УДК 51-76
DOI 10.24147/1812-3996.2021.26(3).10-19

БУЛЕВА МОДЕЛЬ ЧАСТИЧНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БИНАРНЫХ ФАКТОРОВ

Ю. В. Нагребецкая[1], В. Г. Панов[2]
[1] *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, г. Екатеринбург, Россия*
[2] *Институт промышленной экологии Уральского отделения РАН, г. Екатеринбург, Россия*

Информация о статье
Дата поступления
13.08.2021

Дата принятия в печать
13.10.2021

Дата онлайн-размещения
01.12.2021

Ключевые слова
Булева алгебра, булев куб, граф, совместное действие булевых переменных (бинарных факторов), действие группы на множестве, инвариант действия группы, группа симметрий эксперимента

Аннотация. В рамках булевой модели бинарной теории достаточных причин, являющейся одной из моделей причинности в эпидемиологии, рассматривается вопрос определения понятия частичного взаимодействия данных факторов в отклике, обобщающем понятие взаимодействия всех факторов, от которых данный отклик зависит. Предложен целочисленный инвариант, позволяющий описать различные типы частичного взаимодействия факторов.

A BOOLEAN MODEL FOR PARTIAL INTERACTION OF BINARY FACTORS

J. V. Nagrebetskaya[1], V. G. Panov[2]
[1] *Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin, Yekaterinburg, Russia*
[2] *Institute of Industrial Ecology of the Ural Branch of the Russsian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia*

Article info
Received
13.08.2021

Accepted
13.10.2021

Available online
01.12.2021

Keywords
Boolean algebra, Boolean cube, graph, joint action of Boolean variables (binary factors), group action on a set, invariant of a group action, symmetry group of an experiment.

Abstract. Within the Boolean framework of the binary theory of sufficient causes, which is one of the causality models in epidemiology, a definition of partial interaction of given factors in the response is introduced. It is shown that this concept generalizes the concept of interaction of all factors on which the response depends on. An integer invariant is proposed to distinguish different types of the partial interaction of factors.

1. Введение

В 60-е годы XX века в философии появилась концепция причинности, которая предлагала рассматривать механизм причинности как набор множества условий, одновременное наступление которых неизбежно приводит к появлению данного со-

ISSN 1812-3996

бытия (**INUS**-условия, т. е. **I**nsufficient, but **N**ecessary part of an **U**nnecessary but **S**ufficient condition) [1–4]. Одновременно подобная конструкция была предложена в эпидемиологии, где выявление причин заболевания в популяции является одной из важнейших задач [5; 6]. Дальнейшее развитие этих идей продолжалось в основном в эпидемиологии как теория достаточных причин [7–10]. В частности, именно в эпидемиологических исследованиях были предложены первые формализованные модели этой модели причинности [7; 8; 11].

С точки зрения эпидемиологии и медицины очень важно уметь определять, имеется ли в совместном воздействии нескольких факторов, приводящему к заданному эффекту, какой-либо дополнительный эффект по сравнению с воздействием этих факторов изолированно. Наличие такого дополнительного (положительного или отрицательного) эффекта по сравнению с некоторой референтной моделью выражается терминами синергизм и антагонизм соответственно. Так как существенная часть практической эпидемиологии состоит в планировании массовых здравоохранительных мероприятий, появление таких эффектов требует соответствующей корректировки в распределении ресурсов. Например, известно, что риск развития рака легких среди курящих значительно повышается в присутствии амфиболового асбеста [12]. Следовательно, в тех местах, где в производстве или добыче присутствует амфиболовый асбест, необходимо предусмотреть дополнительные меры для предотвращения заболевания или лечения большего числа заболевших, чем при его отсутствии.

Довольно часто в эпидемиологии в качестве действующих факторов выступают нечисловые переменные, такие как ПОЛ, ОБРАЗОВАНИЕ, РЕЛИГИЯ, МЕСТО ПРОЖИВАНИЯ и т. п. Математический анализ таких факторов возможен после той или иной числовой кодировки значений, принимаемых такими факторами. Именно такие дискретные факторы участвуют в построении INUS-условий и в эпидемиологической теории достаточных причин. Естественно, что попытки формального анализа теории достаточных причин начались с двухфакторной модели двухуровневых переменных – как независимых, так и результирующей переменной.

Первое формализованное представление двухфакторной теории достаточных причин для двух двухуровневых факторов и такого же отклика (результирующей переменной) было предложено в [7]. Там же все 16 возможных откликов были классифицированы в терминах присутствия в них какого-либо специфического типа совместного действия, каждому из которых было дано название (превентивный антагонизм, причинный синергизм и т. п.). В [11] была отмечена важность учета симметрий данных для оценки типа совместного действия. В [9] эта идея была развита и дополнена.

Важность симметрии данных для идентификации совместного действия факторов проявляется в следующем. Так как в эпидемиологии обычные переменные (действующие факторы и отклик) дискретны и не имеют естественного упорядочения, то выбор способа числовой кодировки этих значений может быть произвольным. Вместе с тем, очевидно, что тип совместного действия переменных не должен зависеть от такой кодировки. Другими словами, тип совместного действия должен быть инвариантен относительно кодировки уровней действующих переменных.

Рассматриваемая ниже бинарная теория достаточных причин имеет дело с двухуровневыми факторами и двухуровневым откликом. Как легко проверить, семантическая структура этой теории полностью соответствует аксиомам булевой алгебры. Например, в работах [13; 14] двухфакторная бинарная теория достаточных причин рассматривалась с точки зрения булевой алгебры всех булевых функций от двух переменных. Оказалось, что булева формализация вполне адекватно представляет те логические отношения, которые лежат в основе эпидемиологического понимания теории достаточных причин. Кроме того, эта формализация позволяет использовать такие понятия как граф, расстояние Хэмминга, булев куб, группа, автоморфизм, изометрия, носитель булевой функции и другие для исследования вопросов описания совместного действия бинарных факторов [15–18]. Терминологически понятие булевой функции соответствует понятию отклика в эпидемиологии, т. е. некоторого физиологического, функционального, эпидемиологического показателя, по изменению которого при действии данных факторов оценивают характер, тип, силу и другие характеристики действия этих факторов.

В булевой формализации бинарной теории достаточных причин эпидемиологические симметрии представляются автоморфизмами на алгебре всех булевых функций от переменных, число которых, равно числу действующих факторов. Следовательно, отклики (булевы функции), имеющие одинаковый тип совместного действия, попадают в одну и ту же орбиту относительно действия данной группы автоморфизмов. Важный момент состоит в том, что этот формализм позволяет избежать дискуссионного вопроса о том, какова та референтная модель, относительно которой оценивается присутствие дополнительного эффекта от совместного действия факторов. Нахождение различных типов совместного действия сводится, таким образом, к алгебраическому вычислению орбит действия данной группы автоморфизмов на алгебре булевых функций [13–18].

Краткое содержание статьи и некоторые обозначения. В п. 2 приведены основные сведения булевой формализации бинарной теории достаточных причин. В п. 3 представлены основные результаты. В частности, определяется понятие частичного совместного действия бинарных факторов (булевых переменных) в данном отклике (булевой функции), которое обобщает понятие совместного действия всех факторов, от которых данный отклик зависит. Кроме того, предложено понятие степени совместного действия данного числа булевых переменных, которое также обобщает аналогичное понятие для всех переменных в данной булевой функции. Ниже булева область $\{0,1\}$ обозначается через $\mathbb{B}$. Для произвольного натурального m обозначим через $\mathbb{N}_m$ целочисленный интервал $\mathbb{N}_m=\{1,2,\ldots,m\}$. Для натурального числа k обозначим через $I=\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$, $1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$, упорядоченное k-элементное подмножество из $\mathbb{N}_n$ и через $\overline{I}=\{i_{k+1},\ldots,i_n\}$, $1\le i_{k+1}<i_{k+2}<\cdots<i_n\le n,-$ упорядоченное дополнение этого множества в $\mathbb{N}_n$. Для вектора $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{B}^n$ обозначим через $\boldsymbol{\alpha}_I$ вектор $\boldsymbol{\alpha}_I=\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i\in I}$. Аналогично, для набора переменных $x=x_1,\ldots,x_n$ введем обозначение $x_I=\{x_i\}_{i\in I}$. Далее, для вектора $\boldsymbol{\delta}\in\mathbb{B}^k$ через $\mathbb{B}_I^{\delta}$ обозначим (n–k)-мерную грань булева куба $\mathbb{B}^n$, определяемую равенством $\mathbb{B}_I^{\delta}=\left\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}^n \,\middle|\, \boldsymbol{\xi}_I=\boldsymbol{\delta}\right\}$. Пусть $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)-$ свободная булева алгебра всех булевых функций от переменных $x_1,\ldots,x_n$ и пусть $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$. Отображение $f_{I,\beta}$ для вектора $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{B}^{n-k}$ определим как сужение отображения f на k-мерную грань $\mathbb{B}_{\overline{I}}^{\beta}$, т. е. $f_{I,\beta}(x_I)=f(y_1,\ldots,y_n)$ для $y_i=x_i$, если $i\in I$ и $y_i=\beta_i$, если $i\notin I$. Для упорядоченного k-элементного множества I через pr_I обозначим проекцию куба $\mathbb{B}^n$ на куб $\mathbb{B}^k$, переводящую булев вектор $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}^n$ в вектор $\boldsymbol{\xi}_I\in\mathbb{B}^k$. Сужение проекции pr_I на k-мерную грань $\mathbb{B}_{\overline{I}}^{\beta}$ обозначим через $p_{I,\beta}$. Очевидно, что $p_{I,\beta}$ есть биекция k-грани $\mathbb{B}_{\overline{I}}^{\beta}$ на булев куб $\mathbb{B}^k$. Дополнительные сведения из теории булевых алгебр и булевых функций см. в [19]–[22]. Конец доказательства отмечается символом □.

2. Понятие совместного действия бинарных факторов (булевых переменных)

Обсуждаемые ниже вопросы касаются только случая бинарной теории достаточных причин, которая имеет дело с конечным числом двухуровневых факторов и двухуровневым откликом. Основные моменты булевой формализации представлены в работах [13–15]. Кратко можно сказать, что бинарные факторы и бинарный отклик представляются в этом формализме соответственно булевыми переменными и булевой функцией, зависящей от этих переменных. Поэтому равносильно можно говорить об отклике, зависящем от бинарных факторов, и о булевой функции от булевых переменных. Эта формализация позволяет перенести понятие совместного действия бинарных факторов в отклике из эпидемиологии на совместное действие булевых переменных в данной булевой функции. Везде ниже булева функция будет предполагаться представленной в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) [20]–[22]. Кроме того, будем считать, что все рассматриваемые булевы функции (отклики) $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ ненулевые. Необходимость рассмотрения ненулевых функций связана с тем, что для нулевой булевой функции некоторые из рассматриваемых ниже конструкций оказываются вырожденными. Заметим также, что с точки зрения эпидемиологии нулевой отклик, реализующийся для некоторого испытуемого, представляет этого испытуемого как «иммунизированного», т. е. такого, для которого воздействие данных факторов в любом сочетании их уровней не приводит к появлению исследуемого значения отклика, кодируемого значением 1.

В соответствии с общими идеями этого формализма можно дать следующее определение совместного действия (взаимодействия) булевых переменных (см. также [8] для подобного эпидемиологического понятия). Приводимые ниже определения и теоремы, касающиеся свойств совместного действия *всех* булевых переменных, от которых зависит данная булева функция, приведены в работах [16; 18]. Для ссылок на них будет использована двойная индексация, начинающаяся с «0.». Новые определения и теоремы для совместного действия *некоторых* переменных в данной булевой функции будут нумероваться последовательно, начиная с 1.

Определение 0.1. [16; 18]. Будем говорить, что в булевой функции $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ имеет место совместное действие переменных $\boldsymbol{x}=x_1,x_2,...,x_n$, если существует такой вектор $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{B}^n, \boldsymbol{\alpha}=\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, что конъюнкция $\boldsymbol{x}^{\alpha}=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}...x_n^{\alpha_n}$ является простым импликантом булевой функции *f* [20]–[22]. Будем говорить, что в этом случае совместное действие в булевой функции *f* достигается для $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$.

Заметим, что в этом определении рассматривается совместное действие *всех* переменных, от которых зависит данная булева функция. Следовательно, переменные, входящие в булеву функцию, для которой это определение не выполняется, не имеют совместного действия. Например, для булевой функции $f=x_1x_2\vee x_2x_3$ Определение 0.1 не выполняется, хотя, очевидно, некоторый тип совместного действия переменных x_1, x_2, x_3 в этой функции есть.

Следующее определение позволяет учесть такие случаи. Всюду ниже, если не оговорено другое, будем предполагать, что $2\le k\le n$.

Определение 1. Будем говорить, что в булевой функции $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ имеет место совместное действие *k* переменных $\boldsymbol{x}_I=\{x_i\}_{i\in I}$, если существует такое упорядоченное *k*-элементное подмножество *I* множества $\mathbb{N}_n$ и такой вектор $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{B}^{n-k}$, что совместное действие *k* переменных $\boldsymbol{x}_I=\{x_i\}_{i\in I}$ имеет место в булевой функции $f_{I,\beta}$. В этом случае будем говорить, что в функции *f* имеет место совместное действие переменных $\boldsymbol{x}_I$ для $\boldsymbol{x}_I=\boldsymbol{\alpha}$ при условии $\boldsymbol{x}_{\bar{I}}=\boldsymbol{\beta}$.

Определение 1 является строгим выражением аналогичного понятия, рассмотренного в работе [8]. Коротко можно сказать, что в булевой функции (отклике) *f* имеется совместное действие *k* булевых переменных (факторов) $\boldsymbol{x}_I=\{x_i\}_{i\in I}$, если в этой функции (отклике) есть совместное действие *k* переменных *при фиксированных значениях* $\boldsymbol{x}_{\bar{I}}=\boldsymbol{\beta}$ остальных переменных. Таким образом, это понятие обобщает Определение 0.1 и позволяет ввести понятие совместного действия для переменных, число которых меньше (или равно), чем число переменных, от которых зависит данная булева функция.

В связи с этим следует проверить для Определения 1 выполнение тех важных свойств, которые были доказаны в работе [18] для понятия совместного действия *n* факторов. В частности, необходимо построить критерии совместного действия *k* факторов в отклике, зависящем от *n* факторов, где $k\le n$, аналогичные Теоремам 1–4 из [18], а также проверить инвариантность введенного понятия относительно действия группы автоморфизмов булева куба, как это показано для понятия совместного действия *n* факторов [18].

Важное свойство понятия совместного действия (взаимодействия) всех факторов (Определение 0.1) состоит в том, что это понятие не зависит от того, как кодируются уровни факторов в эксперименте. Очевидно, что это свойство совершенно естественно и необходимо для выражения сущности понятия взаимодействия. Математически это выражается в инвариантности этого понятия относительно действия группы G_n симметрий (булевых автоморфизмов) на булевой алгебре $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ всех булевых функций от переменных $x_1,\ldots,x_n$ [14]. Булев куб $\mathbb{B}^n$ можно рассматривать как граф, две вершины которого соединены ребром тогда и только тогда, когда расстояние Хэмминга между ними равно 1. Как показано в работе [15], группа G_n , являясь группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(\mathbb{B}^n)$ булева куба $\mathbb{B}^n$ как графа, изоморфна гипероктаэдральной группе Oct_n, т. е. группе симметрий *n*-мерного гиперкуба. Так как действие группы G_n на алгебре $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ порождает естественное разбиение этой алгебры на орбиты действия этой группы, то каждая такая орбита представляет собой класс булевых функций, имеющих одинаковый тип совместного действия [14]. Ниже класс эквивалентности (орбита) булевой функции *f* будет обозначаться через $\langle f\rangle$.

Следуя [23], для подмножества V множества вершин графа Γ через $\Gamma(V)$ обозначим подграф, порожденный множеством V. Обозначим через C_f носитель булевой функции *f*, т. е. множество $C_f=\{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{B}^n\,|\,f(\boldsymbol{\alpha})=1\}$. Поскольку все рассматриваемые нами булевы функции *f* ненулевые, множество C_f непустое. Как и в работе [18], рассмотрим подграф Γ_f графа $\mathbb{B}^n$, порожденный множеством вершин C_f, т. е. подграф $\mathbb{B}^n(C_f)$. В работе [18] приведен следующий критерий наличия совместного действия на языке графов.

Теорема 0.1. [18]. В булевой функции (отклике) *f*, зависящей от *n* переменных (факторов), имеется совместное действие всех этих переменных (факторов), тогда и только тогда, когда в графе Γ_f есть изолированная вершина.

Полезным следствием булевой формализации бинарной теории достаточных причин является возможность определения целочисленной характеристики μ_f для каждой булевой функции f из $\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$, которая остаётся инвариантной для любой булевой функции из орбиты $\langle f\rangle$. Эта характеристика называется степенью совместного действия и в некотором смысле выражает силу совместного действия факторов в данном отклике (подробнее см. работу [18]).

Определение 0.2. [16; 18]. Назовем степенью совместного действия переменных (факторов) $x_1,\ldots, x_n$ в булевой функции (отклике) $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ при значениях уровней переменных (факторов) $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}$ число, определяемое равенством

$$\mu_f(\boldsymbol{\alpha})=\begin{cases}\min\{d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\,|\,\boldsymbol{\beta}\in C_f,\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{\alpha}\}-1, & \text{если } |C_f|>1\\ n, \quad \text{если } |C_f|=1,\end{cases}$$

где $|C_f|$ – мощность множества C_f и $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ расстояние Хэмминга между векторами $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$. Таким образом, в случае $|C_f|>1$ значение $\mu_f(\boldsymbol{\alpha})+1$ равно расстоянию Хэмминга от точки $\boldsymbol{\alpha}$ до множества всех остальных точек из C_f. Как следует из Определения 0.2, для степени совместного действия выполняется неравенство $0\le\mu_f(\boldsymbol{\alpha})\le n$.

Определение 0.3. [16; 18]. Назовем степенью совместного действия переменных (факторов) x_1, …, x_n в булевой функции (отклике) $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ число $\mu_f=\max\{\mu_f(\alpha)\,|\,\alpha\in C_f\}$.

Следовательно, в случае $|C_f|>1$ точка $\alpha\in C_f$, для которой справедливо равенство $\mu_f=\mu_f(\alpha)$, является самой «удаленной» от других точек множества C_f C_f в смысле расстояния Хэмминга точкой этого множества, а значение μ_f+1 равно расстоянию от этой точки до всех остальных точек множества C_f.

Интересно отметить следующее. На множество C_f для каждой булевой функции $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ можно смотреть как на бинарный (блоковый) код [24] длины n. Очень важной характеристикой кода является минимальное расстояние кода d. Легко понять, что $d=\min\{\mu_f(\alpha)\,|\,\alpha\in C_f\}+1$, отсюда, в частности, следует, что $\mu_f\ge d-1$.

Понятие совместного действия позволяет сформулировать следующий критерий присутствия совместного действия n переменных в булевой функции, зависящей от этих переменных.

Теорема 0.2. [16; 18]. В функции f имеет место совместное действие всех переменных тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\mu_f\ge1$.

3. Основные результаты

Перед основными утверждениями (Теоремы 1–3) нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим булев куб $\mathbb{B}^n$ как метрическое пространство, метрика в котором задается расстоянием Хэмминга. Тогда любая грань $\mathbb{B}_I^{\beta}$ булева куба $\mathbb{B}^n$ является метрическим подпространством с индуцированной метрикой.

Лемма 1. Пусть $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$, I – упорядоченное k-элементное подмножество из $\mathbb{N}_n$, $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{B}^{n-k}$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Отображение $p_{I,\beta}:\mathbb{B}_I^{\beta}\to\mathbb{B}^k$ является изометрией метрических пространств относительно метрики Хэмминга.

(2) Рассмотрим грань $\mathbb{B}_I^{\beta}$ как подграф $\mathbb{B}^n\left(\mathbb{B}_I^{\beta}\right)$ графа $\mathbb{B}^n$. Тогда отображение $p_{I,\beta}$ является изоморфизмом $\mathbb{B}_I^{\beta}$ и $\mathbb{B}^k$ как графов.

(3) Справедливо равенство $f_{I,\beta}=f\circ\left(p_{I,\beta}\right)^{-1}$.

(4) Пусть $C_f, C_{f_{I,\beta}}$ – носители булевых функций f и $f_{I,\beta}$ соответственно, тогда выполняется равенство $C_{f_{I,\beta}}=p_{I,\beta}\left(C_f\cap\mathbb{B}_I^{\beta}\right)$.

(5) Граф $\Gamma_{f_{I,\beta}}$ изоморфен подграфу $\mathbb{B}^n\left(C_f\cap\mathbb{B}_I^{\beta}\right)$ графа $\mathbb{B}^n$.

Доказательство. Утверждение (1) очевидно, а (2) следует из (1) и из того, что в булевом кубе ребрами соединены только те вершины, расстояние Хэмминга между которыми равно 1. (3) следует из равенства $\left(f_{I,\beta}\circ p_{I,\beta}\right)(\boldsymbol{\eta})=f_{I,\beta}\left(p_{I,\beta}(\boldsymbol{\eta})\right)=f_{I,\beta}(\boldsymbol{\eta}_I)=f(\boldsymbol{\eta})$ для $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{B}_I^{\beta}$, т. е. для $\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{B}^n$ такого, что $\boldsymbol{\eta}_{\bar I}=\boldsymbol{\beta}$. (4) По утверждению (3) точка $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{B}^k$ лежит в носителе $C_{f_{I,\beta}}$

тогда и только тогда, когда $\left(f\circ\left(p_{I,\beta}\right)^{-1}\right)(\xi)=1$. Значит, для $\eta=p_{I,\beta}{}^{-1}(\xi)$ это равносильно тому, что $\eta_I=\xi, \eta_{\bar{I}}=\beta,$ и $f(\eta)=1,$ т. е. тому, что $\eta\in C_f\cap\mathbb{B}_{\bar{I}}^{\beta}$, или $\xi\in p_{I,\beta}\left(C_f\cap\mathbb{B}_{\bar{I}}^{\beta}\right)$. (5) Из определения графа Γ_f для произвольной булевой функции f следует, что граф $\Gamma_{f_{I,\beta}}$ является подграфом $\mathbb{B}^k\left(C_{f_{I,\beta}}\right)$ графа $\mathbb{B}^k$. Следовательно, из (4) и (2) получаем (5). □

Обозначим через δ_f минимальную степень вершин в графе Γ_f. Тогда имеет место следующий геометрический критерий наличия совместного действия k переменных в булевой функции, зависящей от n переменных.

Теорема 1. В булевой функции f, зависящей от n переменных имеет место совместное действие k переменных, $2\le k\le n$, тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $k\le n-\delta_f$.

Доказательство. Из Определения 1 и Теоремы 0.1 следует, что в булевой функции $f\in\mathbb{B}(x_1,\ldots,x_n)$ есть совместное действие k переменных тогда и только тогда, когда найдутся упорядоченное k-элементное подмножество I множества $\mathbb{N}_n$, наборы $\alpha\in\mathbb{B}^k$, $\beta\in\mathbb{B}^{n-k}$, такие, что вершина α является изолированной вершиной графа $\Gamma_{f_{I,\beta}}$. В силу пп. (4), (5) Леммы 1 это означает, что вершина $\gamma=\left(p_{I,\beta}\right)^{-1}(\alpha)$ подграфа $\mathbb{B}^n\left(C_f\cap\mathbb{B}_{\bar{I}}^{\beta}\right)$ графа $\mathbb{B}^n$ является изолированной. Следовательно, ввиду того, что степень каждой вершины k-грани $\mathbb{B}_{\bar{I}}^{\beta}$ как подграфа графа $\mathbb{B}^n$ равна k, степень вершины γ в графе Γ_f не больше, чем $n-k$. Таким образом, наличие в булевой функции f совместного действия k переменных равносильно существованию в графе Γ_f вершины, степень которой не больше, чем $n-k$, т. е. $k\le n-\delta_f$. □

Очевидно, что Теорема 1 обобщает Теорему 0.1 и является геометрическим критерием наличия совместного действия k переменных в булевой функции f, зависящей от n ($k\le n$) переменных.

Следствие 1. Справедливы следующие утверждения. (1) Если в булевой функции f имеет место совместное действие k переменных, то в этой функции имеет место и совместное действие меньшего числа переменных. (2) Присутствие совместного действия k переменных в булевой функции f, зависящей от n переменных ($k\le n$), инвариантно относительно действия группы G_n.

Доказательство. (1) очевидно следует из Теоремы 1. (2) следует из того, что ограничение любого автоморфизма $t\in G_n$ графа $\mathbb{B}^n$ на носитель C_f является изоморфизмом графа Γ_f на образ $t(\Gamma_f)$, а степень вершины графа инвариантна относительно изоморфизма графов. □

Пример 1. Пусть n = 3. Типами взаимодействия двух переменных, не являющихся типами взаимодействия трёх переменных, являются только следующие классы

$$\langle x_1x_2\rangle, \langle x_1x_2\vee x_3\rangle, \langle x_1x_2\vee x_1x_3\rangle, \langle x_1x_2\vee \bar{x}_1x_3\rangle,$$
$$\langle x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_1x_3\rangle, \langle x_1x_2\vee \bar{x}_1\bar{x}_2\rangle, \langle x_1x_2\vee \bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_3\rangle,$$
$$\langle x_1x_2\vee \bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_3\rangle$$

Действительно, для любого представителя f любого из этих классов в соответствующем графе Γ_f нет ни одной изолированной вершины. Следовательно, по Теореме 0.1 для всех булевых функций этих классов нет совместного действия всех трех переменных, от которых эти функции зависят. Для того чтобы проверить, что для этих классов имеет место совместное действие двух переменных, возьмём в Определении 1 множество $I=\{1,2\}$ и $\beta=0$, т. е. условие на дополнительную переменную x_3 имеет вид $x_3=0$. Для первых пяти классов в качестве $f_{I,\beta}$ будет одна и та же функция $f_{I,\beta}=x_1x_2$, в которой имеет место совместное действие двух переменных [16; 18], так что для этих классов действительно выполняется Определение 1 совместного действия двух переменных в булевой функции, зависящей от трех переменных. Для остальных трех классов в качестве $f_{I,\beta}$ получим булеву функцию $f_{I,\beta}=x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2$, которая также является представителем типа совместного действия двух переменных [16; 18].

Этот же вывод можно получить с помощью Теоремы 1. Действительно, для любого представителя f любого из этих классов вершина (1,1,0) булева куба $\mathbb{B}^3$ имеет степень 1 в графе Γ_f, а значит $\delta_f=1$, поскольку как отмечалось выше, в графе Γ_f нет ни одной изолированной вершины.

Таким образом, введенное понятие совместного действия k переменных в функции, зависящей от n переменных, является инвариантным относительно действия группы G_n автоморфизмов булева куба. Теперь мы рассмотрим построение целочисленного инварианта для введенного понятия, обобщающего понятие степени совместного действия n переменных.

Определение 2. [17]. Степенью совместного действия k переменных в булевой функции f, зависящей от n переменных, назовём число

$$\mu_{f,k} = \max\left\{\mu_{f_{I,\beta}} \,\middle|\, I \subseteq N_n, |I| = k, \beta \in \mathbb{B}^{n-k}\right\}$$

При этом примем, что $\mu_{f,0} = 0$ для любой булевой функции f, $\mu_{f,1} = 1$ для $f \neq \mathbf{1}$ и $\mu_{f,1} = 0$ при $f = \mathbf{1}$. Кроме того, удобно считать, что $\mu_{\mathbf{0},k} = 0$ для любого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Очевидно, что Определение 2 обобщает Определение 1 и, кроме того, выполняются равенство $\mu_{f,n} = \mu_f$ и естественное неравенство $0 \leq \mu_{f,k} \leq k$. Отсюда, в частности, $\mu_{f,n} \geq d - 1$.

Теорема 3. В булевой функции f, зависящей от n переменных имеется совместное действие k переменных тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $\mu_{f,k} \geq 1$.

Доказательство. Если в булевой функции $f \in \mathbb{B}(x_1, \ldots, x_n)$ есть совместное действие k переменных, то по Определению 1 существует упорядоченное k-элементное подмножество I множества $\mathbb{N}_n$ и набор $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{B}^{n-k}$ такие, что в функции $f_{I,\beta}$ есть совместное действие k переменных $\boldsymbol{x}_I = \{x_i\}_{i \in I}$. По Теореме 0.2 получаем, что $\mu_{f_{I,\beta}} \geq 1$, а по Определению 2 отсюда имеем, что $\mu_{f,k} \geq 1$. Обратное утверждение доказывается аналогично. □

Для того чтобы введенная степень совместного действия k переменных была обобщением понятия степени взаимодействия n переменных остаётся доказать, что число $\mu_{f,k}$ является инвариантом относительно действия группы G_n.

Лемма 2. Справедливы следующие утверждения.

(1) Группа G_n является группой симметрий булева куба $\mathbb{B}^n$ как метрического пространства относительно метрики Хэмминга.

(2) Группа G_n действует на множестве k-мерных граней (k-граней) булева куба $\mathbb{B}^n$ транзитивно.

(3) Пусть $t \in G_n$ – некоторый автоморфизм, переводящий k-грань $\mathbb{B}^{\beta}_{\bar{I}}$ в k-грань $\mathbb{B}^{\gamma}_{\bar{J}}$, где I, J – упорядоченные k-элементные подмножества из $\mathbb{N}_n$, $\boldsymbol{\beta}, \gamma \in \mathbb{B}^{n-k}$ (он существует в силу п. (2) Леммы 2). Определим отображение $t_{I,\beta}$ равенством $t_{I,\beta} = (p_{J,\gamma}) \circ t \circ (p_{I,\beta})^{-1}$. Тогда $t_{I,\beta}$ является изометрией булева куба $\mathbb{B}^k$ относительно расстояния Хэмминга.

Доказательство. (1) очевидно, так как любой автоморфизм булева куба $\mathbb{B}^n$ как графа является изометрией $\mathbb{B}^n$ относительно расстояния Хэмминга. Докажем (2). Хорошо известно, что группа Oct_n, которая, как отмечалось выше, изоморфна группа G_n (см. п. 2 данной работы), действует транзитивно и просто на множестве флагов гиперкуба $K_n = [0,1]^n$ [25]. Рассмотрим k-элементное множество I и его дополнение $\bar{I}$ как наборы из $\mathbb{N}_n$, упорядоченные по возрастанию. Тогда любой k-грани $\mathbb{B}^{\beta}_{\bar{I}}$ и ее произвольной вершины δ можно взаимно однозначно сопоставить флаг гиперкуба K_n. (3) следует из п. (1) Леммы 1 и п. (1) Леммы 2. □

Лемма 3. Пусть t – некоторый автоморфизм из группы G_n, f – булева функция от n переменных. Если автоморфизм t переводит некоторую k-грань $\mathbb{B}^{\beta}_{\bar{I}}$ на k-грань $\mathbb{B}^{\gamma}_{\bar{J}}$, где I, J – упорядоченные k-элементные подмножества из $\mathbb{N}_n$, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{B}^{n-k}$, то для булевой функции $\tilde{f} = t(f)$ выполняются равенства

(1) $t_{I,\beta}\left(C_{f_{I,\beta}}\right) = C_{\tilde{f}_{J,\gamma}}$

(2) $\mu_{f_{I,\beta}}(\boldsymbol{\alpha}) = \mu_{\tilde{f}_{J,\gamma}}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$ для любого $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{B}^k$, где $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = t_{I,\beta}(\boldsymbol{\alpha})$

(3) $\mu_{f_{I,\beta}} = \mu_{\tilde{f}_{J,\gamma}}$

Доказательство. (1) следует из определения биекции $t_{I,\beta}$, п. (4) Леммы 1 и очевидного равенства $t(C_f) = C_{\tilde{f}}$: $t_{I,\beta}\left(C_{f_{I,\beta}}\right) = \left((p_{J,\gamma}) \circ t \circ (p_{I,\beta})^{-1}\right)\left(C_{f_{I,\beta}}\right) = \left((p_{J,\gamma}) \circ t\right)\left(C_f \cap \mathbb{B}^{\beta}_{\bar{I}}\right) = p_{J,\gamma}\left(t(C_f) \cap t\left(\mathbb{B}^{\beta}_{\bar{I}}\right)\right) = p_{J,\gamma}\left(C_{\tilde{f}} \cap \mathbb{B}^{\gamma}_{\bar{J}}\right) = C_{\tilde{f}_{J,\gamma}}$. Докажем (2). Пусть $\alpha \in C_{f_{I,\beta}}$. По п. (3) Леммы 2 отображение $t_{I,\beta}$ является изометрией куба $\mathbb{B}^k$. Следовательно, в случае $\left|C_{f_{I,\beta}}\right| > 1$ для любого $\delta \in C_{f_{I,\beta}}$, $\delta \neq \alpha$, имеем $d(\alpha, \delta) = d\left(t_{I,\beta}(\alpha), t_{I,\beta}(\delta)\right) = d(\tilde{\alpha}, \tilde{\delta})$, где $\tilde{\alpha} = t_{I,\beta}(\alpha)$, $\tilde{\delta} = t_{I,\beta}(\delta)$, и при этом $\tilde{\delta} \neq \tilde{\alpha}$. Используя то, что $t_{I,\beta}$ – биекция $C_{f_{I,\beta}}$ на $C_{\tilde{f}_{J,\gamma}}$ (см. п. (3) Леммы 2 и п. (1) Леммы 3), получаем в случае $\left|C_{f_{I,\beta}}\right| > 1$ равенство множеств

ISSN 1812-3996

$\left\{d(\alpha,\delta)\middle|\delta\in C_{f_{I,\beta}},\delta\neq\alpha\right\}=\left\{d(\tilde{\alpha},\tilde{\delta})\middle|\tilde{\delta}\in C_{\tilde{f}_{J,\gamma}},\tilde{\delta}\neq\tilde{\alpha}\right\}$, а в случае $\left|C_{f_{I,\beta}}\right|=1$ получаем равенство $\left|C_{\tilde{f}_{J,\gamma}}\right|=1$. Таким образом, по Определению 0.2 получаем требуемое равенство $\mu_{f_{I,\beta}}(\boldsymbol{\alpha})=\mu_{\tilde{f}_{J,\gamma}}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})$. Покажем справедливость равенства (3). Поскольку $t_{I,\beta}$ – биекция булева куба $\mathbb{B}^k$ (см. п. (3) Леммы 2) из п. (2) Леммы 3 следует равенство $\left\{\mu_{f_{I,\beta}}(\boldsymbol{\alpha})\middle|\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{B}^k\right\}=\left\{\mu_{\tilde{f}_{J,\gamma}}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}})\middle|\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\in\mathbb{B}^k\right\}$, где $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=t_{I,\beta}(\boldsymbol{\alpha})$ для любого $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{B}^k$. Тогда из Определения 0.3 имеем $\mu_{f_{I,\beta}}=\mu_{\tilde{f}_{J,\gamma}}$. □

Теорема 3. Для любой функции f, зависящей от n переменных, и любого $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ степень $\mu_{f,k}$ инвариантна относительно действия группы G_n автоморфизмов булева куба $\mathbb{B}^n$.

Доказательство. Пусть t – автоморфизм из группы G_n и $\tilde{f}=t(f)$. Тогда, очевидно, что t является перестановкой множества всех 2^k-элементных подмножеств множества $\mathbb{B}^n$. Кроме того, в силу п. (2) Леммы 2 отображение t переводит каждую k-грань булева куба $\mathbb{B}^n$ в некоторую k-грань этого куба. Следовательно, t является перестановкой множества всех k-граней этого куба. Поскольку каждая k-грань булева куба $\mathbb{B}^n$ имеет вид $\mathbb{B}_{\bar{I}}^{\beta}$ для некоторого упорядоченного k-элементного множества I из $\mathbb{N}_n$ и набора $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{B}^{n-k}$, то по п. (3) Леммы 3 имеем равенство $\left\{\mu_{f_{I,\beta}}\middle|I\subseteq N_n,|I|=k,\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{B}^{n-k}\right\}=$ $=\left\{\mu_{\tilde{f}_{J,\gamma}}\middle|J\subseteq N_n,|J|=k,\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{B}^{n-k}\right\}$. Используя Определение 2, получаем $\mu_{f,k}=\mu_{\tilde{f},k}$. □

Пример 2. Приведём значения степени $\mu_{f,k}$ для булевых функций f от трёх переменных, у которых $\mu_f=\mu_{f,3}=0$, но $\mu_{f,2}\geq 1$ (см. Пример 1). Иначе говоря, рассмотрим значения степени совместного действия от меньшего числа переменных для тех булевых функций, для которых нет совместного действия всех переменных. Для классов $\langle x_1x_2\rangle$, $\langle x_1x_2\vee x_3\rangle$, $\langle x_1x_2\vee x_1x_3\rangle$, $\langle x_1x_2\vee\bar{x}_1x_3\rangle$, $\langle x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_1x_3\rangle$ имеем: $I=\{1,2\}$, $f_{I,\beta}=x_1x_2$, а условие $x_{\bar{I}}=\boldsymbol{\beta}$, для которого выполняется равенство $\mu_{f,2}=\mu_{f_{I,\beta}}$, есть равенство $x_3=0$. Тогда $\mu_{f_{I,\beta}}=2$, и, следовательно, $\mu_{f,2}=2$. Для остальных классов $\langle x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\rangle$, $\langle x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_3\rangle$, $\langle x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2\vee x_1x_3\rangle$ имеем: $I=\{1,2\}$, $f_{I,\beta}=x_1x_2\vee\bar{x}_1\bar{x}_2$, условие $x_{\bar{I}}=\boldsymbol{\beta}$, для которого выполняется равенство $\mu_{f,2}=\mu_{f_{I,\beta}}$ то же самое, но здесь $\mu_{f_{I,\beta}}=1$, и, значит, $\mu_{f,2}=1$.

Таким образом, целочисленный инвариант $\mu_{f,k}$ позволяет более точно классифицировать типы совместного действия, чем рассмотренный ранее аналогичный инвариант μ_f.

4. Заключение

Принятая в эпидемиология как одна из возможных концепций описания причинности теория достаточных причин для двухуровневых переменных имеет адекватный математический язык – теорию булевых функций и булевых алгебр. Заложенные в работах [13–18] основы этой формализации продолжаются в представленной работе, в которой построены аналоги понятий совместного действия всех факторов и степени совместного действия всех факторов в данном отклике, введенные в работах [16; 18]. Эти аналоги рассматривают понятие совместного действия k факторов в отклике, зависящем от $n\geq k$ факторов и, как показано выше, для них выполняются свойства, доказанные в работе [18] для совместного действия всех факторов в данном отклике. В частности,

1. Сформулирован и доказан критерий наличия совместного действия k факторов, обобщающий соответствующий критерий наличия совместного действия всех n факторов, в терминах теории графов.

2. Определено понятие степени совместного действия k факторов, которое обобщает понятие степени совместного действия всех факторов из работ [16; 18]. В частности, доказано, что присутствие совместного действия k факторов, так же, как и значение степени совместного действия k факторов, инвариантны относительно группы всех автоморфизмов булева куба (или, что то же самое, симметрий гиперкуба), размерность которого равна числу всех факторов в данном эксперименте. Это означает, что понятие совместного действия k факторов и степени совместного действия корректно определены на орбитах действия группы всех автоморфизмов булева куба. Таким образом, каждая такая орбита (выше в тексте называемая классом) представляет собой некоторый специфический тип совместного действия.

3. Доказан критерий наличия совместного действия k факторов, формулируемый при помощи понятия степени совместного действия k факторов, обобщающий соответствующий критерий для совместного действия всех факторов.

ISSN 1812-3996

В целом можно сказать, что булев формализм для бинарной теории достаточных причин является не только адекватным языком описания существующих понятий, но и тем математическим аппаратом, который позволяет эффективно развивать эту теорию.

СПИСОК ЛИТЕТАТУРЫ

1. *Mackie J. L.* Causes and conditions // Am. Philos. Q. 1965. Vol. 2(4). P. 245–264.

2. *Mackie J. L.* The cement of the Universe: a study of causation, 2nd Ed. Clarendon Press. 1980. 348 p.

3. *Lewis D.* Causation // J. Philosophy. 1973. Vol. 70. P. 556–567.

4. *Lewis D.* Philosophical papers. Vol. 2, Oxford, UK : Oxford University Press. 1987. 384 p.

5. *MacMahon D.*, *Pugh T.F.* Causes and entities of disease // In Preventive Medicine. Boston : Little Brown, 1967, 11–18.

6. *Rothman K.* Causes // Am. J. Epidemiol. 1976. Vol. 104(6). P. 587–592.

7. *Miettinen O. S.* Causal and preventive interdependence: Elementary principles // Scand. J. Work. Environ. Health. 1982. Vol. 8. P. 159–168.

8. *VanderWeele T. J., Robins M.* A Theory of Sufficient Cause Interactions. The Berkeley Electronic Press. COBRA Preprint Series, Article 13, 2006.

9. *VanderWeele T. J., Robins M.* The identification of synergism in the sufficient-component-cause framework // Epidemiology. 2007. Vol.18 (3). P. 329–339.

10. *VanderWeele T. J.*, *Richardson T. S.* General theory for interactions in sufficient cause models with dichotomous exposures // Ann. Statistics. 2012. Vol. 40. P. 2128–2161.

11. *Greenland S.*, *Poole C.* Invariants and noninvariants in the concept of interdependent effects // Scand. J. Work Environ. Health. 1988. Vol. 14. P. 125–129.

12. *Carel R., Olsson A.C., Zaridze D., Szeszenia-Dabrowska N., Rudnai P., Lissowska J., Fabianova E., Cassidy A., Mates D., Bencko V, Foretova L, Janout V, Fevotte J, Fletcher T, 't Mannetje A., Brennan P., Boffetta P.* Occupational exposure to asbestos and man-made vitreous fibres and risk of lung cancer: a multicentre case-control study in Europe // Occup. Environ. Med. 2007. Vol. 64(8). P. 502-8. DOI: 10.1136/oem.2006.027748. Epub 2006 Oct 19. PMID: 17053017; PMCID: PMC2078502.

13. *Панов В. Г.*, *Нагребецкая Ю. В.* Алгебраическая трактовка двухфакторной теории достаточных причин // Труды СПИИРАН. 2013. Т. 26(3). С. 277–296.

14. *Panov V. G.*, *Nagrebetskaya J. V.* Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. Vol. 98(2). P. 239–259.

15. *Panov V. G.*, *Nagrebetskaya J. V.* Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups // J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. Vol. 21(3). P. 661–677.

16. *Нагребецкая Ю. В.*, *Панов В. Г.* Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Материалы XIII Междунар. конфер. «Системный анализ в медицине». ДВНЦ физиологии и патологии дыхания. 19–20 сентября 2019 г., г. Благовещенск. С. 31–34.

17. *Нагребецкая Ю. В.*, *Панов В. Г.* Обобщение понятия взаимодействия n факторов в теории достаточных причин и его свойства // Материалы XIII Междунар. конфер. "Системный анализ в медицине". ДВНЦ физиологии и патологии дыхания. 19–20 сентября 2019 г., г. Благовещенск. С. 35–38.

18. *Nagrebetskaya J. V.*, *Panov V. G.* Joint action of binary factors in the sufficient causes theory and its classification // Int. J. Innovative Technology and Exploring Engineering. 2019. Vol. 9(1). P. 2146–2152.

19. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры. М. : Наука, 1969. 319 с.

20. *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М. : Наука, 1986. 384 с.

21. *Лидл. Р., Пильц Г.* Прикладная абстрактная алгебра. Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 1996. 744 с.

22. *Crama Y.*, *Hammer P. L.* Boolean functions. Theory, Algorithms, and Applications. Cambridge : Cambridge University Press, 2011. 711 p.

23. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990, 384 с.

24. *Блейхут Р*. Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. М. : Мир, 1986. 576 с.

25. *Берже М*. Геометрия : пер. с франц. М. : Мир, 1984. Т. 1. 560 с.

ISSN 1812-3996

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Нагребецкая Юлия Вацлавовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и фундаментальной информатики Института естественных наук и математики, *Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина*, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19; e-mail: I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru.

Панов Владимир Григорьевич – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий лабораторией математического моделирования в экологии и медицине, *Институт промышленной экологии Уральского отделения РАН*, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 20; e-mail: vpanov@ecko.uran.ru.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ

Нагребецкая Ю. В., Панов В. Г. Булева модель частичного взаимодействия бинарных факторов // Вестн. Ом. ун-та. 2021. Т. 26, № 3. С. 10–19. DOI: 10.24147/1812-3996.2021.26(3).10-19.

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Nagrebetskaya Julia Vatslavovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent of the Departament of Algebra and Fundamental Informatics of the Institute of Natural Sciences and Mathematics, *Ural Federal University named after the First President of Russia B.N. Yeltsin,* 19, pr. Mira, Yekaterinburg, 620002, Russia; e-mail: I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru.

Panov Vladimir Grigorievich – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Laboratory Manager of Mathematical Modeling in Ecology and Medicine, *Institute of Industrial Ecology of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 20, ul. Sof‘i Kovalevskoi, Yekaterinburg, 620990, Russia; e-mail: vpanov@ecko.uran.ru.

FOR CITATIONS

Nagrebetskaya J.V., Panov V.G. A Boolean model for partial interaction of binary factors. *Vestnik Omskogo universiteta = Herald of Omsk University*, 2021, vol. 26, no. 3, pp. 10–19. DOI: 10.24147/1812-3996.2021.26(3).10-19. (In Russ.)