Основы высшей математики (лекция), часть 1

1. **Понятие функции. Предел функции.**
2. **Непрерывность функции.**
3. **Дифференцируемость. Приложение производной.**

В презентации использовались учебные пособия

Трофимова, Е. А.
Т 761 Математические методы анализа : [учеб. пособие] / Е. А. Трофимова, С. В. Плотников, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 272 с.

Пискунов Н. С. **Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов**, т. 1: Учебное пособие для втузов.— 13-е изд.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985.— 432 с.

1. Числовые множества. Понятие числовой функции

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ - множество натуральных чисел

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ - множество целых чисел

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N \right\}$ - множество обыкновенных дробей, или множество рациональных чисел

R - множество всех конечных и бесконечных десятичных дробей – множество действительных чисел

Примеры. 1) $1, 5, 10 \in N$ 2) $-6, 0, 15 \in Z$ 3) $\frac{2}{3}, -1\frac{1}{5} = \frac{-6}{5} \in Q$ 4) $-5{,}17634, \sqrt{2}, \pi, e \in R$

$\pi = 3{,}14159\dots$

$e = 2{,}71828\dots$

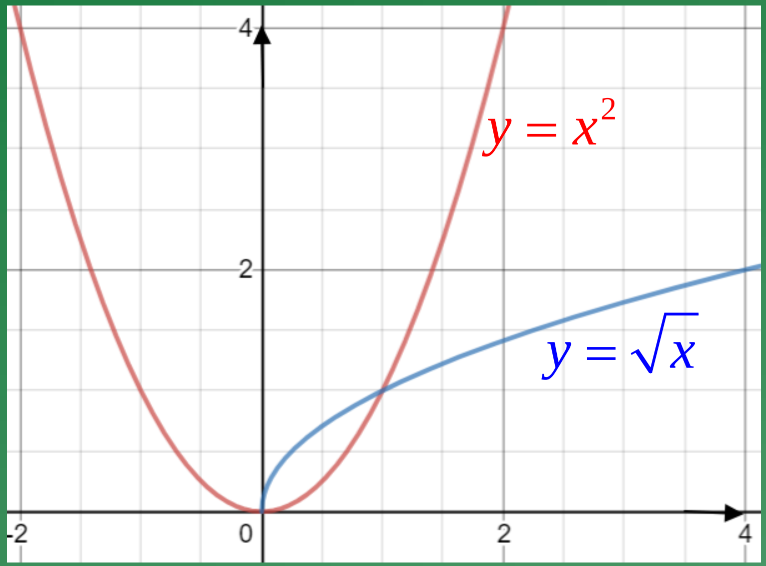
1. Понятие числовой функции

Определение. **Числовой функцией** $y = f(x)$**, определенной на множестве *D*, называется правило *f*, которое каждому значению** $x \in D$ **единственным образом сопоставляет число *y*.**

D **– область определения функции.**

Примеры. 1) $y = f(x) = x^2, \quad D = R$

2) $y = f(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty)$



1. Понятие сложной функции

Определение. Сложная функция – функция, образованная последовательным выполнением нескольких функций.

Сложная функция $y = f(u(x))$ **получена из двух функций** $y = f(u)$ **и** $u = u(x)$

Примеры. 1) $y = \sin^2 x$ **получена из** $y = u^2$ **и** $u = \sin x$

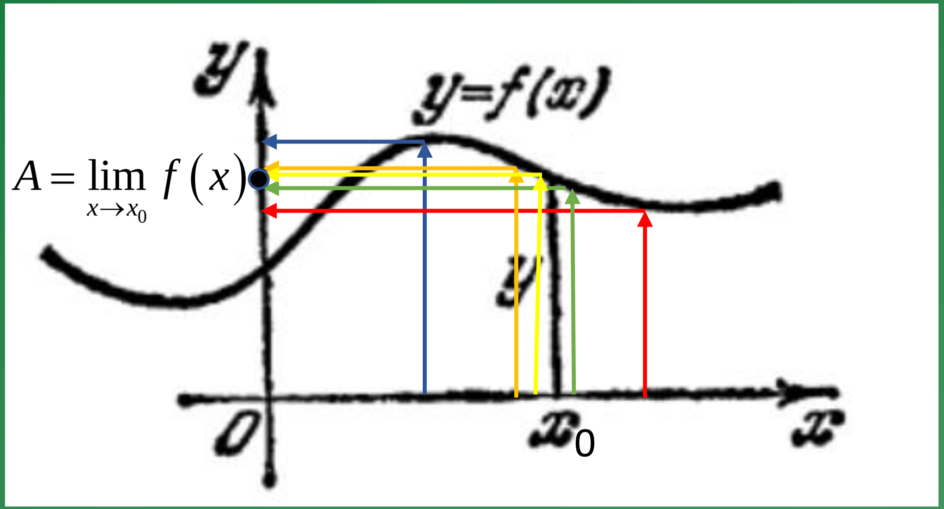
2) $y = \sin(x^2)$ **получена из** $y = \sin u$ **и** $u = x^2$

2. Понятие предела числовой функции

<u>Определение</u>. **Пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется такое число ***A***, что ***y*** приближается к ***A***, когда ***x*** приближается к x_0 (при этом $x \neq x_0$)

Часто, но не всегда $A = f(x_0)$

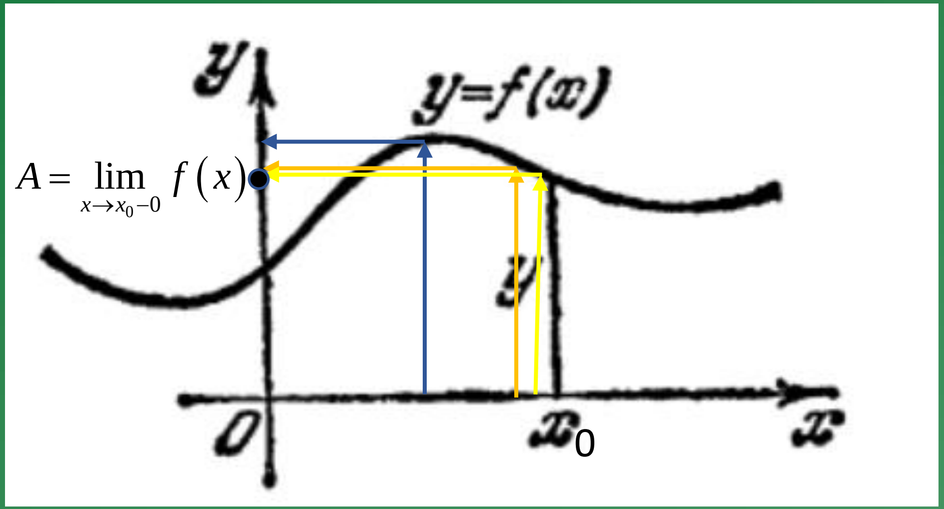
Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$



2. Понятие одностороннего предела числовой функции

Опред. Левым пределом функции $y = f(x)$ **в точке** $x = x_0$ **называется такое число *A*, что *y* приближается к *A*, когда *x* приближается к** x_0 **слева (при этом** $x < x_0$ **)**

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$



Аналогично вводится определение правого предела

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$

2. Понятие предела числовой функции. Примеры

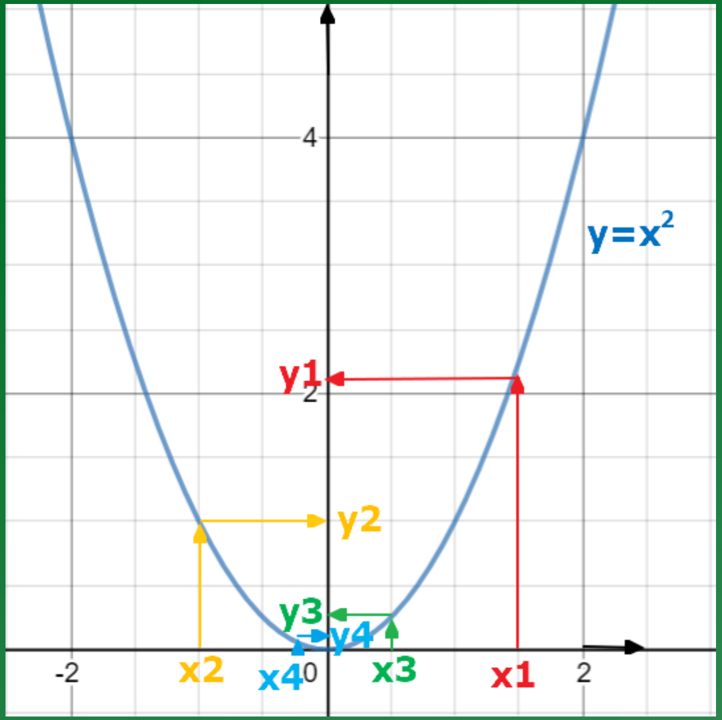
Примеры. 1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^2 = 0;$ 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty;$ 3) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0;$

4) $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x) = \sin 0 = 0;$ 5) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0} - \text{не имеет смысла}\right] =$

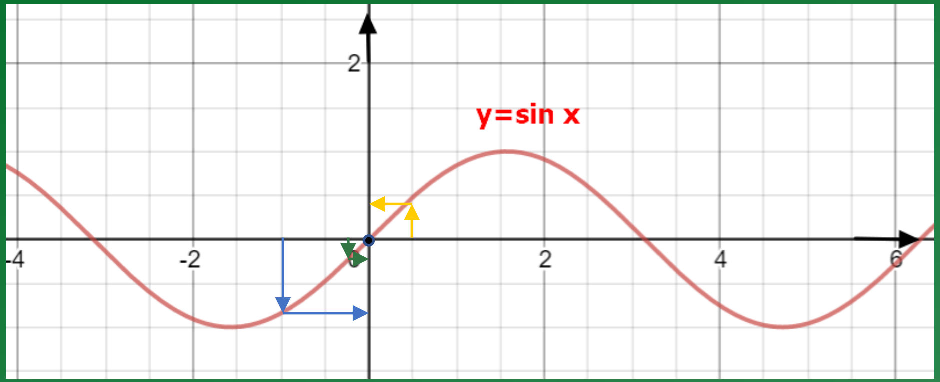
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

***x* приближается к 1** $(x \neq 1) \Rightarrow x-1 \neq 0,$ **можно делить на** $x-1$

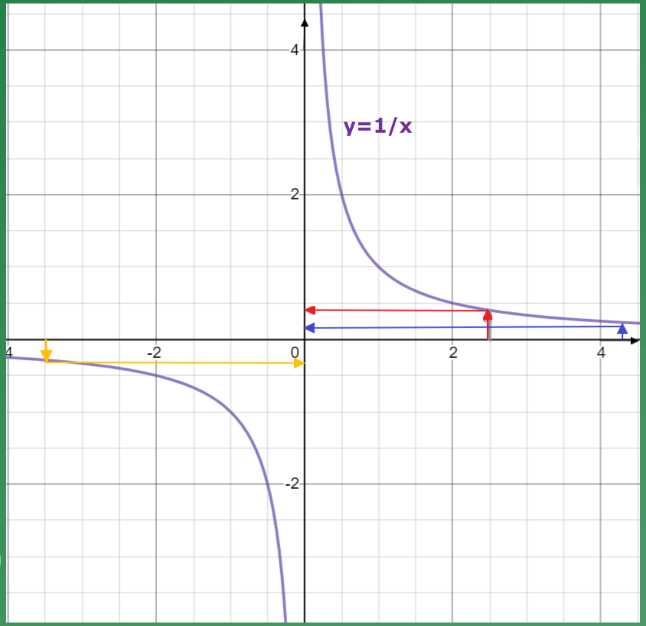
2. Понятие предела числовой функции. Примеры



1) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$



4) $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$



2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} = \infty$

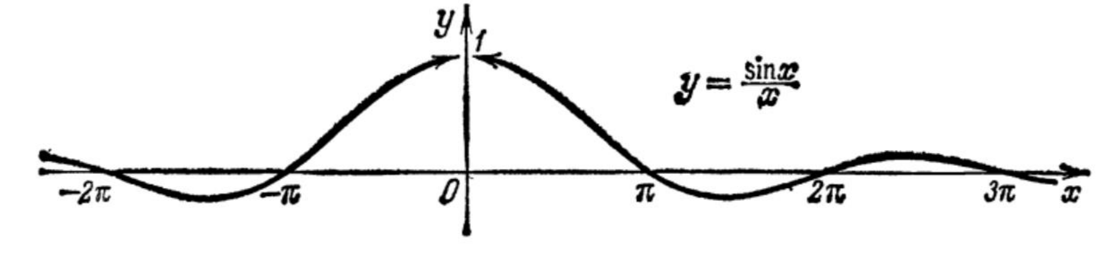
3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x} = \left[\dfrac{1}{\infty}\right] = 0$

2. Понятие предела числовой функции. Замечательные пределы

Первый замечательный предел

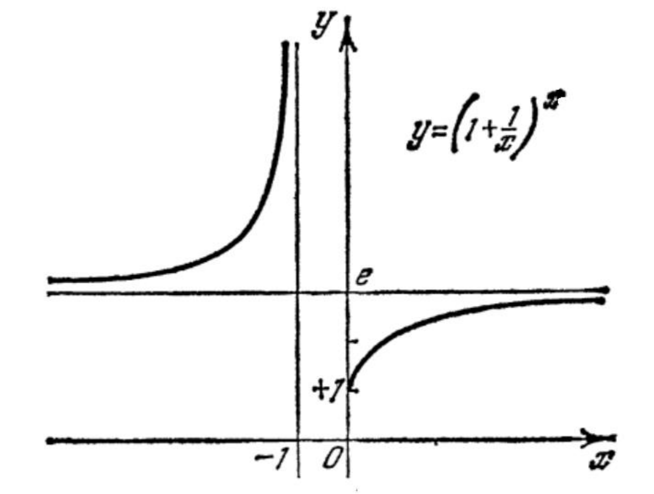
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

x измеряется в радианах



Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718281\ldots \quad \left[1^\infty\right]$$



2. Непрерывность функции в точке.

Непрерывность функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве D и пусть точка $x_0 \in D$.

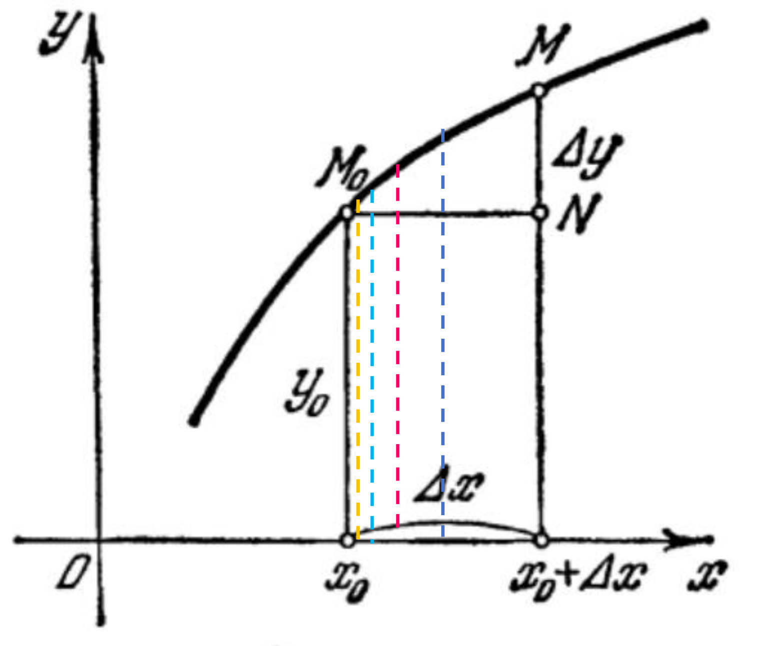
Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если выполняются три условия:

1) функция определена в точке x_0;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0, \Delta x = x - x_0, \Delta f = \Delta y = f(x) - f(x_0)$$



3. Непрерывность функции на множестве.

Непрерывность функции на множестве

Функция, непрерывная в любой точке множества D, называется *непрерывной на множестве* D.

Опр. Элементарной функцией называется функция, полученная из школьных при помощи арифметических операций и операцией образования сложной функции

Утверждение. Основные элементарные функции непрерывны в каждой точке их области определения.

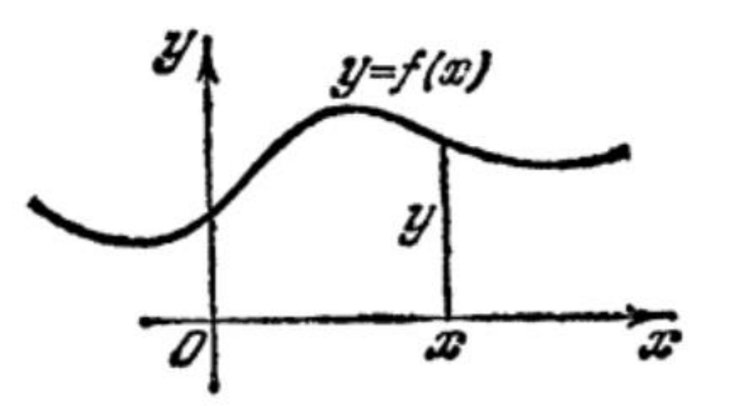
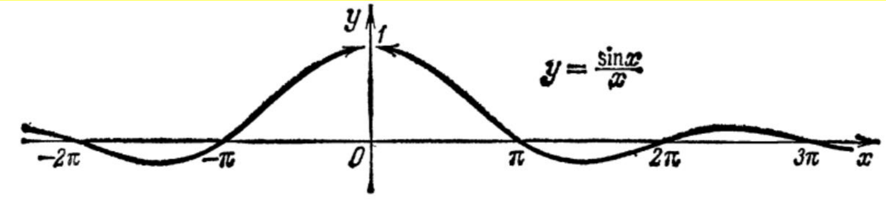


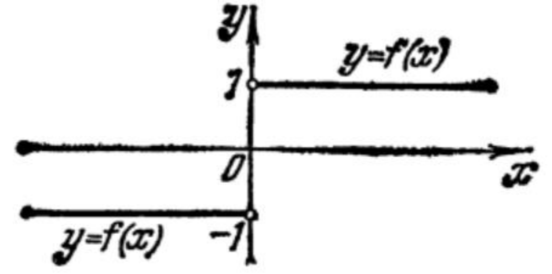
График непрерывной функции на интервале – сплошная линия, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги

3. Точки разрыва функции и их классификация.

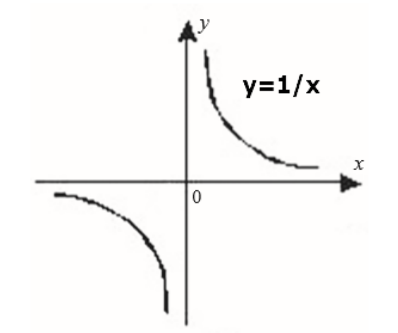
Точка x_0, в которой функция $y = f(x)$ обладает свойством непрерывности, называется *точкой непрерывности* функции, в противоположном случае точка x_0 называется *точкой разрыва* функции.



Если односторонние пределы существуют, равны между собой, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, а функция $y = f(x)$ не определена в точке x_0 или $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*.



Если x_0 — точка разрыва $f(x)$, существуют конечные пределы справа и слева, которые не равны между собой, то точка x_0 называется точкой разрыва первого рода.

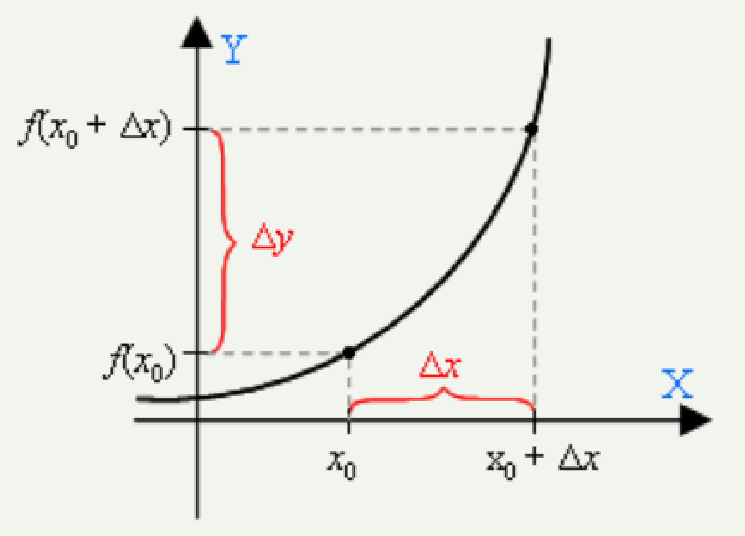


Если хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен, то точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода*.

3. Дифференцируемость. Понятие производной.

Опр. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, при стремлении последнего к 0, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0.$$



Подробную информацию можно найти ЗДЕСЬ

Производная в точке – скорость изменения функции в этой точке

3. Дифференцируемость. Понятие производной.

Пример

Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}, \text{ где } \Delta f = f(x) - f(x_0), \quad \Delta x = x - x_0.$$

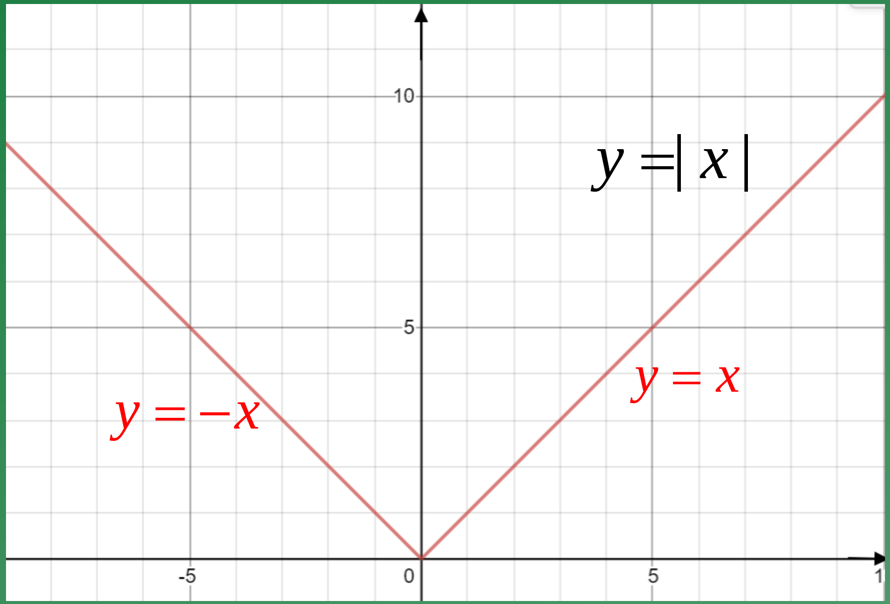
3. Дифференцируемость. Понятие производной.

Теорема.

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

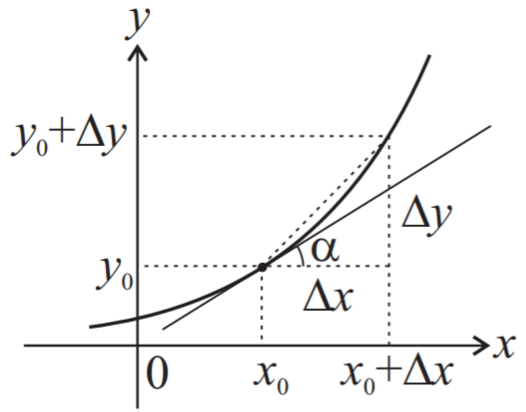
Обратное неверно: функция может быть непрерывна, но не дифференцируема в точке.

$$f(x) = |x|,\ x_0 = 0$$



3. Дифференцируемость. Геометрический смысл производной.

Геометрический смысл производной



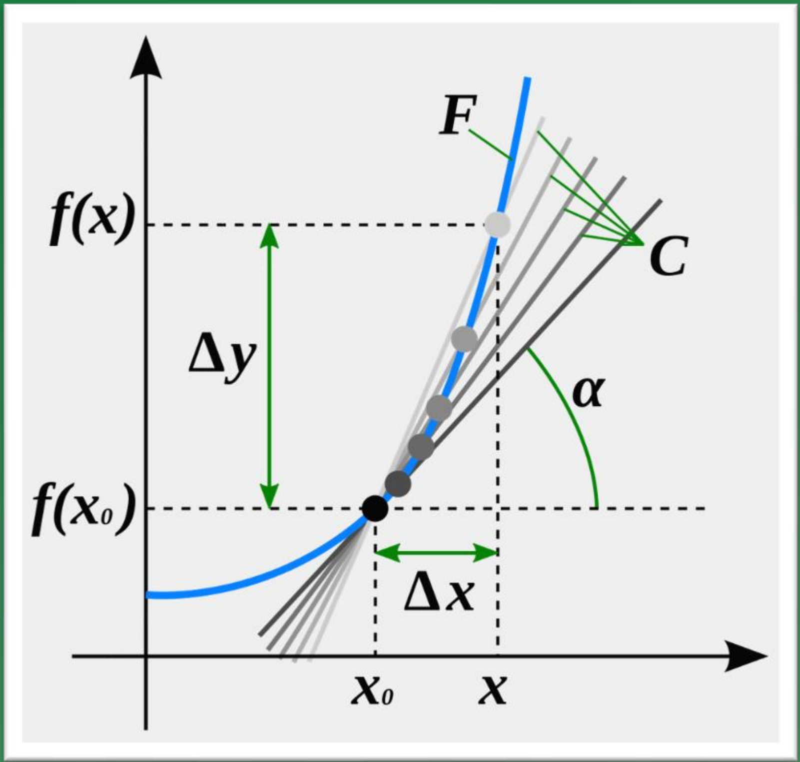
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей.

При $\Delta x \to 0$ получим $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — тангенс угла наклона касательной.

Значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$



Подробную информацию можно найти ЗДЕСЬ

3. Дифференцируемость. Геометрический смысл производной.

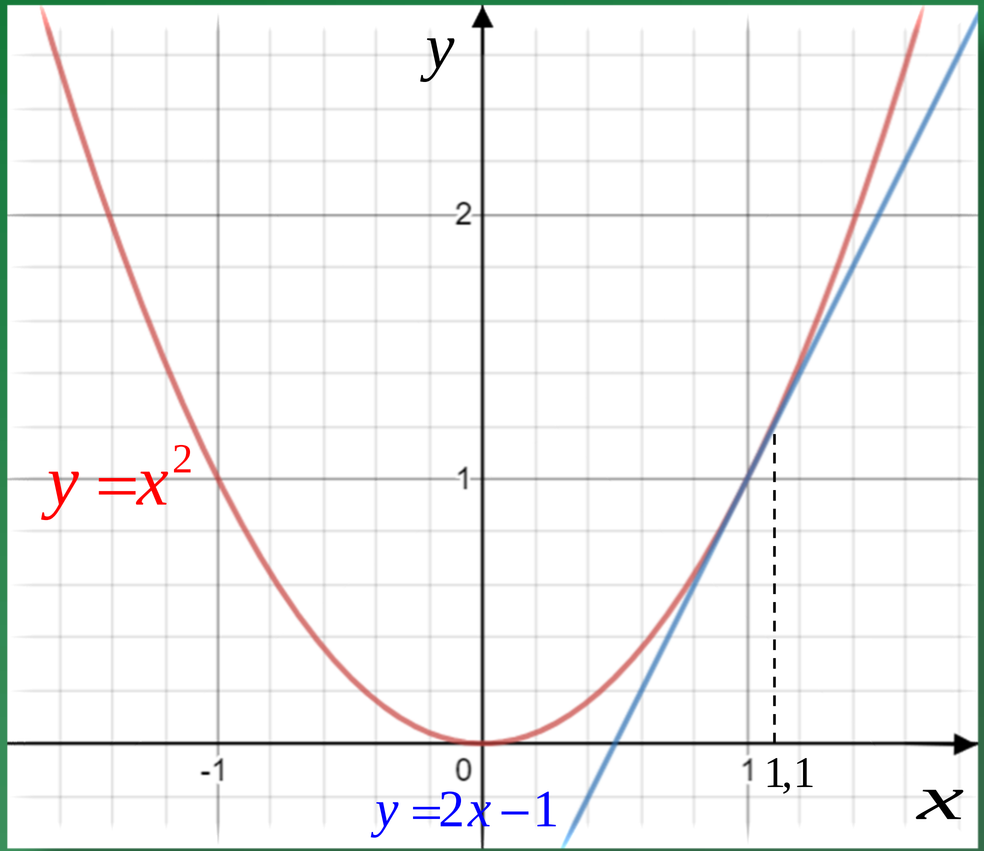
Пример. $y = x^2,\ y' = 2x,\ x_0 = 1$

$$y'(x_0) = 2,\ y_0 = y(x_0) = 1$$

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$



3. Дифференцируемость. Механический смысл производной.

$x = x(t) -$ координата материальной точки, движущейся по прямой

$v = v(t) = x'(t) -$ мгновенная скорость точки

$$v(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$a = a(t) = v'(t) = x''(t) -$ мгновен. ускорение точки

3. Дифференцируемость. Понятие дифференциала.

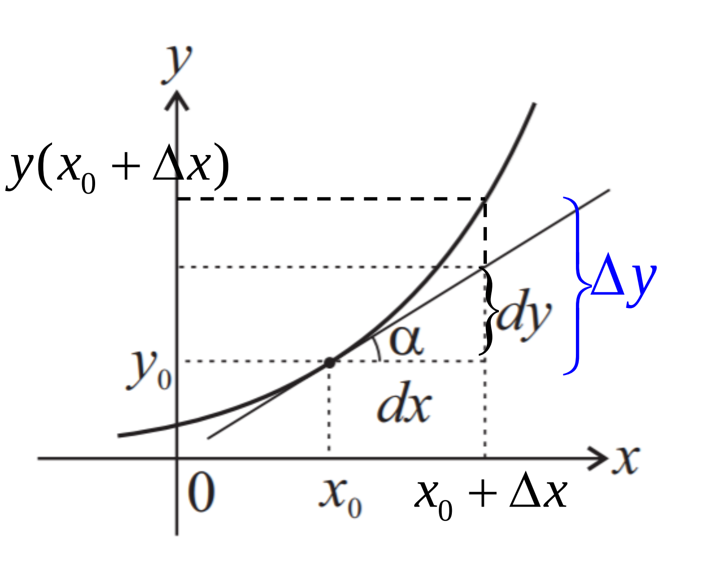
Опред. Функция $y = y(x)$ дифференцируемой в точке $x = x_0$, если существует конечный предел

$$\boxed{y'(x_0) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Отсюда $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0 \Rightarrow$ $\boxed{\Delta y = \underbrace{y'(x_0)\Delta x}_{dy} + \alpha(\Delta x)\Delta x}$ $\boxed{\Delta y \approx dy}$

3. Дифференцируемость. Геометрический смысл дифференциала.

Дифференциал функции в точке — это приращение ординаты касательной к графику функции в этой точке.



$$dy = y'(x_0)\Delta x = \operatorname{tg}\alpha\Delta x$$
$$dx = (x)'\Delta x = \Delta x$$

$$dy = y'(x_0)dx \qquad \Delta y \approx dy$$

Пример. $y = x^2,\ y' = 2x,\ dy = y'(x_0)dx = 2x_0dx$

при $\Delta x = 0.1,\ x_0 = 1$

$dy = 2\cdot\Delta x = 0.2$

$\Delta y = y(x_0+\Delta x) - y(x_0) = y(1{,}1) - y(1) = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21$

3. Дифференцируемость. Свойства производной.

Теорема (свойства производной).

Пусть u и v — функции. Тогда

1. $(u+v)' = u' + v'$;
2. $(Cu)' = Cu'$, где $C \in \mathbb{R}$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ в точках, где $v \neq 0$.

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,
   в частности, $(e^x)' = e^x$;
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

3. Дифференцируемость. Производная сложной функции

1) $y=(3x-17)^{10}$

$y=u^{10}, y'=10u\cdot u'=10\cdot(3x-17)^9\cdot(3x-17)'=$

$=10\cdot(3x-17)^9\cdot 3=30\cdot(3x-17)^9$

2) $y=\operatorname{arctg}(7x+1)^{10}$

$y=\operatorname{arctg}u, y'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'=\dfrac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot(7x+1)'=$

$=\dfrac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot 7=\dfrac{7}{1+(7x+1)^2}$

3) $y=\sin^2 x,\ f=u^2, u=\sin x,$

$y'=2u\cdot u'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x$

$(u^n)'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
$(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$	$(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$
$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$	$(arcctgu)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

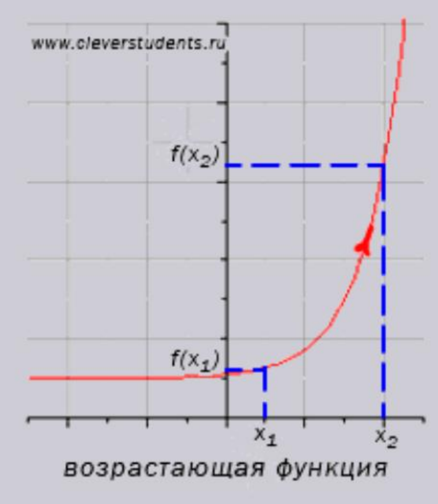
$y(x)=f(u(x))\Rightarrow y'_x=f'_u(u(x))\cdot u'_x(x)=f'(u)\cdot u'$

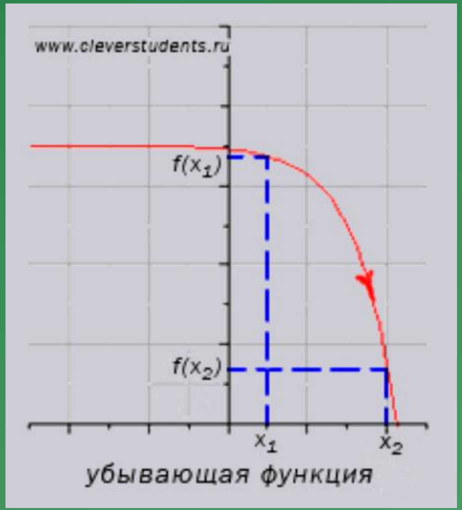
Видеоурок по дифференцированию сложной функции можно найти ЗДЕСЬ

3. Приложения производной. Определение монотонности функции

Опр. Функция $f(x)$ называется возрастающей на $[a,b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a,b]$, таких что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$.

Опр. Функция $f(x)$ называется убывающей на $[a,b]$, если для любых $x_1, x_2 \in [a,b]$, таких что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) > f(x_2)$.





4. Приложения производной. Связь монотонности и производной

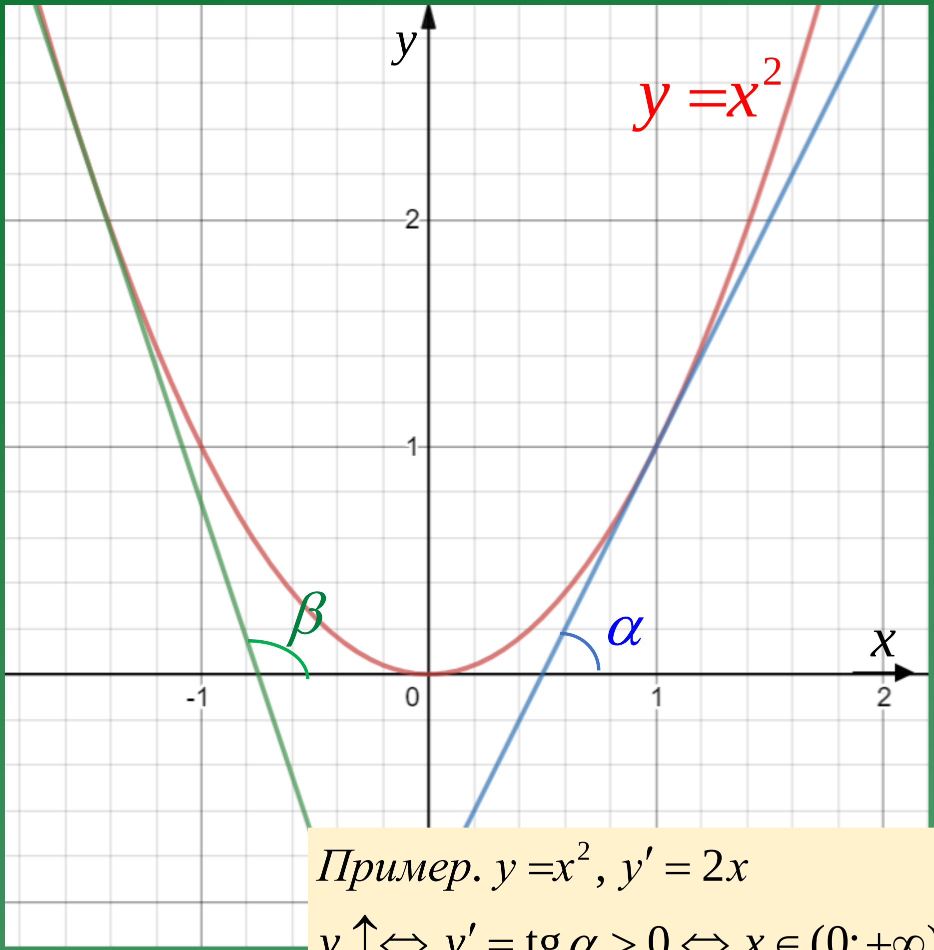
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a,b]$.

Теорема (необходимое условие возрастания).
Если $f(x)$ возрастающая на $[a,b]$, то $f'(x) \geq 0$ на $[a,b]$.

Теорема (достаточное условие возрастания).
Если $f'(x) > 0$ на $[a,b]$, то $f(x)$ возрастающая на $[a,b]$.

Теорема (необходимое условие убывания).
Если $f(x)$ убывающая на $[a,b]$, то $f'(x) \leq 0$ на $[a,b]$.

Теорема (достаточное условие убывания).
Если $f'(x) < 0$ на $[a,b]$, то $f(x)$ убывающая на $[a,b]$.

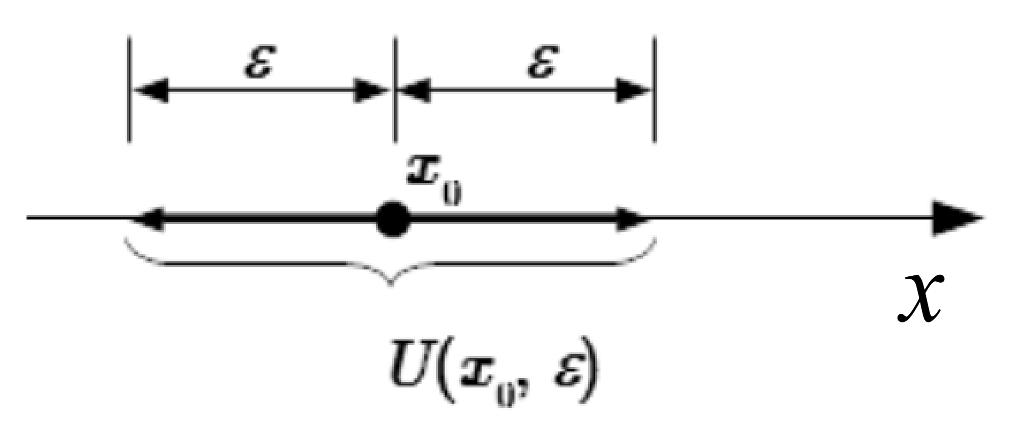


Пример. $y = x^2$, $y' = 2x$

$y \uparrow \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha > 0 \Leftrightarrow x \in (0;+\infty)$

$y \downarrow \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\beta < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;0)$

3. Окрестность точки.



Изображение взято с САЙТА

ε – окрестностью точки x_0 называется интервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$.

Примеры.

1) $(-0,1; 0,1)$ – ε – окрестность точки $x_0=0$ при $\varepsilon=0.1$

2) $(5,95; 6,05)$ – ε – окрестность точки $x_0=6$ при $\varepsilon=0.05$

3. Приложения производной. Локальный экстремум

локального

Определение максимума. Функция $f(x)$ в точке x_1 имеет *максимум* (maximum), если значение функции $f(x)$ в точке x_1 больше, чем ее значения во всех точках некоторого интервала,

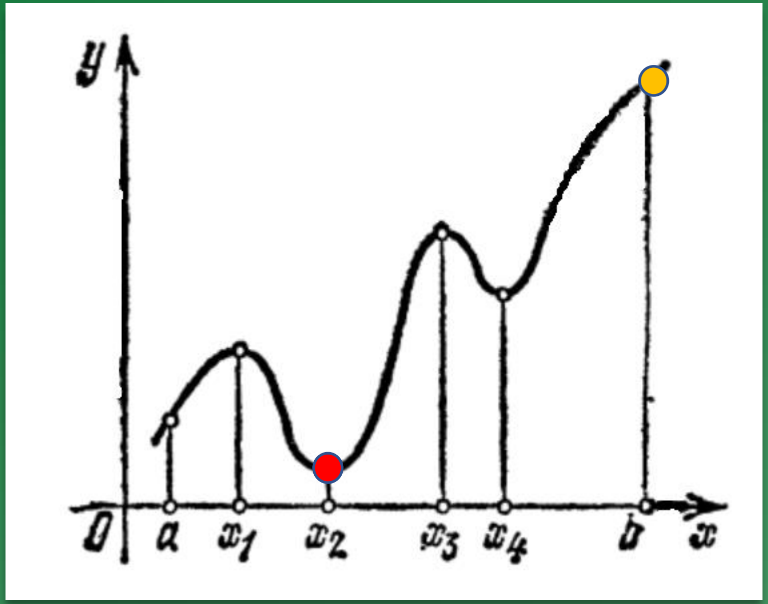
содержащего точку x_1. Иначе говоря, функция $f(x)$ имеет *максимум* при $x = x_1$, если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ при любых Δx (положительных и отрицательных), достаточно малых по абсолютной величине

локального

Определение минимума. Функция $f(x)$ имеет *минимум* (minimum) при $x = x_2$, если

$$f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$$

при любых Δx — как положительных, так и отрицательных, — достаточно малых по абсолютной величине



Максимум (миимум) функции не обязательно является наименьшим (наибольшим) значением функции на отрезке

3. Локальный экстремум. Примеры.

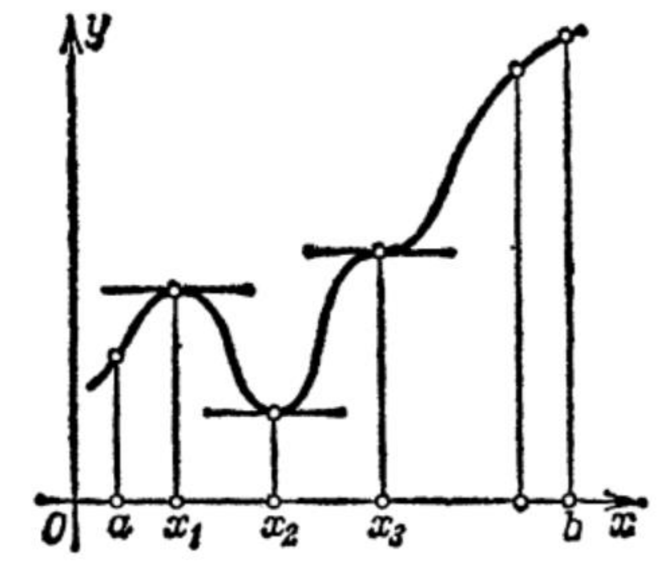
График взят с САЙТА

3. Приложения производной. Локальный экстремум

Теорема (необходимое условие экстремума).
Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0, и дифференцируема в самой точке x_0. Если x_0 – точка локального экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Обратное неверно: $f'(x_3) = 0$, но $x = x_3$ – не точка локального экстремума

Теорема (достаточное условие экстремума).
Если $f'(x_0) = 0$ и $f'(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то точка x_0 – точка локального экстремума.
При смене знака с «+» на «–» - точка максимума;
с «–» на «+» - точка минимума.



$y'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$

Точки, в которых производная обращается в 0, называются критическими

3. Приложения производной. Локальный экстремум

Пример 1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+1.$$

Решение. 1) Находим первую производную:

$$y'=x^2-4x+3.$$

2) Находим действительные корни производной:

$$x^2-4x+3=0.$$

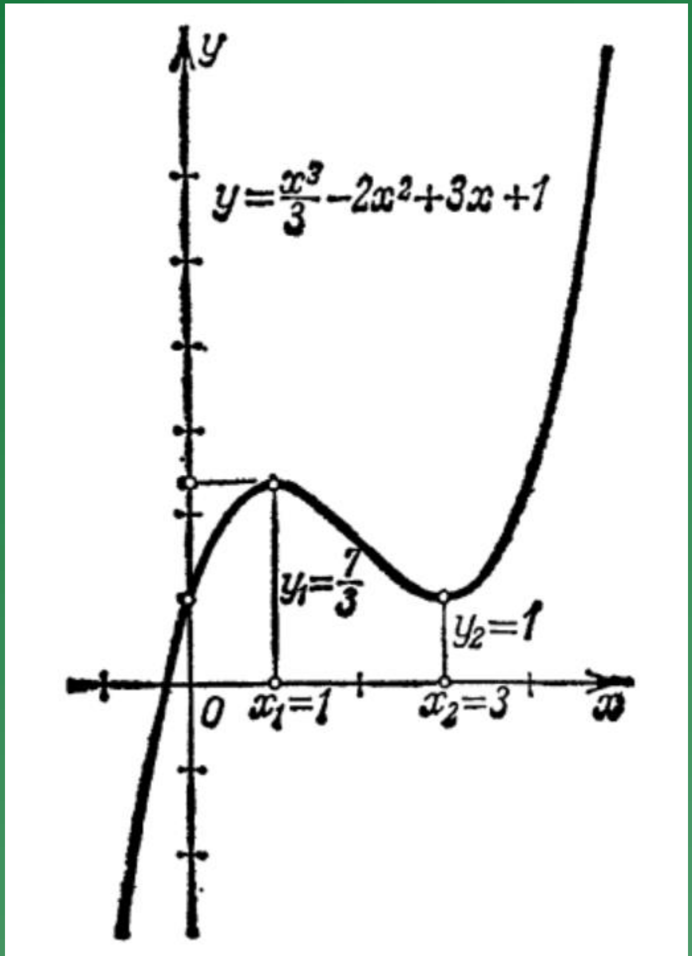
Следовательно,

$$x_1=1,\quad x_2=3.$$

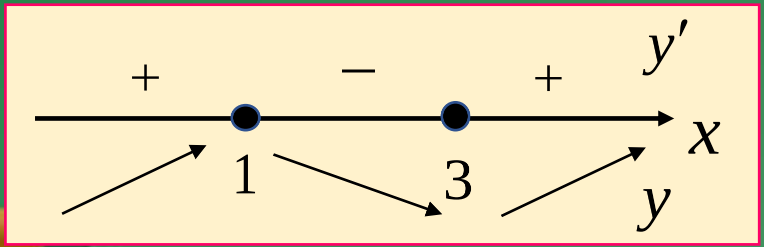
Производная всюду непрерывна. Значит, других критических точек нет.

3) Исследуем критические значения и результаты исследования фиксируем.

Исследуем первую критическую точку $x_1=1$. Так как $y'=(x-1)(x-3)$, то



Видеоурок по исследованию функции при помощи первой производной можно посмотреть ЗДЕСЬ

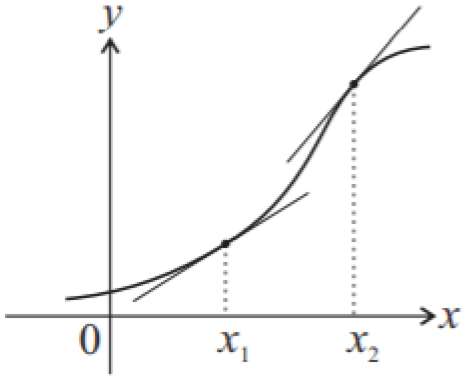


3. Приложения производной. Выпуклость и вогнутость.

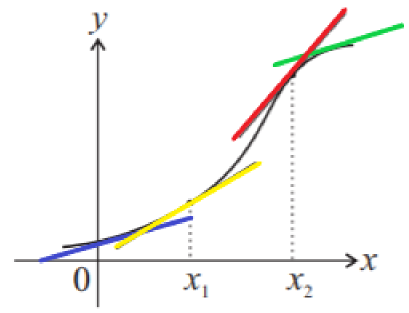
Выпуклость и точки перегиба

Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0, если в некоторой $O(x_0)$ график $f(x)$ лежит выше касательной к графику в точке x_0.
Аналогично, выпуклый вверх, если график лежит ниже касательной.



В точке x_1 график функции выпуклый вниз, а в точке x_2 — выпуклый вверх.



$$y\cup \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha \uparrow \Leftrightarrow y'' > 0$$

$$y\cap \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha \downarrow \Leftrightarrow y'' < 0$$

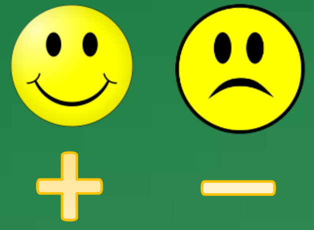
$$y\uparrow \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha > 0$$

$$y\downarrow \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha < 0$$

3. Приложения производной. Выпуклость и вогнутость

Теорема (**достаточное условие выпуклости**)

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.



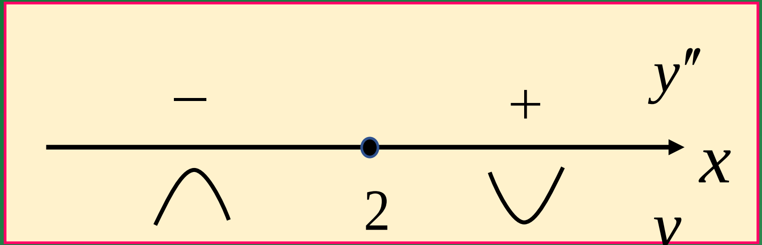
Пример.

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$$

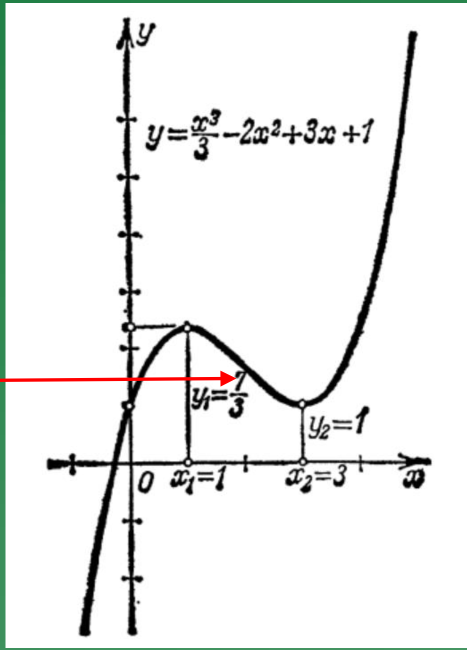
$$y' = x^2 - 4x + 3$$

$$y'' = 2x - 4$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = 2$$



$x = 2 -$ точка перегиба



Точка перегиба – точка, в которой функция существует и при переходе через которую меняет свою выпуклость

Видеоурок на исследование функции на выпуклость и точки перегиба см. ЗДЕСЬ

3. Выпуклость. Примеры.

$$y\uparrow \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha > 0$$
$$y\downarrow \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha < 0$$

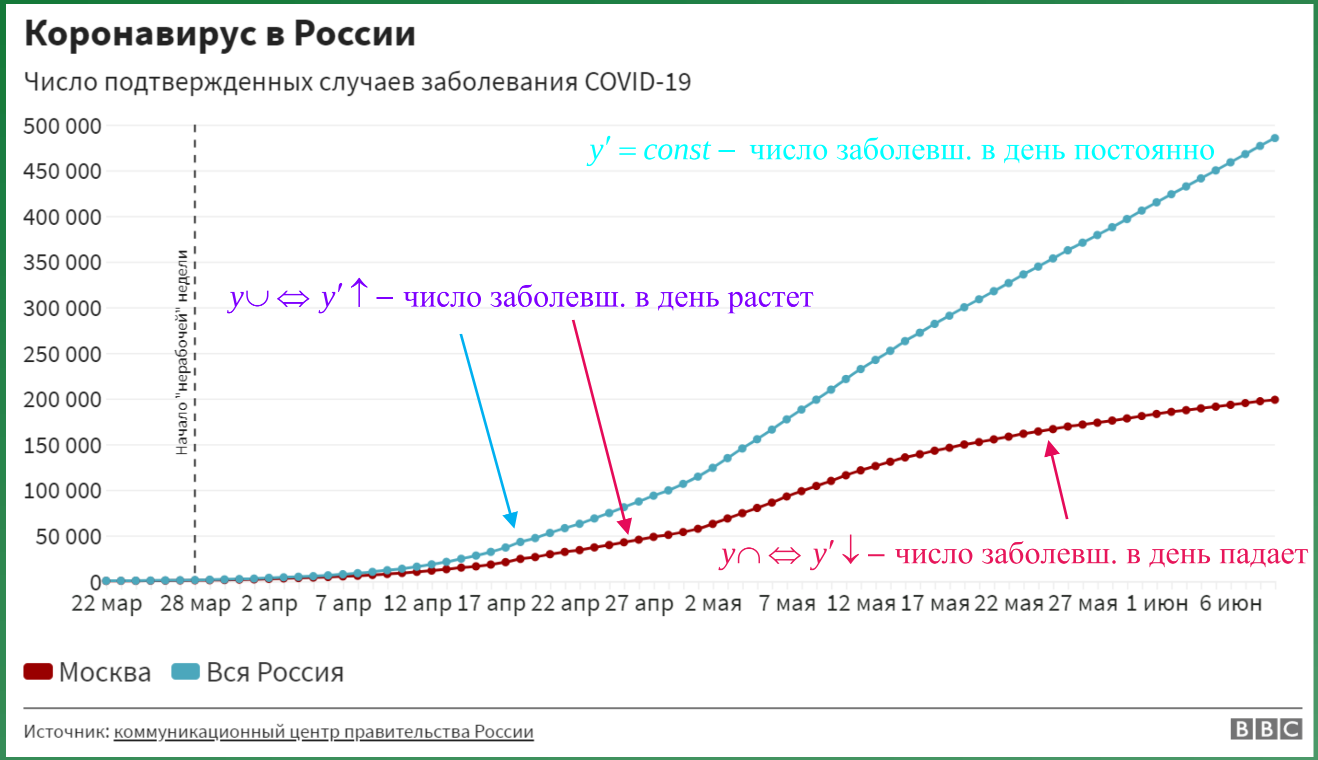
$$y\cup \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha \uparrow \Leftrightarrow y'' > 0$$
$$y\cap \Leftrightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha \downarrow \Leftrightarrow y'' < 0$$

$y = y(x)$ – число заболевших за время x

y' – *скорость* заболеваемости

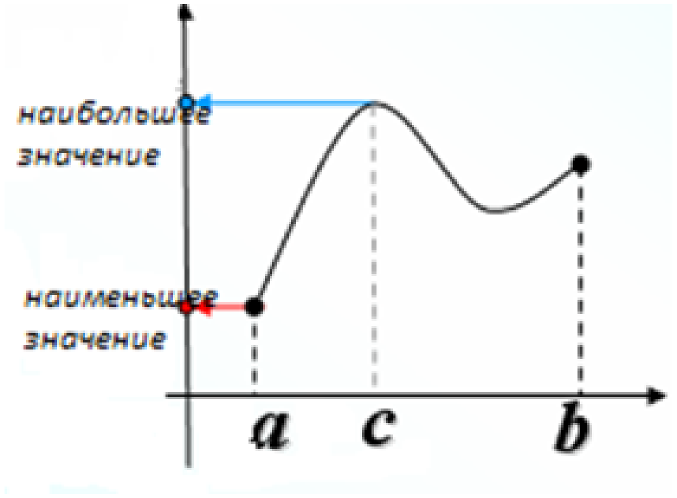
$y' \approx \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – число заболевших

за единицу времени (за день)



Теорема Вейерштрасса

Всякая непрерывная функция достигает на отрезке своего наибольшего и наименьшего значения.



Алгоритм нахождения наибольшего (наименьшего) значения непрерывной функции на отрезке

Допустим, что некоторая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b]$. Тогда на этом промежутке она (по теореме Вейерштрассе) имеет наибольшее и наименьшее значения.

Для нахождения наибольшее и наименьшего значения функция $f(x)$, непрерывной на промежутке $[a; b]$, необходимо:

1) найти все критические точки функции на интервале $[a; b]$,

2) вычислить значения функции во все указанных критических точках,

3) вычислить значения функции на концах отрезка,

4) из всех полученных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 1

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x)=\frac{4}{3}x^3-3x^2$ на отрезке [1;4].

Решение:

$f'(x)=4x^2-6x=2x(2x-3)$, причем производная определена всюду. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $2x(2x-3)=0$.

Итак, $x=\frac{3}{2}$ и $x=0$ – стационарные точки. При этом $\frac{3}{2}\in[1;4]$, а $x=0\notin[1;4]$, поэтому последняя точка нас не интересует.

Сравниваем значения исходной функции в выбранной точке и на концах отрезка:

$$f(1)=\frac{4}{3}-3=-\frac{5}{3};\qquad f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}-\frac{3\cdot 9}{4}=\frac{9}{2}-\frac{27}{4}=-\frac{9}{4};$$

$$f(4)=\frac{4\cdot 64}{3}-3\cdot 16=\frac{112}{3}.$$

Итак, $\underset{x\in[1;4]}{\text{наим}}\,.f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$, $\quad\underset{x\in[1;4]}{\text{наиб}}\,.f(x)=f(4)=\frac{112}{3}$.

Пример 2. Текстовая задача на нахождение наибольшего значения функции

Пример Имеется 160 м проволоки. Этой проволокой требуется огородить прямоугольный участок земли так, чтобы площадь участка была наибольшей. Найти длину и ширину такого участка.

Решение:

Чтобы решить задачу, площадь участка нужно предоставить как функцию одного аргумента, например как функцию длины участка. Обозначим длину участка через x. Выразим через x ширину участка y:

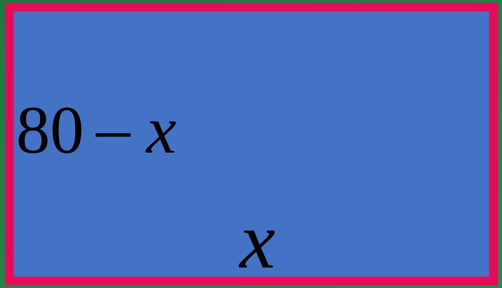
$$y = \frac{160 - 2x}{2}.$$

В таком случае площадь участка $S(x) = x(80 - x)$ (м^2).

Область определения полученной функции $S(x)$ представляет собой интервал $[0;80]$, т. к. $x \geqslant 0$ и $80 - x \geqslant 0$.

Находим наибольшее значение функции $S(x)$:

$S(x) = 80x - x^2$; $S'(x) = 80 - 2x$; $80 - 2x = 0$; $x = 40$.



S(0)=S(80)=0, S(40)=1600>0. Следовательно, площадь участка наибольшая при x = y = 40 м, т.е. участок представляет собой квадрат