Скоков, В.Ю.Шапрынский

Уральский федеральный университет

Международная конференция по алгебре и математический логике, посвященная 100-летию со дня рождения профессора В.В.Морозова

Казань, 27 сентября 2011 г.

Определение

Полугруппа S называется *эпигруппой*, если некоторая степень каждого ее элемента лежит в некоторой подгруппе эпигруппы S.

Класс эпигрупп включает в себя все вполне регулярные полугруппы (объединения групп) и все периодические полугруппы.

Определение

Полугруппа S называется *эпигруппой*, если некоторая степень каждого ее элемента лежит в некоторой подгруппе эпигруппы S.

Класс эпигрупп включает в себя все вполне регулярные полугруппы (объединения групп) и все периодические полугруппы.

Предыстория

Эпигруппы изучаются (под разными названиями) с конца 1950-х гг.

Термин «эпигруппа» предложен Л.Н.Шевриным в конце 1980-х гг.

Обзорные работы

- Л.Н.Шеврин. *К теории эпигрупп.* I,II // Матем. сб. 1994.
- L.N.Shevrin. *Epigroups* // Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra. Springer, 2005.
- Л.Н.Шеврин. *Решеточные свойства эпигрупп* // Фундам. и прикладн. матем. 2008.
- Л.Н.Шеврин, Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2009

Эпигруппы изучаются (под разными названиями) с конца 1950-х гг.

Термин «эпигруппа» предложен Л.Н.Шевриным в конце 1980-х гг.

Обзорные работы

- Л.Н.Шеврин. *К теории эпигрупп.* I,II // Матем. сб. 1994.
- L.N.Shevrin. *Epigroups* // Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra. Springer, 2005.
- Л.Н.Шеврин. *Решеточные свойства эпигрупп* // Фундам. и прикладн. матем. 2008.
- Л.Н.Шеврин, Б.М.Верников, М.В.Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2009

Унарной полугруппой называется полугруппа с дополнительной унарной операцией.

Пусть S — эпигруппа, $a \in S$, e_a — единица максимальной подгруппы G_a, содержащей некоторую степень элемента a.

Известно, что $ae_a = e_a a \in G_a$.

Элемент $\overline{a}$, обратный к ae_a в G_a, называется *псевдообратным* к a.

Мы рассматриваем эпигруппы как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения.

Унарной полугруппой называется полугруппа с дополнительной унарной операцией.

Пусть S — эпигруппа, $a \in S$, e_a — единица максимальной подгруппы G_a, содержащей некоторую степень элемента a.

Известно, что $ae_a = e_a a \in G_a$.

Элемент $\overline{a}$, обратный к ae_a в G_a, называется *псевдообратным* к a.

Мы рассматриваем эпигруппы как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения.

Унарной полугруппой называется полугруппа с дополнительной унарной операцией.

Пусть S — эпигруппа, $a \in S$, e_a — единица максимальной подгруппы G_a, содержащей некоторую степень элемента a.

Известно, что $ae_a = e_a a \in G_a$.

Элемент $\overline{a}$, обратный к ae_a в G_a, называется *псевдообратным* к a.

Мы рассматриваем эпигруппы как алгебры в сигнатуре, состоящей из операций умножения и псевдообращения.

Вполне регулярные полугруппы: $\overline{x} = x^{-1}$.

Многообразия вполне регулярных полугрупп являются многообразиями эпигрупп.

Периодические полугруппы: если $x^m = x^{m+n}$, то $\overline{x} = x^{(m+1)n-1}$.

Периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп.

Вполне регулярные полугруппы: $\overline{x} = x^{-1}$.

Многообразия вполне регулярных полугрупп являются многообразиями эпигрупп.

Периодические полугруппы: если $x^m = x^{m+n}$, то $\overline{x} = x^{(m+1)n-1}$.

Периодические многообразия эпигрупп можно отождествить с периодическими многообразиями полугрупп.

Проблема (Л.Н.Шеврин, 1994)

Описать многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.

Естественно изучить также многообразия эпигрупп с другими ограничениями на решетку подмногообразий, родственными модулярности (такими, как дистрибутивность, дезарговость, полумодулярность).

Основная проблема

Проблема (Л.Н.Шеврин, 1994)

Описать многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.

Естественно изучить также многообразия эпигрупп с другими ограничениями на решетку подмногообразий, родственными модулярности (такими, как дистрибутивность, дезарговость, полумодулярность).

Периодический случай

Ранее были изучены многообразия полугрупп со следующими ограничениями на решетку подмногообразий:

1. модулярность (М.В.Волков, 1989-92), полное описание;
2. дезарговость, полумодулярность вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002-2004), полное описание (дезарговость и полумодулярность вверх эквивалентны модулярности, а полумодулярность вниз — не эквивалентна);
3. дистрибутивность (по модулю групп):
   - описание для многообразий, не являющихся многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, 1989-92);
   - описание для ортодоксальных многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, не опубликовано).

(Полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в S.)

Периодический случай

Ранее были изучены многообразия полугрупп со следующими ограничениями на решетку подмногообразий:

1. модулярность (М.В.Волков, 1989-92), полное описание;
2. дезарговость, полумодулярность вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002-2004), полное описание (дезарговость и полумодулярность вверх эквивалентны модулярности, а полумодулярность вниз — не эквивалентна);
3. дистрибутивность (по модулю групп):
   - описание для многообразий, не являющихся многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, 1989-92);
   - описание для ортодоксальных многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, не опубликовано).

(Полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в S.)

Периодический случай

Ранее были изучены многообразия полугрупп со следующими ограничениями на решетку подмногообразий:

1. модулярность (М.В.Волков, 1989-92), полное описание;
2. дезарговость, полумодулярность вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002-2004), полное описание
(дезарговость и полумодулярность вверх эквивалентны модулярности, а полумодулярность вниз — не эквивалентна);
3. дистрибутивность (по модулю групп):
    - описание для многообразий, не являющихся многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, 1989-92);
    - описание для ортодоксальных многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, не опубликовано).

(Полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в S.)

Периодический случай

Ранее были изучены многообразия полугрупп со следующими ограничениями на решетку подмногообразий:

1. модулярность (М.В.Волков, 1989-92), полное описание;
2. дезарговость, полумодулярность вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002-2004), полное описание (дезарговость и полумодулярность вверх эквивалентны модулярности, а полумодулярность вниз — не эквивалентна);
3. дистрибутивность (по модулю групп):
   - описание для многообразий, не являющихся многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, 1989-92);
   - описание для ортодоксальных многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, не опубликовано).

(Полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в S.)

Периодический случай

Ранее были изучены многообразия полугрупп со следующими ограничениями на решетку подмногообразий:

1. модулярность (М.В.Волков, 1989-92), полное описание;
2. дезарговость, полумодулярность вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002-2004), полное описание
   (дезарговость и полумодулярность вверх эквивалентны модулярности, а полумодулярность вниз — не эквивалентна);
3. дистрибутивность (по модулю групп):
   - описание для многообразий, не являющихся многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, 1989-92);
   - описание для ортодоксальных многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, не опубликовано).

(Полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в S.)

Периодический случай

Ранее были изучены многообразия полугрупп со следующими ограничениями на решетку подмногообразий:

1. модулярность (М.В.Волков, 1989-92), полное описание;
2. дезарговость, полумодулярность вверх или вниз (Б.М.Верников, М.В.Волков, 2002-2004), полное описание
   (дезарговость и полумодулярность вверх эквивалентны модулярности, а полумодулярность вниз — не эквивалентна);
3. дистрибутивность (по модулю групп):
   - описание для многообразий, не являющихся многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, 1989-92);
   - описание для ортодоксальных многообразий полугрупп с вполне регулярным квадратом (М.В.Волков, не опубликовано).

(Полугруппа S называется *ортодоксальной*, если множество всех ее идемпотентов образует подполугруппу в S.)

Непериодический случай

Существуют непериодические многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий:

- многообразие всех групп,
- многообразие всех вполне регулярных полугрупп (Ф.Пастейн, 1990),

и даже с дистрибутивной решеткой подмногообразий (многообразие всех абелевых групп).

Непериодический случай

Существуют непериодические многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий:

- многообразие всех групп,
- многообразие всех вполне регулярных полугрупп (Ф.Пастейн, 1990),

и даже с дистрибутивной решеткой подмногообразий (многообразие всех абелевых групп).

Существуют непериодические многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий:

- многообразие всех групп,
- многообразие всех вполне регулярных полугрупп (Ф.Пастейн, 1990),

и даже с дистрибутивной решеткой подмногообразий (многообразие всех абелевых групп).

Непериодический случай

Существуют непериодические многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий:

- многообразие всех групп,
- многообразие всех вполне регулярных полугрупп (Ф.Пастейн, 1990),

и даже с дистрибутивной решеткой подмногообразий (многообразие всех абелевых групп).

Результаты

Получены следующие результаты:

1. полностью описаны многообразия эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз
(в непериодическом случае все эти условия эквивалентны);
2. описаны (по модулю групп) многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в следующих двух случаях:
   - для многообразий, не являющихся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом;
   - для ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом.

Результаты

Получены следующие результаты:

1. полностью описаны многообразия эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз
(в непериодическом случае все эти условия эквивалентны);
2. описаны (по модулю групп) многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в следующих двух случаях:
    - для многообразий, не являющихся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом;
    - для ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом.

Получены следующие результаты:

1. полностью описаны многообразия эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз
(в непериодическом случае все эти условия эквивалентны);
2. описаны (по модулю групп) многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в следующих двух случаях:
   - для многообразий, не являющихся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом;
   - для ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом.

Получены следующие результаты:

1. полностью описаны многообразия эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз
(в непериодическом случае все эти условия эквивалентны);
2. описаны (по модулю групп) многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в следующих двух случаях:
   - для многообразий, не являющихся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом;
   - для ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом.

Получены следующие результаты:

1. полностью описаны многообразия эпигрупп, решетка подмногообразий которых модулярна, дезаргова, полумодулярна вверх или вниз
(в непериодическом случае все эти условия эквивалентны);
2. описаны (по модулю групп) многообразия эпигрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в следующих двух случаях:
    - для многообразий, не являющихся многообразиями эпигрупп с вполне регулярным квадратом;
    - для ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом.

Теорема 1

Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:

а) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вверх*;
б) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вниз*;
в) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *модулярна*;
г) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *дезаргова*;
д) *выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{A}$ — *многообразие всех абелевых групп*, $\mathcal{K}$ — *либо тривиальное многообразие, либо многообразие полурешеток, либо многообразие* $\mathrm{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$, *а* $\mathcal{N}$ — *многообразие, удовлетворяющее тождествам* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ *и тождеству вида* $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, *где* π — *четная перестановка на множестве* $\{1, 2, 3, 4\}$;

(2) $\mathcal{V} = \mathcal{U} \vee \mathcal{W}$, *где* $\mathcal{U}$ — *одно из многообразий* $\mathrm{var}\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$ *и* $\mathrm{var}\{xy = x^2y,\ xyz^2 = yxz^2,\ xyx = yx^2\}$, *а* $\mathcal{W}$ — *ортодоксальное вполне регулярное многообразие, в котором всякая эпигруппа идемпотентов удовлетворяет тождеству* $xyz = xyxz$;

(2′) *условие, двойственное к* (2);

(3) $\mathcal{V}$ — *многообразие эпигрупп с вполне регулярным квадратом.*

Теорема 1

Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:

а) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вверх*;
б) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вниз*;
в) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *модулярна*;
г) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *дезаргова*;
д) *выполнено одно из следующих условий*:

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{A}$ — *многообразие всех абелевых групп*, $\mathcal{K}$ — *либо тривиальное многообразие, либо многообразие полурешеток, либо многообразие* $\mathrm{var}\{x^2 = x^3, xy = yx\}$, *а* $\mathcal{N}$ — *многообразие, удовлетворяющее тождествам* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ *и тождеству вида* $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, *где* π — *четная перестановка на множестве* $\{1, 2, 3, 4\}$;

(2) $\mathcal{V} = \mathcal{U} \vee \mathcal{W}$, *где* $\mathcal{U}$ — *одно из многообразий* $\mathrm{var}\{xy = x^2y, x^2y^2 = y^2x^2\}$ *и* $\mathrm{var}\{xy = x^2y, xyz^2 = yxz^2, xyx = yx^2\}$, *а* $\mathcal{W}$ — *ортодоксальное вполне регулярное многообразие, в котором всякая эпигруппа идемпотентов удовлетворяет тождеству* $xyz = xyxz$;

(2′) *условие, двойственное к* (2);

(3) $\mathcal{V}$ — *многообразие эпигрупп с вполне регулярным квадратом.*

Теорема 1

Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх;*
б) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз;*
в) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна;*
г) *решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова;*
д) *выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, *где $\mathcal{A}$ — многообразие всех абелевых групп, $\mathcal{K}$ — либо тривиальное многообразие, либо многообразие полурешеток, либо многообразие* $\mathrm{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$, *а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ и тождеству вида $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, где π — четная перестановка на множестве* $\{1, 2, 3, 4\}$;

(2) $\mathcal{V} = \mathcal{U} \vee \mathcal{W}$, *где $\mathcal{U}$ — одно из многообразий* $\mathrm{var}\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$ *и* $\mathrm{var}\{xy = x^2y,\ xyz^2 = yxz^2,\ xyx = yx^2\}$, *а $\mathcal{W}$ — ортодоксальное вполне регулярное многообразие, в котором всякая эпигруппа идемпотентов удовлетворяет тождеству $xyz = xyxz$;*

(2′) *условие, двойственное к (2);*

(3) *$\mathcal{V}$ — многообразие эпигрупп с вполне регулярным квадратом.*

Теорема 1

Для непериодического многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:

а) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх;*
б) *решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз;*
в) *решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна;*
г) *решетка $L(\mathcal{V})$ дезаргова;*
д) *выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, *где $\mathcal{A}$ — многообразие всех абелевых групп, $\mathcal{K}$ — либо тривиальное многообразие, либо многообразие полурешеток, либо многообразие* $\mathrm{var}\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$, *а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ и тождеству вида $x_1x_2x_3x_4 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}x_{4\pi}$, где π — четная перестановка на множестве* $\{1, 2, 3, 4\}$;

(2) $\mathcal{V} = \mathcal{U} \vee \mathcal{W}$, *где $\mathcal{U}$ — одно из многообразий* $\mathrm{var}\{xy = x^2y,\ x^2y^2 = y^2x^2\}$ *и* $\mathrm{var}\{xy = x^2y,\ xyz^2 = yxz^2,\ xyx = yx^2\}$, *а $\mathcal{W}$ — ортодоксальное вполне регулярное многообразие, в котором всякая эпигруппа идемпотентов удовлетворяет тождеству $xyz = xyxz$;*

(2′) *условие, двойственное к* (2);

(3) $\mathcal{V}$ *— многообразие эпигрупп с вполне регулярным квадратом.*

Наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$ обозначается через $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$.

Теорема 2

Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое многообразие эпигрупп, не являющееся многообразием эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(1) *$\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ имеют тот же смысл, что и в условии (1) теоремы 1, а $\mathcal{N}$ — многообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ и $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$, где π — нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, 3\}$;*

(2) *$\mathcal{V}$ удовлетворяет условию (2) теоремы 1 и решетка $L(\mathrm{Gr}(\mathcal{V}))$ дистрибутивна;*

(2′) *условие, двойственное к (2).*

Наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$ обозначается через $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$.

Теорема 2

Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое многообразие эпигрупп, не являющееся многообразием эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{A}$ *и* $\mathcal{K}$ *имеют тот же смысл, что и в условии* (1) *теоремы* 1, *а* $\mathcal{N}$ — *многообразие, удовлетворяющее тождествам* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ *и* $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$, *где* π — *нетривиальная перестановка на множестве* $\{1, 2, 3\}$;

(2) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет условию* (2) *теоремы* 1 *и решетка* $L(\mathrm{Gr}(\mathcal{V}))$ *дистрибутивна*;

(2′) *условие, двойственное к* (2).

Наибольшее групповое подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$ обозначается через $\mathrm{Gr}(\mathcal{V})$.

Теорема 2

Пусть $\mathcal{V}$ — непериодическое многообразие эпигрупп, не являющееся многообразием эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(1) $\mathcal{V} = \mathcal{A} \vee \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, *где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{K}$ имеют тот же смысл, что и в условии* (1) *теоремы* 1, *а $\mathcal{N}$— многообразие, удовлетворяющее тождествам $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ и $x_1x_2x_3 = x_{1\pi}x_{2\pi}x_{3\pi}$, где π — нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, 3\}$;*

(2) $\mathcal{V}$ *удовлетворяет условию* (2) *теоремы* 1 *и решетка $L(\mathrm{Gr}(\mathcal{V}))$ дистрибутивна;*

(2′) *условие, двойственное к* (2).

Теоремы 3 и 4

Теорема 3

Пусть $\mathcal{V}$ — ортодоксальное многообразие эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда решетка $L\big(\mathrm{Gr}(\mathcal{V})\big)$ дистрибутивна.

Теорема 4

Решетка всех ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом изоморфна подпрямому произведению решетки подмногообразий многообразия $\mathrm{var}\{xy = (xy)^2\}$ и счетного числа изоморфных копий решетки всех многообразий групп.

Теорема 3

Пусть $\mathcal{V}$ — ортодоксальное многообразие эпигрупп с вполне регулярным квадратом. Решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда решетка $L\big(\mathrm{Gr}(\mathcal{V})\big)$ дистрибутивна.

Теорема 4

Решетка всех ортодоксальных многообразий эпигрупп с вполне регулярным квадратом изоморфна подпрямому произведению решетки подмногообразий многообразия $\mathrm{var}\{xy = (xy)^2\}$ и счетного числа изоморфных копий решетки всех многообразий групп.

Следствия

Следствие 1

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх, то она дезаргова.

Следствие 2

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз, то она удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству.

Решетки L_1 и L_2 называются *эквационально эквивалентными*, если они порождают одно и то же многообразие решеток.

Следствие 3

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп, содержащее по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх или полумодулярна вниз, то она эквационально эквивалентна некоторой конечной решетке.

Следствие 1

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх, то она дезаргова.

Следствие 2

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз, то она удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству.

Решетки L_1 и L_2 называются *эквационально эквивалентными*, если они порождают одно и то же многообразие решеток.

Следствие 3

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп, содержащее по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх или полумодулярна вниз, то она эквационально эквивалентна некоторой конечной решетке.

Следствия

Следствие 1

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх, то она дезаргова.

Следствие 2

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз, то она удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству.

Решетки L_1 и L_2 называются *эквационально эквивалентными*, если они порождают одно и то же многообразие решеток.

Следствие 3

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп, содержащее по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх или полумодулярна вниз, то она эквационально эквивалентна некоторой конечной решетке.

Следствие 1

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх, то она дезаргова.

Следствие 2

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вниз, то она удовлетворяет нетривиальному решеточному тождеству.

Решетки L_1 и L_2 называются *эквационально эквивалентными*, если они порождают одно и то же многообразие решеток.

Следствие 3

Пусть $\mathcal{V}$ — произвольное многообразие эпигрупп, содержащее по крайней мере одну 3-ступенно нильпотентную эпигруппу. Если решетка $L(\mathcal{V})$ полумодулярна вверх или полумодулярна вниз, то она эквационально эквивалентна некоторой конечной решетке.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!