

Несобственный интеграл

Математика, II сем. ДФиПХ, ИЕНиМ.

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.

Несобственный интеграл I-го рода

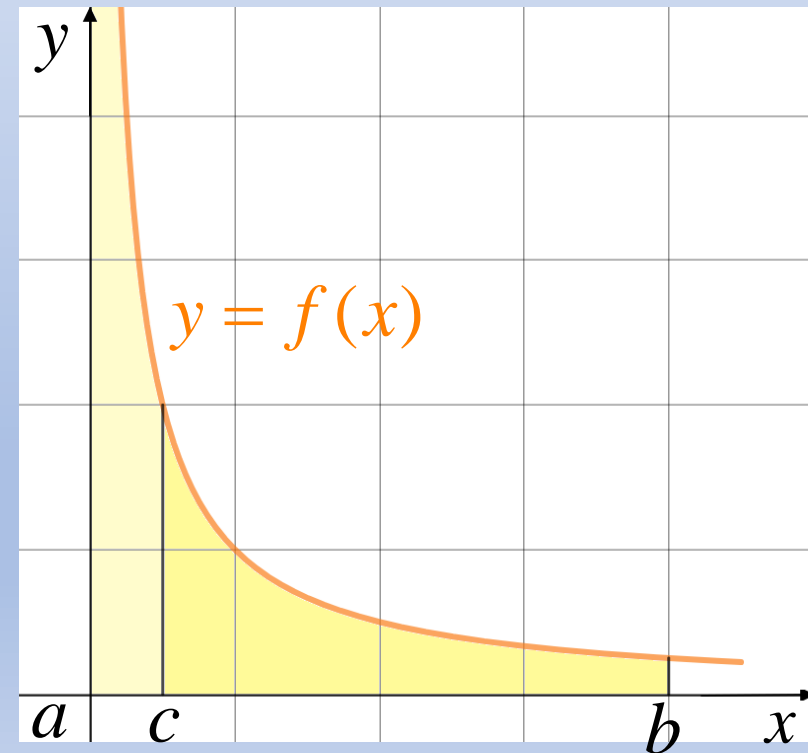
• **Определение.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a; b]$ и

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$. Если существует $\lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx$, то он называется **несобственным интегралом I-го рода**

и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx.$$



Несобственный интеграл II-го рода

- **Определение.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; +\infty)$.

Если существует $\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx$, то он называется **несобственным интегралом II-го рода**

и обозначается $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx.$$



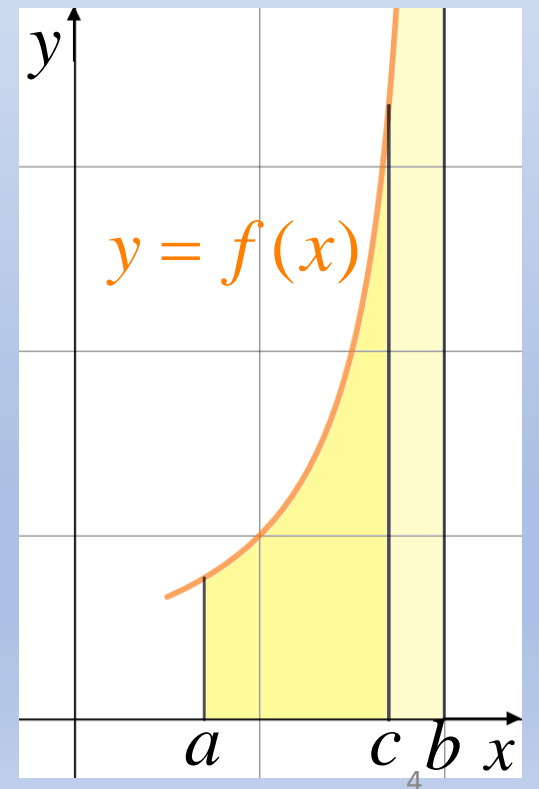
Несобственный интеграл I-го рода

- Аналогично определяется **несобственный интеграл I-го рода**

$$\int_a^b f(x) dx, \text{ если } y = f(x) \text{ непрерывна на } [a; b) \text{ и } \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty.$$

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx.$$



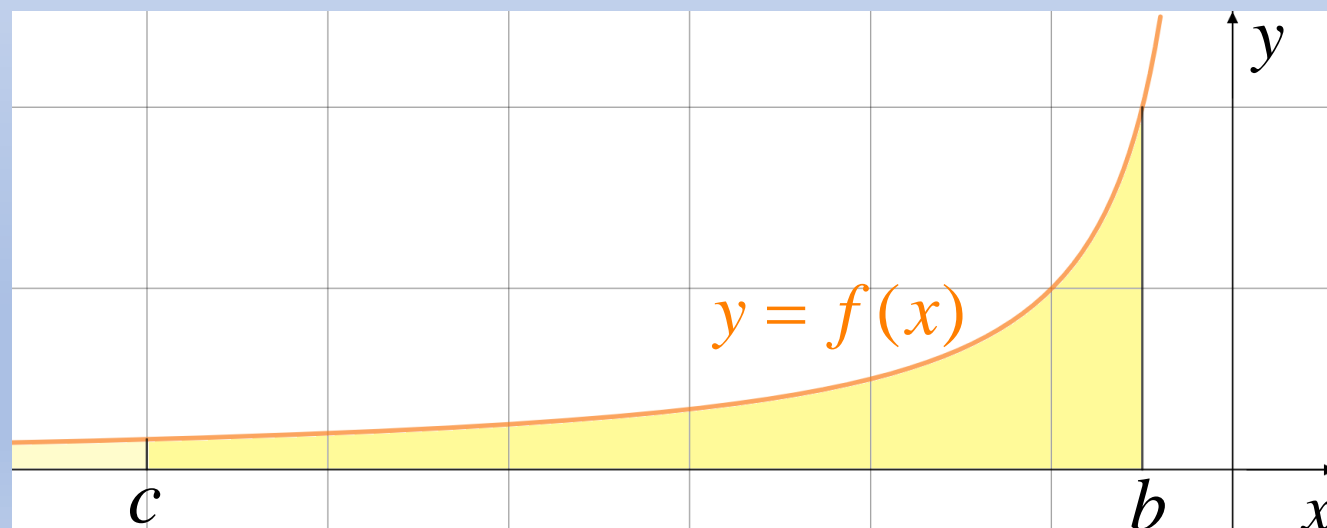
Несобственный интеграл II-го рода

- Аналогично определяется **несобственный интеграл II-го рода**

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx, \text{ если } y = f(x) \text{ непрерывна на } (-\infty; b].$$

Таким образом, по определению

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx.$$



Несобственный интеграл. Пример 1

Найти $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

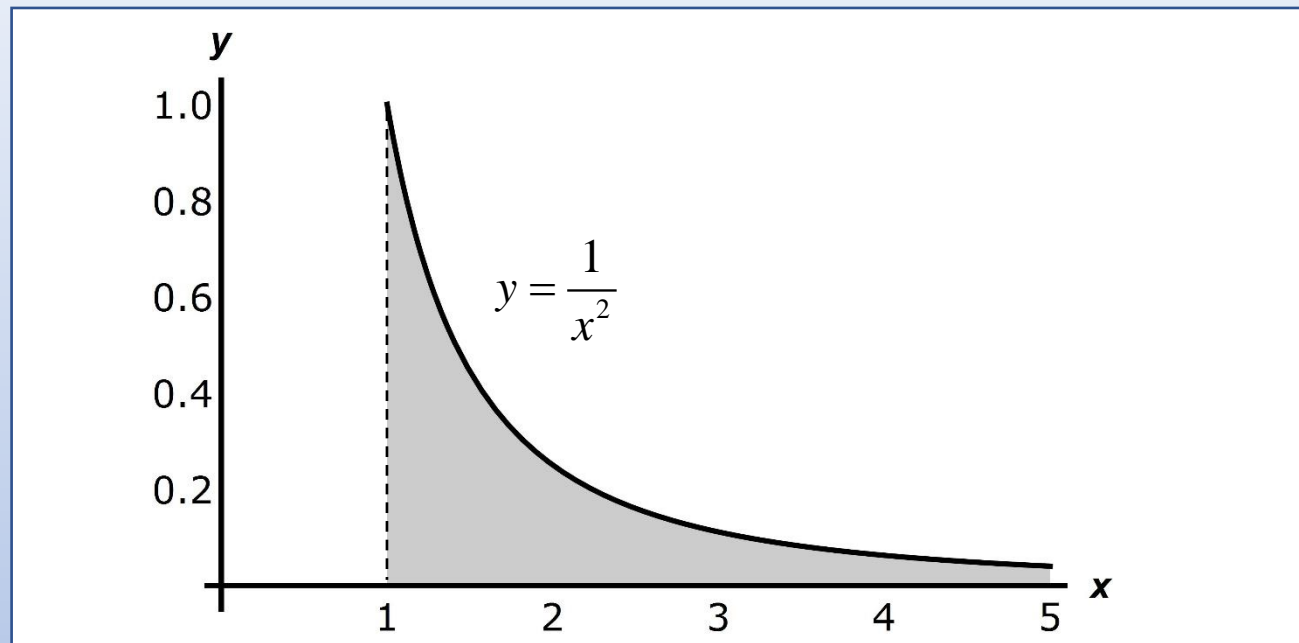
Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} &= \int_1^{+\infty} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{x} \Big|_1^{+\infty} = \\ &= \left[-\left(\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{1} \right) = -(0 - 1) = 1 \right] = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1

Задача 1. Найти $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$. Сделать чертеж.

Ответ: $\frac{1}{8}$



Несобственный интеграл. Пример 2

Найти $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

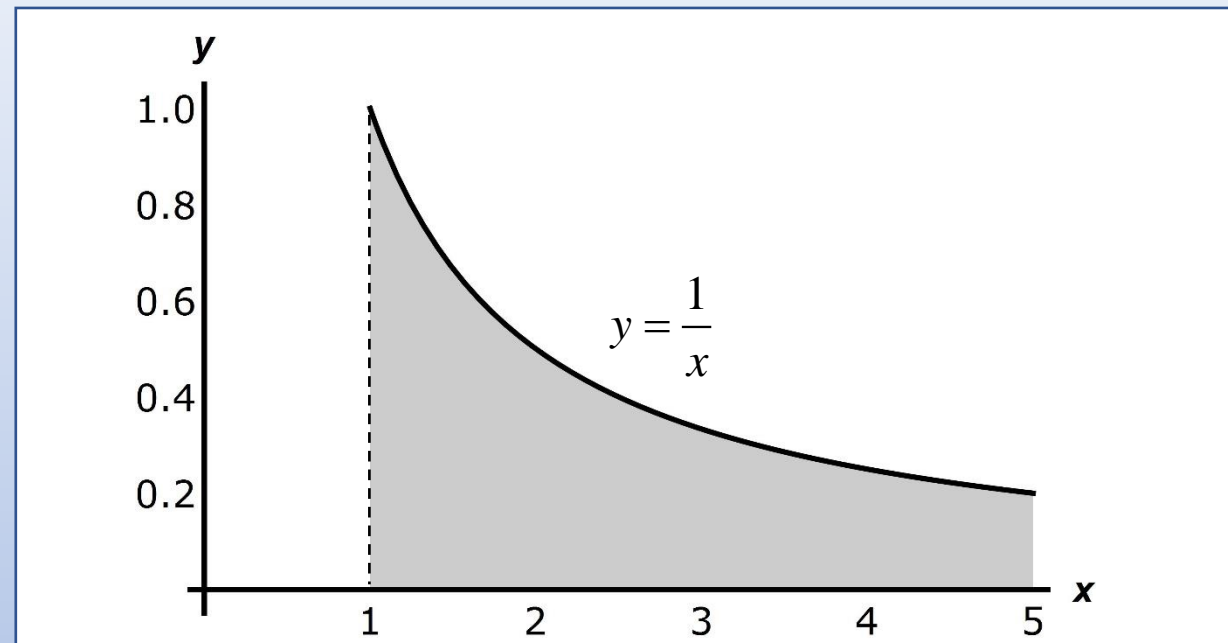
Решение.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} &= \ln|x| \Big|_1^{+\infty} = \\ &= [\ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty] = +\infty \end{aligned}$$

Ответ: интеграл расходится

Задача 2. Найти $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Сделать чертеж.

Ответ: интеграл расходится



Несобственный интеграл. Пример 3

Найти $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

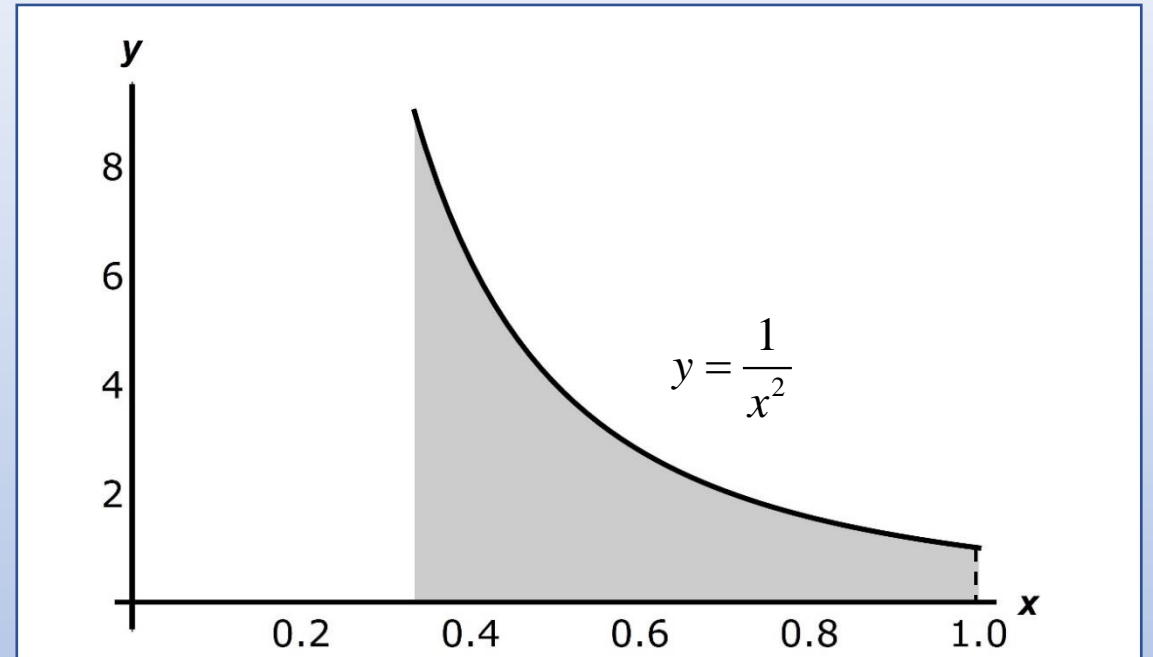
Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_0^1 x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = \left[-\left(1 - \frac{1}{0}\right) = \infty \right] = \infty \end{aligned}$$

Ответ: интеграл расходится

Задача 3. Найти $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Сделать чертёж.

Ответ: интеграл расходится



Несобственный интеграл. Пример 4

Найти $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

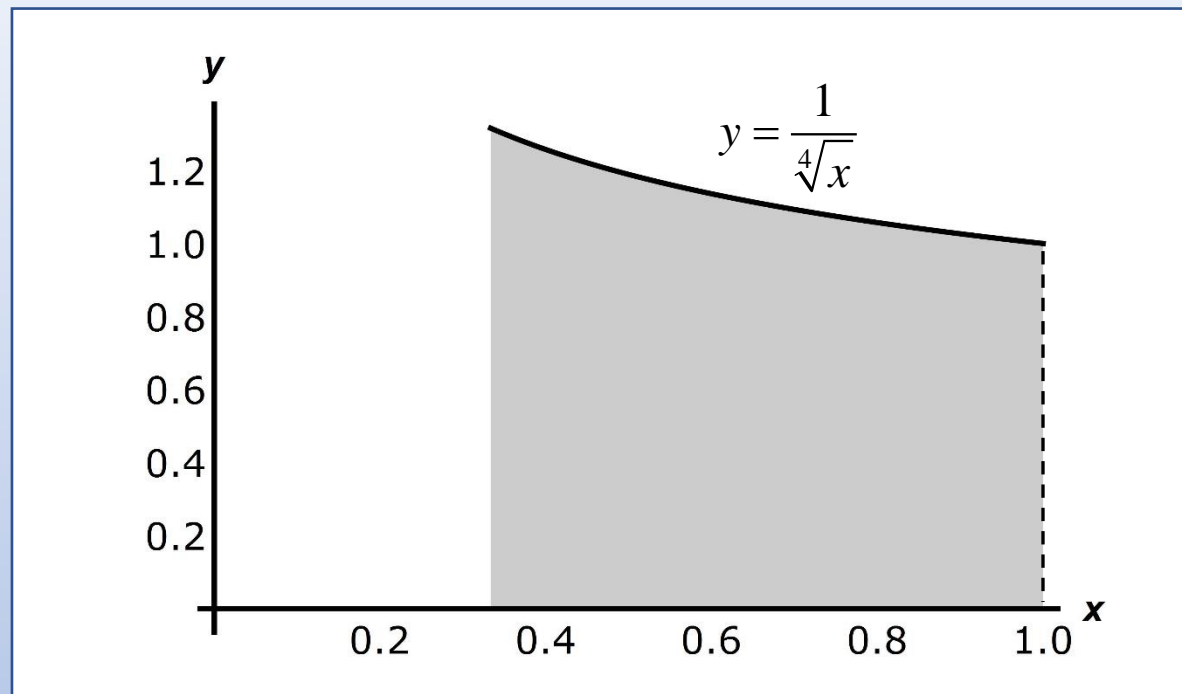
Решение.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} \Big|_0^1 = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} \Big|_0^1 = \left[\frac{4}{3} (1 - 0) \right] = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{4}{3}$

Задача 4. Найти $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Сделать чертёж.

Ответ: $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$



Несобственный интеграл. Пример 7 (площадь)

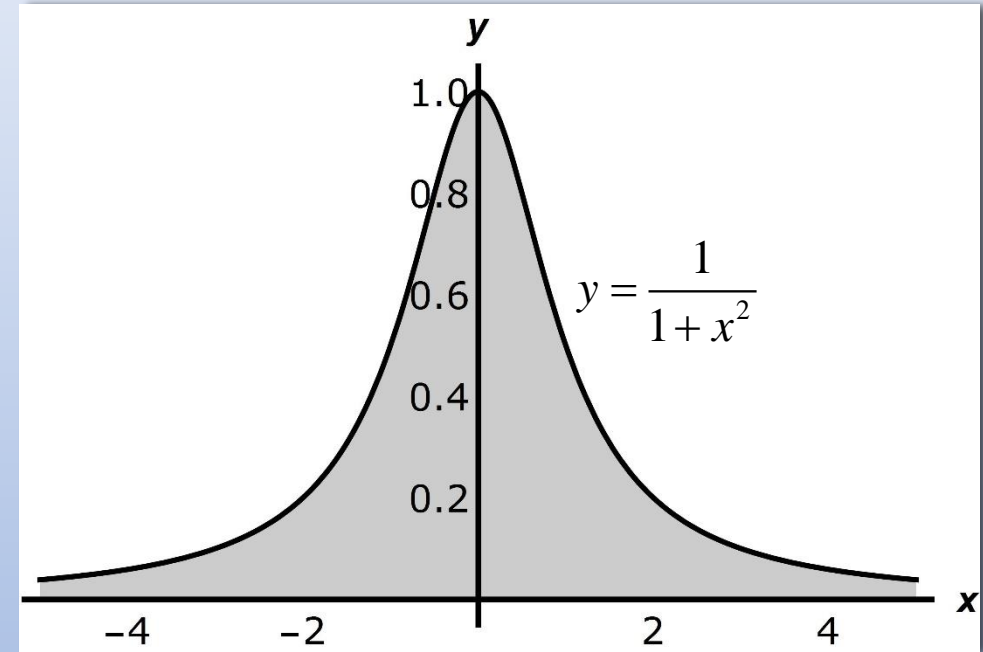
Задача 7.

Вычислить площадь фигуры, заключенной

между линией $y = \frac{1}{1+x^2}$ и её асимптотой
($y = 0$)

Решение. $S = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \dots$

Ответ: π



Несобственный интеграл. ВЫВОДЫ

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **СХОДИТСЯ** тогда и только тогда, когда $\alpha > 1$?

Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ **СХОДИТСЯ** тогда и только тогда, когда $\alpha < 1$?