Видеоурок по вычислению неопределенных интегралов можно найти ЗДЕСЬ

Неопределенный интеграл

Материалы для выполнения контрольной работы по курсу

«Основы высшей математики»

ИГУП. Реклама и связи с общественностью, заочное отделение

Лектор к.ф.-н., доцент Нагребецкая Ю.В.

План

- 1. Первообразная. Понятие неопределенного интеграла.
- 2. Метод замены переменных в неопределенном интеграле.
- 3. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

Первообразная. Примеры 1,2,3

Опр. Первообразной функцией для $f(x)$ называется функция $F(x)$, такая что $F'(x) = f(x)$.

Теорема. Если $F(x)$ первообразная функция для $f(x)$, то для любого числа C функция $(F(x) + C)$ – тоже первообразная для $f(x)$.

Доказательство.

$F'(x) = f(x)$ – по определению. Следовательно,

$$(F(x) + C)' = (F(x))' + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Теорема доказана.

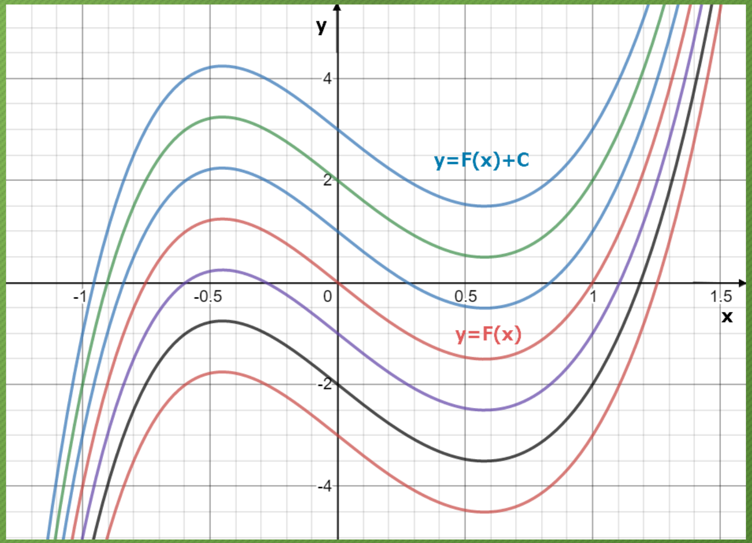
Примеры.

1. e^x — первообразная для e^x на $\mathbb{R}$.
2. $\sin x$ — первообразная для $\cos x$ на $\mathbb{R}$.
3. $\sqrt{x}$ — первообразная для $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0, +\infty)$.

Первообразная. Понятие неопределенного интеграла

4

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные функции для $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) \equiv C = const$.



Вывод: если известна одна первообразная функция $F(x)$ для $f(x)$, то прибавляя все возможные числа C получим все первообразные для $f(x)$.

Опр. Неопределенным интегралом от $f(x)$ называется множество всех первообразных функций для $f(x)$.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Первообразная. Неопределенный интеграл. Примеры 4,5,6

Пример 4

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot 2x = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2} - \text{первообразная для } f(x) = x \Rightarrow \int x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

Пример 5

$$\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)' = \frac{1}{2}(\sin 2x)' = \frac{1}{2}\cdot \cos 2x \cdot 2 = \cos 2x \Rightarrow F(x) = \frac{\sin 2x}{2} - \text{первообразная для } f(x) = \cos 2x \Rightarrow$$

$$\int \cos 2x\, dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$$

Пример 6

$$\left(-e^{-x}\right)' = -\left(e^{-x}\cdot(-1)\right) = e^{-x} \Rightarrow F(x) = -e^{-x} - \text{первообразная для } f(x) = e^{-x} \Rightarrow$$

$$\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C$$

Свойства неопределенного интеграла

Свойства неопределенного интеграла

1. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$
2. $\int d(F(x)) = F(x) + C.$
3. $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, где $A \in \mathbb{R}$.
4. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Свойства следуют непосредственно из определения неопределенного интеграла и свойств производной.

Таблица интегралов

Таблица интегралов

1. $\int 0\,dx = C.$
2. $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1.$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
на промежутке, не содержащем 0.
4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ для $a > 0,\ a \neq 1.$
В частности, $\int e^x\,dx = e^x + C.$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$
6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C,$
где $a > 0,\ |x| < a.$
10. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C = -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C.$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$
где $a > 0,\ |x| > a$ для знака "$-$" в формуле.
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$, где $x \neq \pm a.$

Интегрирование при помощи таблицы интегралов и свойств интегралов. Примеры 7,8,9

Пример 7. Найти интеграл $\int \sqrt{x}dx.$

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{1}{t^2}dt.$

$$\int \frac{1}{t^2}dt = \int t^{-2}dt = \frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C$$

Пример 9. Найти интеграл $\int (1-2u)du.$

$$\int (1-2u)du = \int 1du - \int 2udu = \int du - 2\int udu = u - 2\cdot\frac{u^2}{2} + C = u - u^2 + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле

- Теорема. Пусть 1) функция $y = f(x)$ непрерывна, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема.

Тогда

$$\boxed{\int f(x)dx = \left[x = \varphi(t)\right] = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt}$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 10

Найти $\int \frac{dx}{x+4}$

$$\int \frac{dx}{x+4} = \left[\begin{array}{c} u = x+4 \\ du = u'dx = (x+4)'dx = 1 \cdot dx = dx \\ du = dx \end{array} \right] = \int \frac{du}{u} =$$

$$= \ln|u| + C = \left[\begin{array}{l} \text{Возвращаемся к исходной} \\ \text{ переменной} \end{array} \right] = \ln|x+4| + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 11

Найти $\int e^{3x}dx$

$$\int e^{3x}dx = \left[\begin{array}{c} u = 3x \\ du = u'dx = (3x)'dx = 3 \cdot dx \\ dx = \frac{1}{3}du \end{array} \right] = \int e^{u} \cdot \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int e^{u}du =$$

$$= \frac{1}{3}e^{u} + C = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 12

Найти $\int (2x+5)^2 dx$

$$\int (2x+5)^2 dx = \left[\begin{array}{c} u = 2x+5 \\ du = u'dx = (2x+5)'dx = 2 \cdot dx \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right] = \int u^2 \cdot \frac{1}{2} du =$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 12 (продолжение)

Найти $\int (2x+5)^2 dx$

$$= \frac{1}{2}\int u^2 du + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2+1}}{2+1} + C = \frac{u^3}{6} + C = \frac{(2x+5)^3}{6} + C$$

Формула замены переменной в неопределенном интеграле. Пример 13

Найти $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \left[\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ du &= 2xdx \\ xdx &= \frac{1}{2}du \end{aligned}\right] = \frac{1}{2}\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C =$$

$$= \frac{1}{3}u\sqrt{u}+C = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+C$$

Формула интегрирования по частям

Теорема. Пусть функции $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы.

Тогда $\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$

Рекомендации по выбору u, v

Рекомендация I:

Пусть $P(x)$ – многочлен.

В интегралах $\int P(x)\cos x dx, \int P(x)\sin x dx, \int P(x)e^x dx.$

в роли u берём многочлен $P(x)$,

а в роли dv - всё остальное, включая dx.

$$v = \int dv$$

Константу С не прибавляем, поскольку нам нужна только одна функция v

Формула интегрирования по частям
Пример 14

Найти $\int xe^{2x}\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv} = \left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{v} - \int \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\underbrace{dx}_{du} =$$

$v = \int dv = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$ (константу C не прибавляем!)

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right) + C = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$$

Формула интегрирования по частям
Пример 15

Найти $\int x\cos x\,dx$

$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\cos x dx}_{dv} = \left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array}\right] = \underbrace{x}_{u}\underbrace{(\sin x)}_{v} - \int \underbrace{\sin x}_{v}\underbrace{dx}_{du} =$$

$v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x$ (константу C не прибавляем!)

$$= x\sin x - \int \sin x = x\sin x + \cos x + C$$

Рекомендации по выбору u, v

Рекомендация II:

В роли u берём "плохие" функции $\ln x$, $\ln f(x)$, $\arcsin f(x)$, $\arccos f(x)$, $\operatorname{arctg} f(x)$ и др.

В роли dv – все остальное, включая dx.

$$v = \int dv$$

Формула интегрирования по частям
Пример 16

Найти $\int \ln x\, dx$

$$\int \underbrace{\ln x}_{u}\, \underbrace{dx}_{dv} = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right] = \underbrace{(\ln x)}_{u} \cdot \underbrace{x}_{v} - \int \underbrace{x}_{v} \underbrace{\left(\frac{1}{x}dx\right)}_{du} =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$