Индивидуальный тест №6 по курсу

«Дифференциальная геометрия и топология»

Кривизна и кручение бирегулярной кривой в трехмерном пространстве

1) **Напишите свои ФИО и номер варианта**. Вариант можно найти в Списке баллов с лекциями.
2) Решите задачу.
3) Оформите четко и разборчиво. **Не забудьте написать условие задачи.**
4) Теоретический материал можно найти в *Лекции 5*, *Практикуме (параграф 4),* а также в учебных пособиях *С.В. Сизого «Лекции по дифференциальной геометрии»*.
5) **Ответ обязательно выделите**.
6) Сверьтесь с ответом, если он есть. Если ответ совпал, **поставьте знак плюс**.
7) Сделайте качественные фото.
8) Вставьте по порядку в ворд файл и сделайте единый pdf файл.
Или отсканируйте Вашу работу, сшив страницы, создав pdf файл.
9) Не забудьте отправить файл.

Вариант 1. Докажите, что для кривой $\alpha(t)=(3t-t^3,3t^2,3t+t^3)$ кривизна и кручение равны.

Вариант 2. Найдите кривизну кривой $\alpha(t)=(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t)$. **Ответ**: $k_1(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$.

Вариант 3. Найдите радиус $R_c(t)=\sqrt{R^2+\dfrac{\dot{R}^2}{k_2{}^2}}$ соприкасающейся сферы, где $R(t)=\dfrac{1}{k_1(t)}$, для кривой $\alpha(t)=\left(e^t\sin t,e^t\cos t,e^t\right)$. **Ответ**: $R_c(t)=3\sqrt{2}e^t$.

Вариант 4. Покажите, что у кривой $\alpha(t)=\left(2t,3t^2,3t^3\right)$ отношение кривизны к кручению постоянно.

Вариант 5. Найдите, при каких значениях *a* и *b* кручение кривой $\alpha(t)=\left(a\operatorname{ch}t,a\operatorname{sh}t,bt\right)$ во всех точках равно кривизне. **Ответ**: $a=b$.

Вариант 6. Найдите радиус $R_c(t)=\sqrt{R^2+\dfrac{\dot{R}^2}{k_2{}^2}}$ соприкасающейся сферы, где $R(t)=\dfrac{1}{k_1(t)}$, для кривой $\alpha(t)=(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t)$. **Ответ**: $R_c(t)=\left(e^t+e^{-t}\right)^2\sqrt{\dfrac{1}{2}+\left(e^t-e^{-t}\right)^2}$.

Вариант 7. Найдите кручение кривой $\alpha(t)=(e^t,e^{-t},\sqrt{2}t)$. **Ответ**: $k_2(t)=-\dfrac{\sqrt{2}}{\left(e^t+e^{-t}\right)^2}$.

Вариант 8. Найдите все такие функции $f(t)$, что кривая $\alpha(t)=\left(\cos 2t,\sin 2t,f(t)\right)$ является плоской. **Ответ**: $f(t)=C_1+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t$.

Вариант 9. Покажите, что у кривой $\alpha(t)=\left(t,\dfrac{t^2}{3},\dfrac{2}{27}t^3\right)$ отношение кривизны к кручению постоянно.

Вариант 10. Докажите, что кривая $\alpha(t)=\left(2t^2+t-3,-3t^2+2t+1,t^2+5\right)$ плоская.

Вариант 11. Найдите все такие функции $f(t)$, что кривая $\alpha(t)=\left(2\cos 4t,2\sin 4t,f(t)\right)$ является плоской. **Ответ**: $f(t)=C_1+C_2\cos 4t+C_3\sin 4t$.

Вариант 12. Найдите кручение кривой $\alpha(t)=(2t,\ln t,t^2)$. **Ответ**: $k_2(t)=-\dfrac{2t}{\left(1+2t^2\right)^2}$.

Вариант 13. Докажите, что кривая $\alpha(t)=\left(-t^2+2t-1,2t^2+2t+4,-t^2+4\right)$ плоская.

Вариант 14. Докажите, что радиус кривизны $R(t)=\dfrac{1}{k_1(t)}$ конической спирали $\alpha(t)=\left(\cos t\cdot e^{2t},\sin t\cdot e^{2t},3e^{2t}\right)$ пропорционален расстоянию от точки спирали до оси конуса - оси *Oz*.

Вариант 15. Найдите кривизну кривой $\alpha(t)=(2t,\ln t,t^2)$. **Ответ**: $k_1(t)=\dfrac{2t}{\left(1+2t^2\right)^2}$.

Вариант 16. Найдите кривизну кривой $\alpha(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t)$. **Ответ**: $k_1(t)=\dfrac{3}{25\sin t\cos t}$.

Вариант 17. Найдите кручение кривой $\alpha(t)=(\cos^3 t,\sin^3 t,\cos 2t)$. **Ответ**: $k_2(t)=\dfrac{4}{25\sin t\cos t}$.

Вариант 18. В каких точках радиус кривизны $R(t)=\dfrac{1}{k_1(t)}$ кривой $\alpha(t)=\left(a(t-\sin t),a(1-\cos t),4a\cos\left(t/2\right)\right)$ принимает минимальное значение? **Ответ**: $t=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 19. Докажите, что кривая $\alpha(t)=\left(\dfrac{1+t}{1-t},\dfrac{1}{1-t^2},\dfrac{1}{1+t}\right)$ плоская.

Вариант 20. Докажите, что радиус кривизны $R(t)=\dfrac{1}{k_1(t)}$ конической спирали $\alpha(t)=\left(2\cos t\cdot e^{-t},2\sin t\cdot e^{-t},e^{-t}\right)$ пропорционален расстоянию от точки спирали до оси конуса - оси *Oz*.

Вариант 21. Докажите, что кривая $\alpha(t)=\left(-4t^2+2t+5,t^2-2t+6,-t^2-4t\right)$ плоская.

Вариант 22. Найдите все такие функции $f(t)$, что кривая $\alpha(t)=\left(2\cos t,2\sin t,f(t)\right)$ является плоской. **Ответ**: $f(t)=C_1+C_2\cos t+C_3\sin t$.

Вариант 23. Покажите, что у кривой $\alpha(t)=\left(2t,\ln t,t^2\right)$ отношение кривизны к кручению постоянно.

Вариант 24. Найдите кривизну конической винтовой линии $\alpha(t)=\left(t\cos t,t\sin t,2t\right)$ в начале координат. **Ответ**: $k_1=2/5$.

Вариант 25. Докажите, что для кривой $\alpha(t)=(a\mathrm{ch}t,a\mathrm{sh}t,at)$ кривизна и кручение равны.