

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и  
прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребцкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

## Лекция 8

### Математический анализ

### Интегрирование иррациональных и тригонометрических выражений

# Интегрирование некоторых иррациональностей

Интегрирование иррациональностей

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}} \right) dx, R(x, y) - \text{рациональная}$$

функция (т.е. отношение двух многочленов)  
сводится к интегрированию рациональной дроби  
заменой

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}$$

# Интегрирование некоторых иррациональностей. Пример 1

Пример 1. Найти интеграл  $\int x\sqrt{x+1} dx$ .

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \left[ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1}, t^2 = x+1 \\ x = t^2 - 1, dx = 2t dt \end{array} \right] =$$

$$= \int (t^2 - 1)t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4 - t^2) dt =$$

# Интегрирование некоторых иррациональностей. Пример 1

$$= 2\left(\int t^4 dt - \int t^2 dt\right) = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C =$$

$$= 2\left(\frac{(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{(\sqrt{x+1})^3}{3}\right) + C$$

# Интегрирование некоторых иррациональностей

Интегрирование иррациональностей

$$\int R \left( x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}, \dots, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}} \right) dx,$$

где  $R(x, y)$  – рациональная функция, сводится к интегрированию рациональной дроби заменой

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{px+q}}, \text{ где } n = \text{НОК}(m, \dots, k)$$

## Интегрирование некоторых иррациональностей. Пример 2

Пример 2. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[4]{2x+1}}$ .

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[4]{2x+1}} = \left[ \begin{array}{l} t = \sqrt[4]{2x+1}, t^4 = 2x+1 \\ x = \frac{1}{2}(t^4 - 1), dx = 2t^3 dt \end{array} \right] =$$
$$= \int \frac{2t^3 dt}{t^2 + t} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t+1} = 2 \int \frac{((t^2 - 1) + 1) dt}{t+1} =$$

## Интегрирование некоторых иррациональностей. Пример 2

$$\begin{aligned} &= 2 \left( \int \frac{t^2 - 1}{t + 1} dt + \int \frac{dt}{t + 1} \right) = \\ &= 2 \left( \int \frac{(t - 1) \cancel{(t + 1)}}{\cancel{t + 1}} dt + \int \frac{d(t + 1)}{t + 1} \right) \\ &= 2 \left( \int (t - 1) dt + \ln |t + 1| \right) = \end{aligned}$$

## Интегрирование некоторых иррациональностей. Пример 2

$$= 2 \left( \int (t-1) dt + \ln |t+1| \right) =$$

$$= 2 \left( \frac{t^2}{2} - t + \ln |t+1| \right) + C =$$

$$= t^2 - 2t + 2 \ln |t+1| + C =$$

$$= \sqrt{2x+1} - 2\sqrt[4]{2x+1} + 2 \ln |\sqrt[4]{2x+1} + 1| + C$$

# Произведение синуса и косинуса

Вычисление интегралов вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$   
можно свести к одному из трех случаев

## Случай 1.

$m$  — нечетное положительное число

Тогда делаем замену  $t = \cos x$

$n$  — нечетное положительное число

Тогда делаем замену  $t = \sin x$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 3

Пример 3. Найти интеграл  $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ .

Решение.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \left[ \begin{array}{l} \cos x - \text{в нечетной} \\ \text{отцепляем } \cos x \end{array} \right] =$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx =$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 1

$$= \left[ \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right] = \int t^4 (1 - t^2) dt = \int (t^4 - t^6) dt =$$

$$= \int t^4 dt - \int t^6 dt = \frac{t^{4+1}}{4+1} - \frac{t^{6+1}}{6+1} + C =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 3

Пример 3. Найти интеграл  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}$ .

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} = \left[ \begin{array}{l} \sin x - \text{в нечетной} \\ \text{отцепляем } \sin x \end{array} \right] =$$

$$\int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}} =$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 3

$$\begin{aligned} &= \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right] = \int \frac{(1-t^2)(-dt)}{\sqrt{t^3}} = -\int \left( \frac{1}{\sqrt{t^3}} - \sqrt{t} \right) dt \\ &= -\int t^{-\frac{3}{2}} dt + \int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{t^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \end{aligned}$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 3

$$= -\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = 2\frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C =$$

$$= 2\frac{1}{\sqrt{\cos x}} + \frac{2}{3}\sqrt{\cos^3 x} + C$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 4

Пример 4. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sin x}$ .

Решение.

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \left[ \begin{array}{l} \sin x - \text{в нечетной, в } (-1) \\ \cos x - \text{в четной, в } 0 \end{array} \right] =$$
$$= \left[ \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ dx = -\frac{dt}{\sin x} \end{array} \right] = \int \frac{1}{\sin x} \left( -\frac{dt}{\sin x} \right) = -\int \frac{dt}{\sin^2 x} =$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 1. Пример 4

$$-\int \frac{dt}{\sin^2 x} = -\int \frac{dt}{1 - \cos^2 x} = -\int \frac{dt}{1 - t^2} = \int \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C \stackrel{?}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C \stackrel{?}{=} \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

# Произведение синуса и косинуса. Случай 2

## Случай 2.

$m$  или  $n$  — четные неотрицательные числа  
Тогда пользуемся формулами понижения степени

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

# Произведение синуса и косинуса. Случай 2. Пример 5

Пример 5. Найти интеграл  $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$ .

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \left[ \begin{array}{l} \sin x \text{ и } \cos x \text{ в четной} \\ \text{степени} \end{array} \right] =$$
$$= \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx =$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 2. Пример 5

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \left( \int 1 dx - \int \cos^2 2x dx \right) = \frac{1}{4} \left( x - \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{2} \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C \end{aligned}$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 2. Пример 6

Пример 6. Найти интеграл  $\int \cos^4 x dx$ .

Решение.

$$\int \cos^4 x dx = \left[ \begin{array}{l} \sin x \text{ в четной степени (в 0-й)} \\ \cos x \text{ в четной степени (в 4-й)} \end{array} \right] =$$
$$= \int \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx =$$

# Произведение синуса и косинуса. Случай 2. Пример 6

$$= \frac{1}{4} \left( \int 1 dx + 2 \int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( x + 2 \frac{1}{2} \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( x + \sin 2x + \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sin 4x \right) =$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 2. Пример 6

$$= \frac{1}{4} \left( x + \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \sin 4x \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} x + \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) =$$

$$= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$$

# Произведение синуса и косинуса. Случай 3

## Случай 3

Сумма  $m + n$  является четным отрицательным числом.

Тогда делаем замену  $t = \operatorname{tg} x$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + t^2$$

$$dt = d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + t^2) dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

# Произведение синуса и косинуса. Случай 3. Пример 7

Пример 7. Найти интеграл  $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^5 x}$

Решение.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \left[ \begin{array}{l} \text{сумма степеней } \sin x \text{ и } \cos x \\ \text{равна } -2 \text{ (четное отрицательн.)} \\ \text{отщепляем } \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right] =$$

# Произведение синуса и косинуса. Случай 3. Пример 7

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^3 x \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Случай 3. Пример 7

$$= \left[ \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 + 1 \\ dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt \end{array} \right] = \int t^3 (t^2 + 1) \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int t^3 dt =$$
$$= \frac{t^4}{4} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C$$

# Произведение синусов, косинусов от разных аргументов

Рассмотрим интегралы

$$\int \sin ax \cos bx \, dx, \int \cos ax \cos bx \, dx,$$
$$\int \sin ax \sin bx \, dx$$

# Произведение синусов, косинусов от разных аргументов

При вычислении интегралов используются формулы

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

# Произведение синуса и косинуса.

## Пример 8

Пример 8. Найти интеграл  $\int \sin 5x \cos 3x dx$ .

Решение.  $\int \sin 5x \cos 3x dx =$

$$= \int \frac{1}{2} (\sin(5x + 3x) + \sin(5x - 3x)) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\sin 8x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx + \frac{1}{2} \int \sin 2x dx =$$
$$= -\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$$