# Определенный интеграл

Основы высшей математики. Часть 3. Практика №1-2.

В презентации использовались следующие учебные пособия:

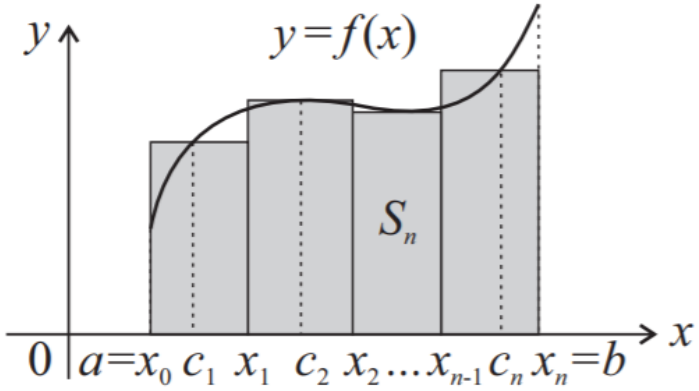
**Высшая математика** : учебное пособие / В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, М. М. Михалева, Н. В. Чуксина, И. А. Шестакова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — Ч. II. — 300 с.

**Трофимова, Е. А.**
Математические методы анализа : [учеб. пособие] / Е. А. Трофимова, С. В. Плотников, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 272 с.

Слайд 2

# Понятие определенного интеграла

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ частей: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.
На каждом отрезке разбиения произвольным образом выберем точку $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Построим прямоугольники с основаниями $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и высотами $f(c_i)$.
Получим ступенчатую фигуру.

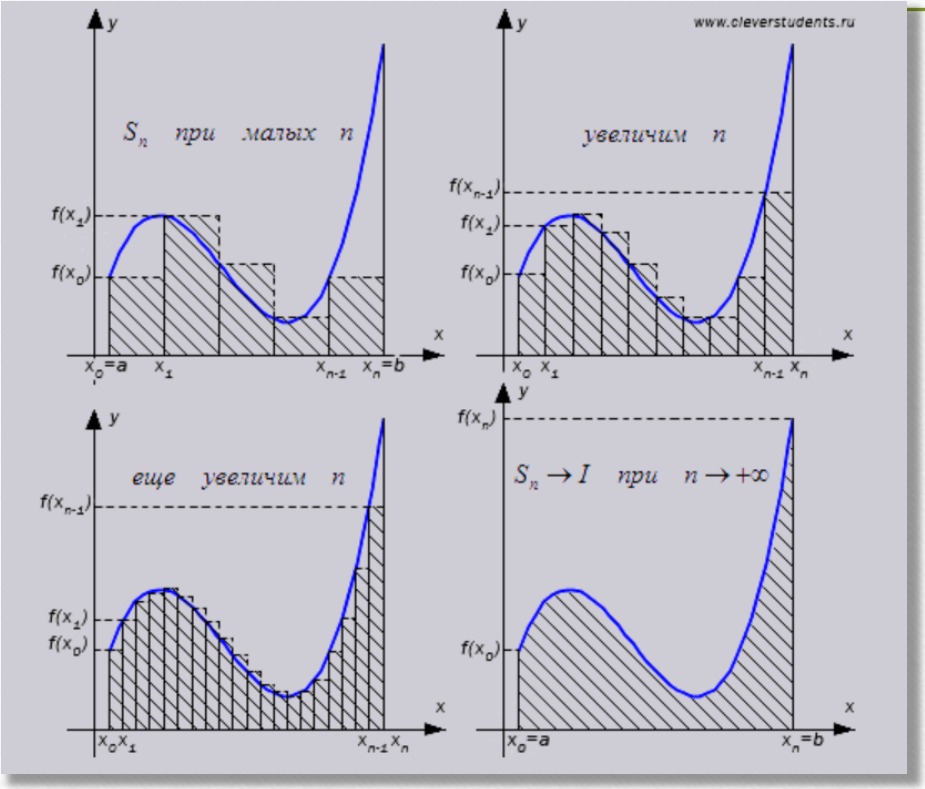



Площадь этой ступенчатой фигуры равна $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$.

$\lambda = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \Delta x_i$ называется диаметром разбиения. $\lim\limits_{\lambda \to 0} S_n = S$, если этот предел существует.

Слайд 3

# Определенный интеграл как предел интегральных сумм




**Определение.** *Определенным интегралом* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется конечный предел интегральной суммы при условии, что число разбиений $n$ стремится к бесконечности, а наибольшая из разностей $\Delta x_i$ стремится к нулю, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i.$$

Если $f(x) > 0$ при $x \in [a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$

Слайд 4

# Свойства определенного интеграла

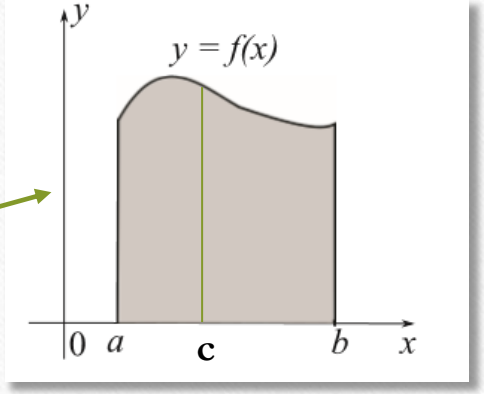
1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$

4. $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$ где $c - const.$

5. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$



# Формула Ньютона-Лейбница

- Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $F(x)$ - первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 1. $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

# Формула Ньютона-Лейбница. Задача 1(10 баллов)

**<u>Задача 1</u>.** Найти $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

Решают:

# Формула Ньютона-Лейбница. Задача 2(10 баллов)

**<u>Задача 1</u>.** Найти $\int_1^4 \sqrt{x}dx$.

Решают:

# Формула замены переменной в определенном интеграле

- Теорема. Пусть 1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$;

3) функция $x = \varphi(t)$ отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a,b]$;

4) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b.$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t)dt \\ x = a \to t = \alpha \\ x = b \to t = \beta \end{bmatrix} = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

# Формула замены переменной в определенном интеграле

## Пример 2

$$\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{2x}+1 \Rightarrow du = u'dx = \left(e^{2x}+1\right)' dx = 2e^{2x}dx \\ du = 2e^{2x}dx \Rightarrow e^{2x}dx = \dfrac{du}{2} \end{array}\right] =$$

$$x = 0 \to u = e^{2\cdot 0}+1 = 2$$

$$x = 1 \to u = e^{2\cdot 1}+1 = e^2+1$$

К старой переменной не возвращаемся!

$$= \int_2^{e^2+1} \sqrt{u}\cdot\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int_2^{e^2+1}\sqrt{u}\cdot du = \frac{1}{2}\int_2^{e^2+1} u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\Bigg|_2^{e^2+1} = \frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_2^{e^2+1} = \frac{1}{3}\left(\left(e^2+1\right)\sqrt{e^2+1}-2\sqrt{2}\right)$$

# Формула замены переменной в определенном интеграле

## Пример 3

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin 3x}{\cos 3x}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos 3x \Rightarrow du = u'dx = (\cos 3x)'\,dx = -3\sin 3x\,dx \\ du = -3\sin 3x dx \Rightarrow \sin 3x dx = -\dfrac{du}{3} \end{array}\right] =$$

$$x = 0 \to u = \cos(3\cdot 0) = 1$$

$$x = \tfrac{\pi}{9} \to u = \cos\left(3\cdot\tfrac{\pi}{9}\right) = \tfrac{1}{2}$$

$$\int_1^{1/2} \frac{1}{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}du\right) = -\frac{1}{3}\int_1^{1/2}\frac{du}{u} = -\frac{1}{3}\ln|u|\Big|_1^{1/2} = -\frac{1}{3}\left(\ln\left|\tfrac{1}{2}\right| - \ln|1|\right) = -\frac{1}{3}\left(\ln\tfrac{1}{2} - \ln 1\right) = -\frac{1}{3}(-\ln 2 - 0) = \frac{\ln 2}{3}$$

# Формула замены переменной в определенном интеграле. Задача 3 (10 баллов)

*Задача* 3. Найти $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

*Решают*:

# Формула замены переменной в определенном интеграле. Задача 4 (10 баллов)

*Задача* 4. Найти $\int_0^1 x^2 e^{x^3}\,dx$

*Решают*:

# Формула интегрирования по частям

- Теорема. Пусть функции $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

# Формула интегрирования по частям

## Пример 4

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv} = \left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{v}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\underbrace{dx}_{du} =$$

$$= 1\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 1}\right) - 0\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^{2\cdot 1} - \frac{1}{4}e^{2\cdot 0}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

# Формула интегрирования по частям

## Пример 5

$$\int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\cdot\underbrace{dx}_{dv} = \begin{bmatrix} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{bmatrix} = (\underbrace{\ln x}_{u})\cdot\underbrace{x}_{v}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_{v}\underbrace{\left(\frac{1}{x}dx\right)}_{du} =$$

$$= (\ln e)\cdot e - (\ln 1)\cdot 1 - \int_1^e dx = 1\cdot e - 0\cdot 1 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1$$

# Формула интегрирования по частям. Задача 5 (10 баллов)

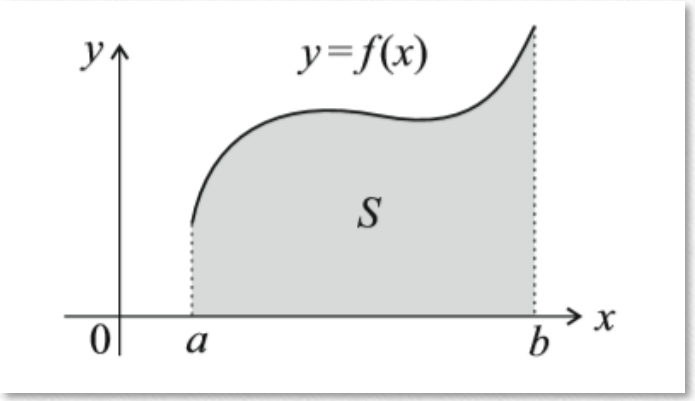
<u>Задача 2</u>. Найти $\int_0^{\pi/2} x\sin 2x dx.$

Решают:

# Формула вычисления площади

Если $f(x)$ — неотрицательная непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, $S$ — площадь криволинейной трапеции под графиком этой функции, то

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$



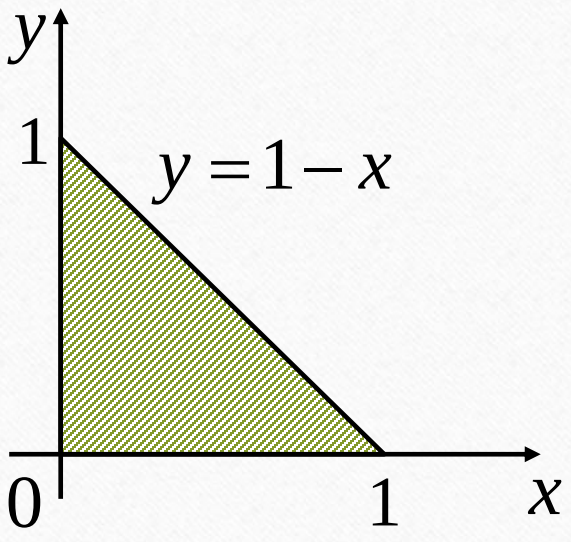
# Формула вычисления площади

## Пример 6

Найти площадь криволинейной трапеции под графиком $y = 1 - x$, если $x \in [0, 1]$.

$$S = \int_0^1 (1 - x)\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$$

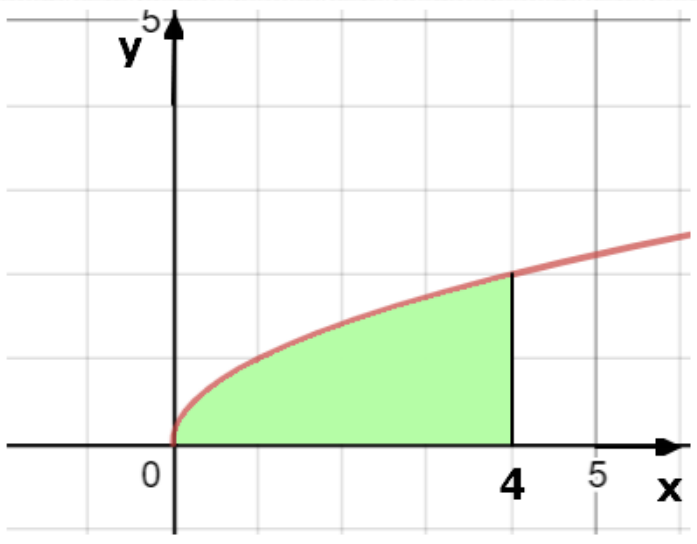
$$= (1 - 0) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



# Формула вычисления площади. Задача 6 (10 баллов)

*Задача* 4. Найти площадь криволинейной трапеции под графиком $y = \sqrt{x}$, если $x \in [0, 4]$.

*Решают*:



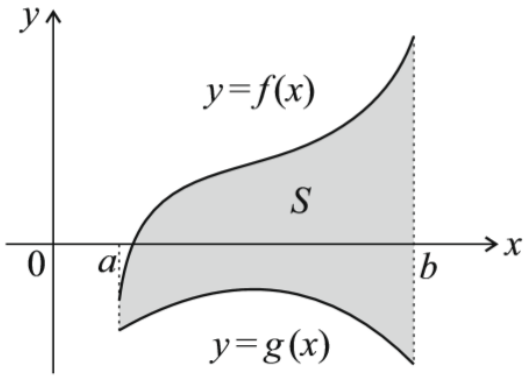
Слайд 20

# Формула вычисления площади

**Утверждение (формула площади плоской фигуры)**

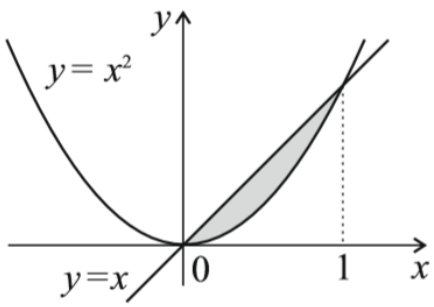
Площадь плоской фигуры, ограниченной сверху графиком функции $f(x)$, снизу — графиком функции $g(x)$, слева и справа прямыми $x = a$ и $x = b$ соответственно, равна

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$



# Формула вычисления площади. Пример

**Пример.** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$ и $y = x^2$.

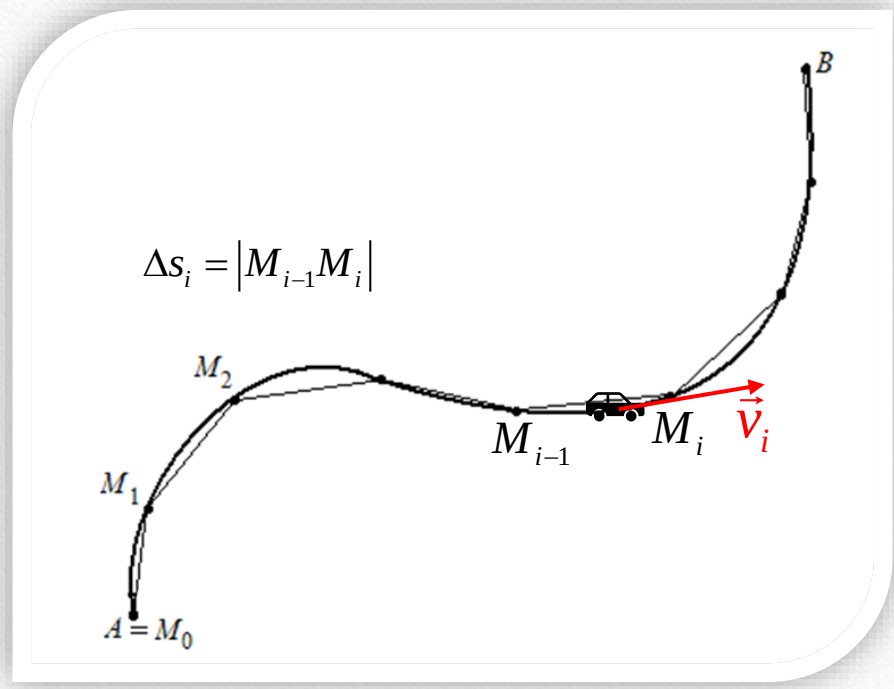



Найдем точки пересечения линий аналитически, решая систему уравнений $\begin{cases} y = x, \\ y = x^2. \end{cases}$

Имеем $x = x^2$, т. е. $x(x-1) = 0$, откуда $x = 0, y = 0$ или $x = 1, y = 1$.

$$S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

# Физическое приложение определенного интеграла: нахождение пройденного пути по мгновенной скорости




$$\upsilon \cong \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_N = \sum_{i=1}^{N} \Delta s_i$$

$$\Delta s_i \cong \upsilon_i \Delta t_i$$

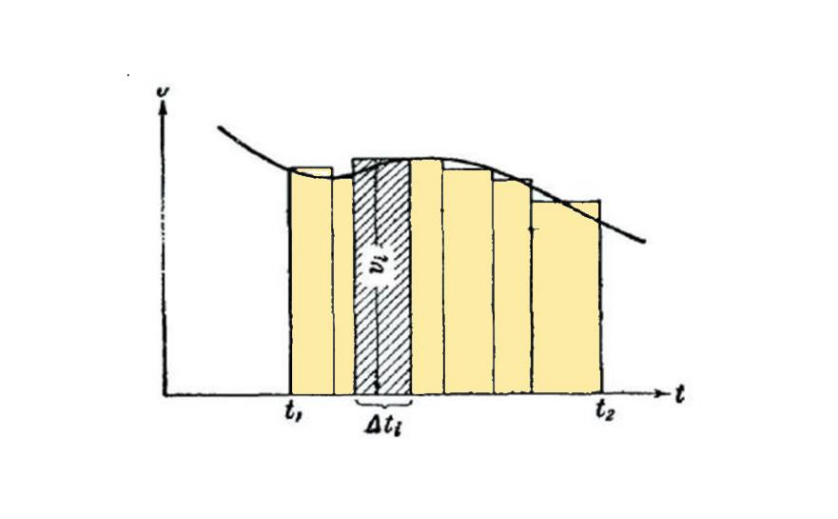
$$s \cong \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t_i$$

$$s = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i \Delta t_i$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,dt$$

Савельев И.В. Курс общей физики, том I

# Физическое приложение определенного интеграла: нахождение пройденного пути по мгновенной скорости




$$S(t) = \int_0^t v(t)dt, \quad v(t) = \int_0^t a(t)dt$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

S(t) - пройденный путь (километраж) за время t

v(t) – скорость в момент времени t