

НЛДУ II-го порядка. Определение

Опр. Неоднородным линейным дифференциальным уравнением (НЛДУ) II-го порядка, соответствующим ОЛДУ

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1)$$

называется ДУ

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (2)$$

где $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – некоторые непрерывные функции, определенные на интервале (a, b) .

Теорема об общем решении НЛДУ

Теорема 1 (об общем решении НЛДУ).

Если $y_0 = y_0(x)$ – общее решение ОЛДУ (1) и $y_{\text{ч}} = y_{\text{ч}}(x)$ – любое частное решение НЛДУ (2)

то

$$\boxed{y_{\text{н}} = y_0 + y_{\text{ч}}} \text{ – общее решение НЛДУ (2)}$$

Метод неопределенных коэффициентов

Метод неопределенных коэффициентов

используется, если **коэффициенты левой части уравнения (2) постоянны:**

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (3)$$

а **правая часть** уравнения $f(x)$ есть **КВАЗИМНОГОЧЛЕН**, т.е.

Метод неопределенных коэффициентов

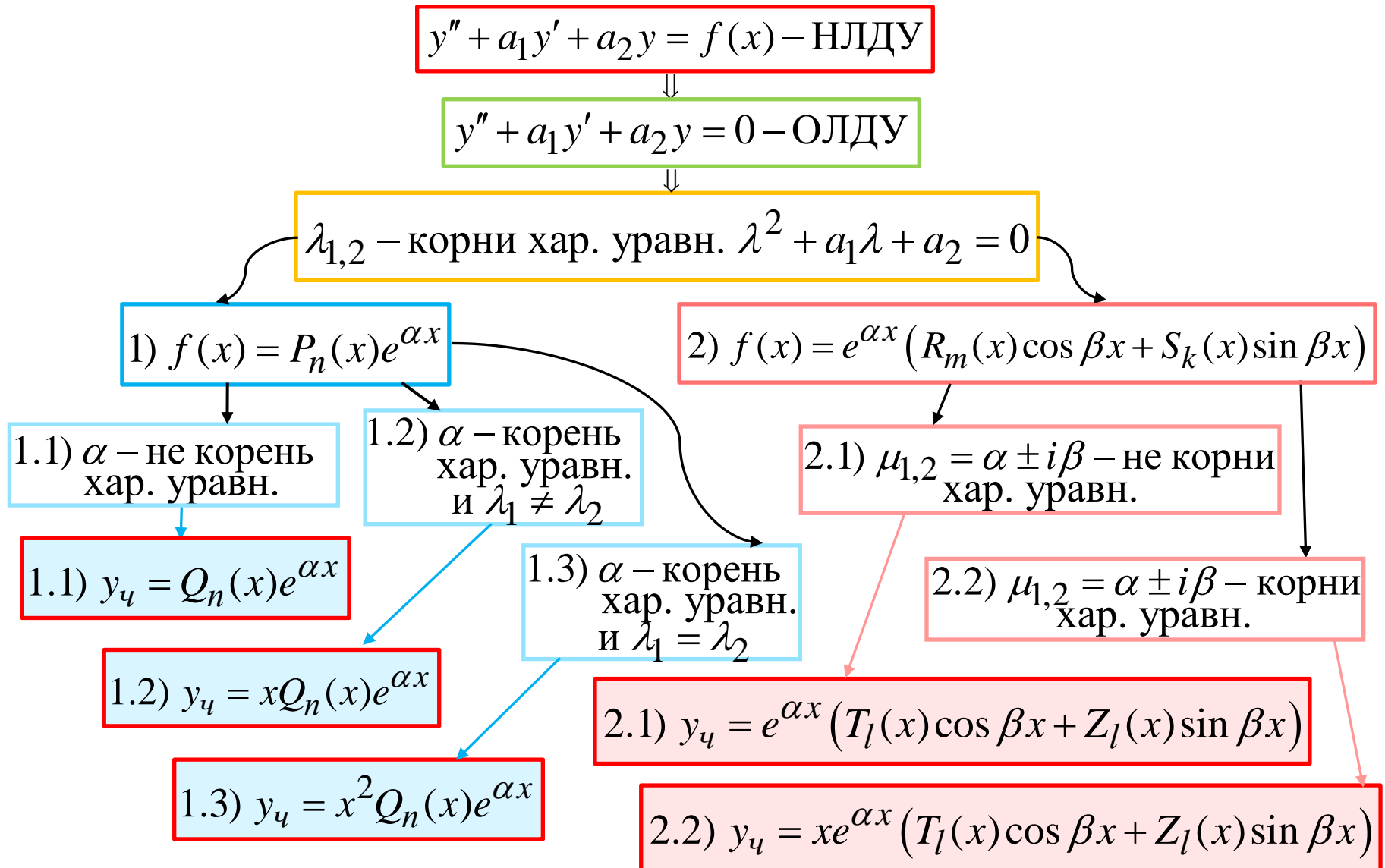
$$1) f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$$

$$2) f(x) = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

где $P_n(x)$, $R_m(x)$, $S_k(x)$ — многочлены степеней n , m , k и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Подбор частного решения уравнения (3) будет понятен из следующей схемы.

Алгоритм подбора частного решения НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом в правой части



Здесь $Q_n(x), T_l(x), Z_l(x)$ – многочлены с **неопределенными коэффициентами** степеней $n, l = \max\{m, k\}$ соответственно.

Вид многочлена $Q_n(x)$ с неопределенными коэффициентами той же степени n , что и у многочлена $P_n(x)$.

n – степень $P_n(x)$	$Q_n(x)$
$n = 0$ ($P_n(x)$ – число)	A
$n = 1$	$Ax + B$
$n = 2$	$Ax^2 + Bx + C$

Вид частного решения. Задача 1

Задача 1: Найти вид частного решения $y_{\text{ч}}$ ДУ

$$y'' - 3y' + 2y = f(x),$$

где а) $f(x) = 2e^{3x}$; б) $f(x) = xe^{-x}$;

в) $f(x) = e^x$; г) $f(x) = x^2 + x + 1$;

д) $f(x) = \cos x$; е) $f(x) = xe^x \sin 2x$.

Решение. Это НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом в правой.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ - характерист. уравнение ОЛДУ

$y'' - 3y' + 2y = 0$; $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ - его корни

Вид частного решения. Задача 1

$$\text{а) } f(x) = 2e^{3x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = 2, n = 0, \alpha = 3 \Rightarrow Q_n(x) = A$$

$$\alpha = 3 - \text{ не корень характ. уравн. } \Rightarrow y_{\text{ч}} = Ae^{3x}$$

$$\text{б) } f(x) = xe^{-x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = x, n = 1, \alpha = -1 \Rightarrow Q_n(x) = Ax + B$$

$$\alpha = -1 - \text{ не корень характ. уравн. } \Rightarrow$$

$$y_{\text{ч}} = (Ax + B)e^{-x}$$

Вид частного решения. Задача 1

$$в) f(x) = e^x = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = 1, n = 0, \alpha = 1 \Rightarrow Q_n(x) = A$$

$$\alpha = 1 - \text{корень характ. уравн.} \Rightarrow y_{\text{ч}} = Axe^x$$

$$\text{и } \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$г) f(x) = x^2 + x + 1 = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = x^2 + x + 1, n = 2, \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\alpha = 0 - \text{не корень характ. уравн.} \Rightarrow$$

$$y_{\text{ч}} = Ax^2 + Bx + C$$

Вид частного решения. Задача 1

$$д) f(x) = \cos x = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow R_m(x) = 1, S_k(x) = 0, m = k = l = 0, \\ \alpha = 0, \beta = 1$$

$$\Rightarrow T_l(x) = A, Z_l(x) = B$$

$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \pm i$ — не корни характ. уравн.

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = A \cos x + B \sin x$$

Заметим, что в частном решении присутствует и $\cos x$, и $\sin x$, хотя в правой части НЛДУ присутствует только $\cos x$!

Вид частного решения. Задача 1

$$e) f(x) = xe^x \sin 2x =$$

$$= e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow R_m(x) = 0, S_k(x) = x, m = 0, k = 1 \Rightarrow l = 1, \\ \alpha = 1, \beta = 2$$

$$\Rightarrow T_l(x) = Ax + B, Z_l(x) = Cx + D$$

$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ — не корни характ. уравн.

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = e^x \left((Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x \right)$$

Вид частного решения. Задача 2

Задача 2: Найти вид частного решения $y_{\text{ч}}$ ДУ

$$y'' - 2y' + y = e^x,$$

Решение.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ - характерист. уравнение

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

$$f(x) = e^x = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = 1, n = 0, \alpha = 1 \Rightarrow Q_n(x) = A$$

$\alpha = 1$ – **корень** характ. уравн. и $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\Rightarrow \boxed{y_{\text{ч}} = Ax^2e^x}$$

Вид частного решения. Задача 3

Задача 3: Найти вид частного решения $y_{\text{ч}}$ ДУ

$$y'' + 2y' + 2y = f(x),$$

где а) $f(x) = 3e^{2x}$; б) $f(x) = 2\sin 3x$;

в) $f(x) = xe^{-x} \cos x$.

Решение.

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ - характерист. уравнение

$$D = -4$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

Вид частного решения. Задача 3

$$\text{а) } f(x) = 3e^{2x} = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = 3, n = 0, \alpha = 2 \Rightarrow Q_n(x) = A$$

$$\alpha = 2 - \text{ не корень характ. уравн.} \Rightarrow y_{\text{ч}} = Ae^{2x}$$

$$\text{б) } f(x) = 2\sin 3x =$$

$$= e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow R_m(x) = 0, S_k(x) = 2, m = k = 0 \Rightarrow l = 0,$$

$$\alpha = 0, \beta = 3 \Rightarrow T_l(x) = A, Z_l(x) = B$$

$$\mu_{1,2} = \alpha \pm \beta i = \pm 3i - \text{ не корень характ. уравн.}$$

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = A \cos 3x + B \sin 3x$$

Вид частного решения. Задача 3

$$в) f(x) = xe^{-x} \cos x$$

$$= e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow R_m(x) = x, S_k(x) = 0, m = 1, k = 0 \Rightarrow l = 1, \\ \alpha = -1, \beta = 1$$

$$\Rightarrow T_l(x) = Ax + B, Z_l(x) = Cx + D$$

$$\mu_{1,2} = -1 \pm i - \text{корни характ. уравн.}$$

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = xe^{-x} ((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x)$$

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

Задача 5: Решить ДУ

$$4y'' - y = x^3 - 24x$$

Решение. Это НЛДУ с пост. коэфф. в левой части и квазимногочленом (даже просто многочленом) в правой.

$4\lambda^2 - 1 = 0$ - характерист. уравнение ОЛДУ

$$4y'' - y = 0;$$

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ - действительные корни, $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}x}, y_2 = e^{\frac{1}{2}x} - \text{ФСР}$$

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

$$y_0 = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} - \text{общее решение ОЛДУ}$$

$$f(x) = x^3 - 24x = P_n(x)e^{\alpha x} \Rightarrow$$

$$P_n(x) = x^3 - 24x, n = 3, \alpha = 0$$

$$\Rightarrow Q_n(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

$$\alpha = 0 - \text{не корень характ. уравн.} \Rightarrow$$

$$y_{\text{ч}} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D - \text{частное решение НЛДУ}$$

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

Подставим решение $y_{\text{ч}}$ в исходное уравнение:

$$y'_{\text{ч}} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_{\text{ч}} = 6Ax + 2B$$

$$4 \cdot (6Ax + 2B) - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 - 24x$$

$$-Ax^3 - Bx^2 + (24A - C)x + 8B - D = x^3 - 24x$$

$$\begin{cases} x^3 : -A = 1 \\ x^2 : -B = 0 \\ x : 24A - C = -24 \\ x^0 : 8B - D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ -24 - C = -24 \\ -D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

Метод неопред. коэффициентов. Задача 5

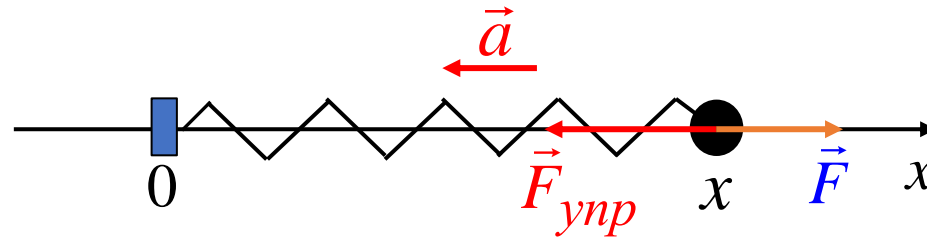
$y_{\text{ч}} = -x^3$ – частное решение НЛДУ

$y_{\text{н}} = y_0 + y_{\text{ч}}$ – общее решение НЛДУ
по теореме 2

Ответ: $y_{\text{н}} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x} - x^3$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Задача 6: Шарик массы $m = 0,01$ кг находится под действием двух сил: силы упругости, с $k = 1$ Н/м и возмущающей силы $F = F_0 \sin pt$ для $F_0 = 0,2$ Н и а) $p = 15$ Гц и б) $p = 10$ Гц. Найти зависимость отклонения x от полож. равновесия от времени.



Решение.

$$\vec{F}_{упр} + \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_{упр\ x} + F_x = ma_x$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$-kx + F_0 \sin pt = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin pt$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m} \sin pt$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = b \sin pt,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, b = \frac{F_0}{m}$$

\Rightarrow

$$\ddot{x} + 100x = 20 \sin pt - \text{ДУ}$$

$$\omega = 10, b = 20$$

Перепишем ДУ в более привычном для нас виде:

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$y'' + 100y = 20 \sin px \text{ – НЛДУ с пост. коэфф.}$$

в левой части и квазимн. в пр. части

$$\text{ОЛДУ: } y'' + 100y = 0$$

$$\lambda^2 + 100 = 0 \text{ – характер. уравнение}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-100} = \pm 10i \text{ – комплексн.-сопряж. корни}$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm 10i = \alpha_0 \pm i\beta_0 \Rightarrow \alpha_0 = 0, \beta_0 = 10$$

$$\Rightarrow y_1 = \cos 10x, y_2 = \sin 10x \text{ - ФСР}$$

$$y_0 = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x \text{ - общее решение ОЛДУ}$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$f(x) = 20 \sin px = \\ = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow R_n(x) = 0, S_k(x) = 20, m = k = 0 \Rightarrow l = 0, \\ \alpha = 0, \beta = p \Rightarrow T_l(x) = A, Z_l(x) = B$$

$$\lambda = \alpha \pm \beta i = \pm pi$$

$$a) p = 15$$

$$\Rightarrow \lambda = \alpha \pm \beta i = \pm 15i \text{ — не корни характ. уравн.}$$

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = A \cos 15x + B \sin 15x$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Подставим решение $y_{\text{ч}}$ в исходное уравнение:

$$y'' + 100y = 20 \sin 15x$$

$$y'_{\text{ч}} = -15A \sin 15x + 15B \cos 15x$$

$$y''_{\text{ч}} = -225A \cos 15x - 225B \sin 15x$$

$$\begin{aligned} &(-225A \cos 15x - 225B \sin 15x) + \\ &+ 100(A \cos 15x + B \sin 15x) = 20 \sin 15x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(-125A) \cos 15x + (-125B) \sin 15x = \\ &= 0 \cdot \cos 15x + 20 \sin 15x; \end{aligned}$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Приравняем коэффициенты при $\cos 15x$ и $\sin 15x$:

$$\begin{cases} -125A = 0 \\ -125B = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{4}{25} \end{cases}$$

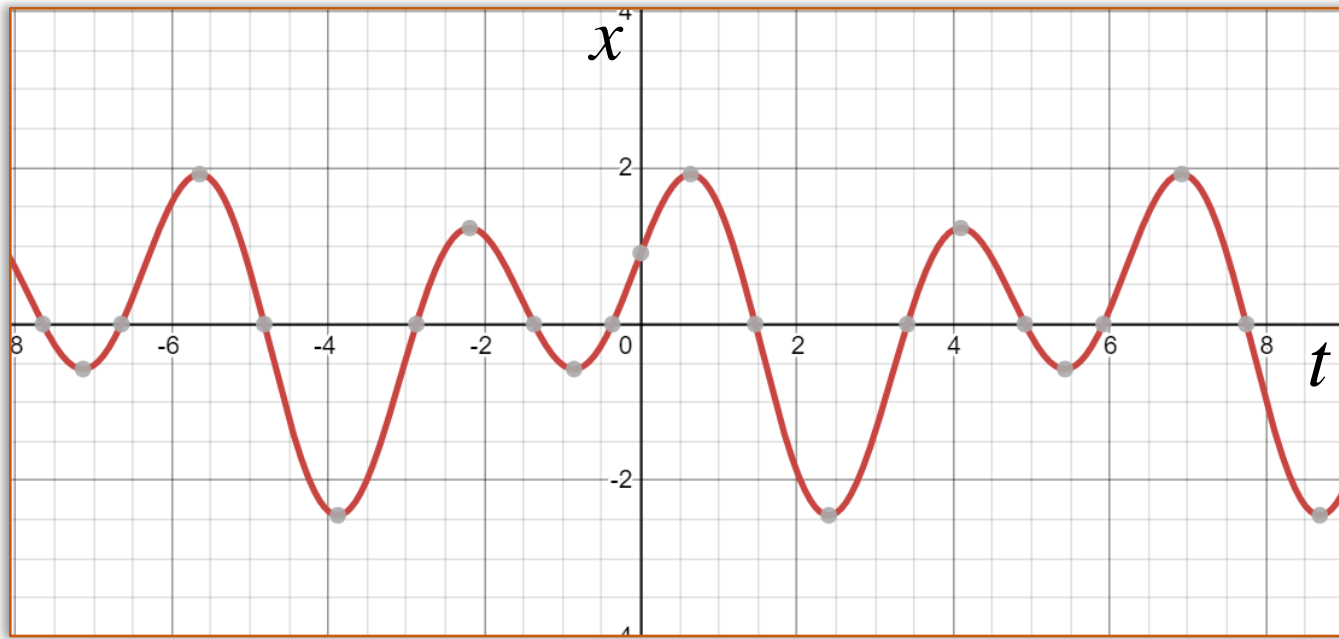
$$y_{\text{ч}} = -\frac{4}{25} \sin 15x$$

$$y_{\text{н}} = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x - \frac{4}{25} \sin 15x$$

- общее решение НЛДУ

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$x = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t - \frac{4}{25} \sin 15t$$



Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$б) p = 10$$

$$f(x) = 20 \sin 10x =$$

$$= e^{\alpha x} (R_m(x) \cos \beta x + S_k(x) \sin \beta x)$$

$$\Rightarrow R_n(x) = 0, S_k(x) = 10, m = k = 0 \Rightarrow l = 0$$

$$\alpha = 0, \beta = 10 \Rightarrow T_l(x) = C, Z_l(x) = D$$

$\lambda = \pm 10i$ – **корень** характ. уравн.

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = x(C \cos 10x + D \sin 10x)$$

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

Показать сам-но, что $C = -1, D = 0$.

$$\Rightarrow y_{\text{ч}} = -x \cos 10x$$

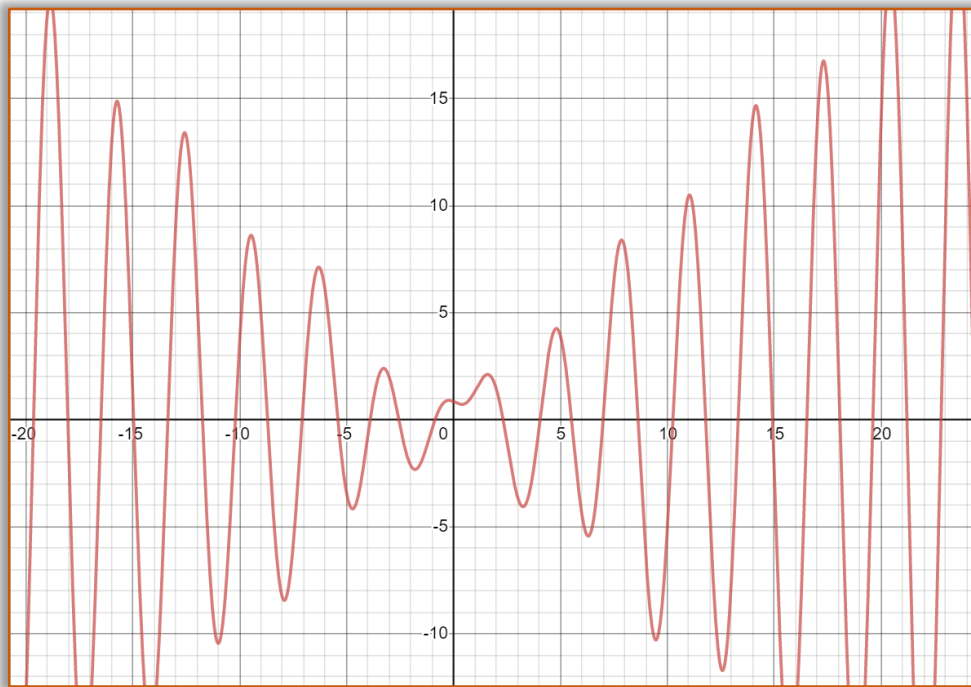
$$y_{\text{н}} = C_1 \cos 10x + C_2 \sin 10x - x \cos 10x$$

- общее решение НЛДУ

Метод неопр. коэфф. Задача 6 по физике

$$x = C_1 \cos 10t + C_2 \sin 10t - x \cos 10t$$

- общее решение НЛДУ



явление
резонанса!

Теорема о суперпозиции решений НЛДУ

Теорема 2 (о суперпозиции решений).

Если

- $y_0 = y_0(x)$ – общее решение ОЛДУ

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

- $y_{ч1} = y_{ч1}(x)$ – частное решение НЛДУ

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x)$$

- $y_{ч2} = y_{ч2}(x)$ – частное решение НЛДУ

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$$

Теорема о суперпозиции решений НЛДУ

то

$y_H = y_0 + y_{ч1} + y_{ч2}$ – общее решение НЛДУ

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x) + f_2(x)$$

Доказательство аналогично док-ву теоремы 1
(упр.)