Лекция 2 (24.10.2018)

1. Логика для слов.

Конечный алфавит $\Sigma = \{a, b, \dots\}$

Предметные переменные (первого порядка) x, y, z интерпретируются как числа в натуральном ряду; содержательный смысл – позиции в слове

Числовые предикаты – обычные предикаты на множестве натуральных чисел.

Основные примеры:

$x < y$ – позиция x стоит перед позицией y

$y = x + 1$, «следует за» – позиция y непосредственно следует за позицией x

Буквенные предикаты: для каждой буквы $a \in \Sigma$ есть предикат $Q_a x$. Его смысл – в позиции x стоит буква a.

Формулы логики строятся по обычным правилам с помощью связок ($\&, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow$) и кванторов ($\forall, \exists$). Каждая замкнутая (без свободных переменных) формулы Φ этой логики – это формальная запись некоторого высказывания о позициях слова из Σ^ω. Для каждого слова $w \in \Sigma^\omega$ это высказывание истинно или ложно. Если оно истинно для слова w, говорят, что формула Φ выполняется на w или что w выполняет Φ. Обозначение: $\Phi \models w$.

Множество $L(\Phi) := \{w \in \Sigma^\omega \mid \Phi \models w\}$ называется языком, задаваемым формулой Φ.

Пример. Формула $\exists x (Q_a x \ \& \ \forall y \ (x \le y))$ задает язык $a\Sigma^\omega$.

Итак, логика, как и теория автоматов, доставляет способ описывать некоторые множества *бесконечных* слов с помощью *конечных* объектов – формул и соответственно конечных автоматов. Как связаны множества бесконечных слов, которые можно описать этими методами?

Выяснилось, что автоматный подход обладает большей выразительной силой. Поэтому придется усилить нашу логику до *монадической логики второго порядка.*

Монадические переменные (второго порядка) X, Y, Z интерпретируются как подмножества натурального ряда, т.е. множества позиций.

Возникает дополнительный предикат $x \in X$ – позиция x принадлежит множеству X.

Пример. Формула

$$\exists X \ \forall x \ \forall y \ (x \in X \ \& \ y = x + 1 \ \longleftrightarrow y \notin X) \ \& \ \forall x \ (\forall y \ (x \le y) \ \longrightarrow x \in X) \ \& \ \forall x \ (x \in X \ \longrightarrow Q_a x)$$

описывает язык всех слов, у которых буква a стоит во всех нечетных позициях.

2. Теорема Бюхи.

Теорема (Бюхи, 1960). *Язык $L \subseteq \Sigma^\omega$ распознается конечным недетерминированным автоматом Бюхи тогда и только тогда, когда он задается некоторой замкнутой формулой монадической теории 2-го порядка с единственным числовым предикатом «следует за».*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ — конечный автомат, который распознает L:

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{k-1}\}$;
q_0 – начальное состояние;
$F \subseteq Q$ – множество принимающих состояний;
$E \subseteq Q \times \Sigma \times Q$ – множество переходов (q, a, q').

По определению $w \in L$ тогда и только тогда, когда существует путь из q_0 такой, что метки ребер из этого пути составляют слово w и путь посещает некоторое состояние из F бесконечное число раз.

Мы утверждаем, что $w \in L$ тогда и только тогда, когда существуют множества $X_0, X_1, \dots, X_{k-1} \subseteq \mathbb{N}$, такие, что выполняются условия:

(1) $\bigcup\limits_{i=0}^{k-1} X_i = \mathbb{N}$;
(2) $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
(3) $1 \in X_0$;
(4) если $i \in X_j, i+1 \in X_\ell$ и a — i-я буква в слове w, то $(q_j, a, q_\ell) \in E$;
(5) одно из множеств X_j, где $q_j \in F$, бесконечно. $\square$