Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & 4 & -4 \\ -3 & -15 & 2 & 4 & -5 & 7 \\ -1 & -12 & 4 & 11 & -8 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

3. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - x_6 = 3; \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_5 - 2x_6 = -6; \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -5; \\ 4x_2 + x_3 - 4x_4 + 7x_5 - x_6 = 5. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

4. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов

$a_1 = (2, 2, 5, -6, -5)$, $a_2 = (3, -9, 3, 7, 2)$, $a_3 = (1, -9, 7, -2, 7)$.

5. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 3, 4, 2)$, $a_2 = (0, -2, 0, -2)$, $a_3 = (-3, -1, 1, 1)$, $a_4 = (-3, 0, -2, 2)$ в векторы $b_1 = (-7, -9, 2)$, $b_2 = (0, -2, 2)$, $b_3 = (5, -4, 9)$, $b_4 = (14, 3, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-4, 2, 1, 0)$, $e_4 = (-4, 0, 1, 1)$ и $f_1 = (1, 0, -2)$, $f_2 = (0, 1, -2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

7. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векто-

ры оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

8. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & -3 & 4 \\ 4 & 12 & 4 & 10 & 11 & -14 \\ -2 & 9 & -2 & 10 & 11 & -15 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, -5, 3, -5, -8)$, $a_2 = (5, -9, -1, 6, -3)$, $a_3 = (3, -4, 7, 1, -2)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_5 = 1; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 - 2x_6 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 8x_5 - 6x_6 = -7. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (5, 1, -3, 2)$, $a_2 = (1, 0, -3, 4)$, $a_3 = (3, 3, 4, 4)$, $a_4 = (-1, 3, 1, 0)$ в векторы $b_1 = (-20, -9, -11)$, $b_2 = (-7, -6, -1)$, $b_3 = (1, -47, 48)$, $b_4 = (-4, -11, 7)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-1, 4, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, 4, 1)$ и $f_1 = (1, -4, -3)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & -3 & -6 & 5 & -9 \\ 7 & 0 & -2 & -5 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (5, 2, 3, 1, 6)$, $a_2 = (2, -9, 7, 6, -3)$, $a_3 = (1, -4, -3, 2, -4)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 2x_4 - x_5 - x_6 = 4; \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -2; \\ -8x_1 - 8x_2 - 7x_3 + x_4 + 3x_6 = -14. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, -3, -3, 0)$, $a_2 = (-2, -5, 2, -3)$, $a_3 = (-4, 1, -1, -1)$, $a_4 = (-2, 2, -1, 0)$ в векторы $b_1 = (0, 12, 0)$, $b_2 = (13, -19, 0)$, $b_3 = (0, -14, 0)$, $b_4 = (-3, -5, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-4, 4, 1, 1)$ и $f_1 = (1, -2, -1)$, $f_2 = (0, 1, -2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 8 & 6 & 1 & 12 & -6 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (2, -5, 3, 8, 9)$, $a_2 = (7, -2, 2, 4, -2)$, $a_3 = (4, 1, 7, -9, -1)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 3x_2 + 3\alpha x_3 + 3x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ -2x_1 + x_2 - x_4 - x_5 + x_6 = -5; \\ -x_3 + x_4 - x_6 = -1; \\ 6x_1 - 7x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 5x_6 = 9. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (1, 1, 0, 3)$, $a_2 = (0, 1, 4, -1)$, $a_3 = (2, 0, -2, 3)$, $a_4 = (-1, 3, -3, -2)$ в векторы $b_1 = (0, -1, 1)$, $b_2 = (8, -1, 9)$, $b_3 = (-5, -5, 0)$, $b_4 = (8, 2, 6)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 4, 1, 0)$, $e_4 = (0, 3, -4, 1)$ и $f_1 = (1, 1, 0)$, $f_2 = (0, 1, 4)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ -3 & 4 & -3 & 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (8, -8, 4, 8, 5)$, $a_2 = (9, 6, 8, -4, -7)$, $a_3 = (5, -7, -9, 5, 4)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^\top$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 - x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 = -2; \\ -2x_1 - x_4 - 2x_5 - 2x_6 = 2; \\ -x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 3; \\ -4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + x_4 - 4x_5 + 2x_6 = 1. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-4, 2, -3, 3)$, $a_2 = (0, 4, -1, 0)$, $a_3 = (3, 2, -3, 0)$, $a_4 = (-2, 4, 3, -1)$ в векторы $b_1 = (31, -32, 63)$, $b_2 = (13, -7, 20)$, $b_3 = (-3, -2, -1)$, $b_4 = (15, 2, 13)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (4, -4, 1, 0)$, $e_4 = (2, 3, 3, 1)$ и $f_1 = (1, 3, 1)$, $f_2 = (0, 1, -4)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.
(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -2 & 4 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 12 & -4 & -10 & 6 & 4 & -4 \\ 6 & -2 & -5 & 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (6, -1, -6, -8, -3)$, $a_2 = (4, -4, -3, -4, -9)$, $a_3 = (4, -2, 3, 4, 3)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^\top$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 3x_2 + 2\alpha x_3 + 3x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = -3; \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -3; \\ -x_2 + x_3 - 2x_5 - x_6 = -1; \\ -2x_1 - 7x_2 - 3x_4 - 3x_5 - 3x_6 = 3. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 1, 2, 0)$, $a_2 = (4, 2, 1, 2)$, $a_3 = (0, 1, 3, -1)$, $a_4 = (-2, -2, 2, -3)$ в векторы $b_1 = (1, 8, 0)$, $b_2 = (-13, -19, 0)$, $b_3 = (1, -6, 0)$, $b_4 = (12, 7, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-3, 0, 1, 0)$, $e_4 = (-4, 1, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 1, -4)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & 4 & 3 & -4 \\ -4 & 1 & 0 & -4 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -7 & -3 & 5 \\ -4 & 5 & -4 & -15 & -10 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, -5, -9, -1, -2)$, $a_2 = (7, 1, 3, 4, 6)$, $a_3 = (1, -1, 5, -4, -7)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^{\top}$, где $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 2x_6 = 10; \\ -2x_1 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6 = -8; \\ -x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 4; \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_5 - 3x_6 = 48. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (5, 1, -2, 0)$, $a_2 = (3, 3, 3, -1)$, $a_3 = (-3, 4, 1, -2)$, $a_4 = (2, 0, -1, -3)$ в векторы $b_1 = (-20, -3, -17)$, $b_2 = (-11, -6, -5)$, $b_3 = (-11, 10, -21)$, $b_4 = (-13, -11, -2)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (4, 4, 1, 0)$, $e_4 = (-1, -2, -1, 1)$ и $f_1 = (1, -3, 3)$, $f_2 = (0, 1, -4)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & -3 & 3 \\ -4 & -1 & -4 & -2 & -4 & 2 \\ -3 & -4 & 12 & 11 & -7 & -7 \\ 2 & -3 & 14 & 11 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (8, 3, 3, 6, -2)$, $a_2 = (8, -4, 3, -6, 1)$, $a_3 = (5, 2, 1, -8, 9)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot C^{\top}$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3 - x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + x_2 + 3\alpha x_3 + x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_6 = -3; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -4; \\ -2x_1 - x_5 - x_6 = -2; \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_6 = -3. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, -3, 3, -2)$, $a_2 = (3, -1, 0, -1)$, $a_3 = (3, -4, -3, 4)$, $a_4 = (2, 2, 2, -3)$ в векторы $b_1 = (9, 11, 2)$, $b_2 = (12, 3, -9)$, $b_3 = (6, -26, -32)$, $b_4 = (7, 18, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, 1, 1, 0)$, $e_4 = (-3, -2, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 4, -2)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & -11 & -5 & -3 & 8 & -3 \\ -4 & -13 & -5 & -5 & 9 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов
$a_1 = (4, 2, 9, 6, -3)$, $a_2 = (-1, 6, -2, -8, -3)$, $a_3 = (3, 0, -3, -7, -9)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = -1; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 = -8; \\ -x_1 - 2x_3 - x_5 - x_6 = -5; \\ -8x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 + x_5 - 4x_6 = -9. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 3, -3, -4)$, $a_2 = (4, -1, 3, -2)$, $a_3 = (-3, 0, 0, -1)$, $a_4 = (3, -4, 0, 4)$ в векторы $b_1 = (6, 9, -3)$, $b_2 = (-26, -14, -12)$, $b_3 = (3, 9, -6)$, $b_4 = (6, -5, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (4, 3, 1, 0)$, $e_4 = (1, 1, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 4, -4)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & -4 & 4 & 3 \\ -5 & 5 & 7 & 7 & -4 & -10 \\ -9 & 4 & 9 & 13 & -8 & -13 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, -5, 3, -5, -8)$, $a_2 = (5, -9, -1, 6, -3)$, $a_3 = (3, -4, 7, 0, -2)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = 6; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_6 = 6; \\ x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 4; \\ -5x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 4x_6 = 4. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (1, 0, 3, 1)$, $a_2 = (-3, 0, 3, -2)$, $a_3 = (2, 2, 5, -4)$, $a_4 = (-4, 3, -1, 3)$ в векторы $b_1 = (17, 1, 16)$, $b_2 = (-11, -24, 13)$, $b_3 = (3, -8, 11)$, $b_4 = (-13, 4, -17)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-4, 3, 1, 0)$, $e_4 = (-2, 4, 3, 1)$ и $f_1 = (1, -1, 3)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -6 \\ -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -4 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -4 & -4 & -4 & 2 \\ -6 & 12 & 8 & 2 & 10 & -4 \\ -4 & 8 & 12 & -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, -6, -8, 2, -5)$, $a_2 = (7, 4, -5, -7, -3)$, $a_3 = (8, -6, 4, 8, -1)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 - x_5 - 2x_6 = 8; \\ -x_2 - 2x_4 - 2x_5 = 4; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - 2x_6 = 14; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + 4x_5 - 8x_6 = 26. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, 3, 2, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 3)$, $a_3 = (3, 0, 4, -4)$, $a_4 = (1, -4, -3, -4)$ в векторы $b_1 = (20, -1, 21)$, $b_2 = (19, -2, 21)$, $b_3 = (0, 21, -21)$, $b_4 = (-23, 4, -27)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (1, -2, 1, 0)$, $e_4 = (2, -4, 4, 1)$ и $f_1 = (1, -3, -1)$, $f_2 = (0, 1, -2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 \\ -9 & 8 & 0 \\ 9 & -7 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (6, -6, 2, -1, -2)$, $a_2 = (4, 1, 4, -6, 2)$, $a_3 = (4, 3, 7, -9, -1)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:
$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 3x_2 + 3\alpha x_3 + 3x_4 + 4\alpha x_5 = \alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:
$$\begin{cases} -x_1 + x_4 + x_5 = -1; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_5 + x_6 = 3; \\ -2x_1 - 2x_2 - x_5 = -2; \\ -9x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 - 4x_5 - 2x_6 = -13. \end{cases}$$
Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (2, 2, 4, -2)$, $a_2 = (-1, 1, 4, 1)$, $a_3 = (4, 4, -4, 1)$, $a_4 = (-3, -1, 4, -1)$ в векторы $b_1 = (2, 6, 4)$, $b_2 = (11, 9, 10)$, $b_3 = (-22, -27, -26)$, $b_4 = (13, 23, 22)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, -3, 1, 0)$, $e_4 = (-2, -3, -3, 1)$ и $f_1 = (1, 1, 3)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 3 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & -4 & -4 & 3 & -4 \\ 10 & -12 & 16 & 8 & -20 & 10 \\ 6 & -13 & 12 & 4 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (8, 5, -2, 1, -5)$, $a_2 = (4, 3, 4, -9, 6)$, $a_3 = (1, 6, -7, -3, 7)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X^\top \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 - x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - x_6 = 5; \\ -2x_1 - 2x_3 - x_5 + x_6 = -6; \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = -2; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 + 3x_5 - 2x_6 = 15. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 7x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (3, -4, -4, 3)$, $a_2 = (0, 3, 0, 3)$, $a_3 = (-1, -1, 2, -3)$, $a_4 = (4, 3, 3, -2)$ в векторы $b_1 = (31, 0, -31)$, $b_2 = (-9, 3, 12)$, $b_3 = (-5, -3, 2)$, $b_4 = (-23, 0, 23)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (3, -4, 1, 0)$, $e_4 = (0, 2, -4, 1)$ и $f_1 = (1, 3, -3)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 10 & -2 \\ 4 & 8 & 6 & 1 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, -8, 7, 8, 6)$, $a_2 = (8, 6, 1, -1, -2)$, $a_3 = (1, -7, -3, 3, -3)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X^\top \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 3x_2 + 2\alpha x_3 + 3x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -4; \\ -x_1 - x_2 + x_6 = 0; \\ -2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5; \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 6. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-1, -1, 2, -2)$, $a_2 = (0, -5, -2, 2)$, $a_3 = (-3, -3, 4, 4)$, $a_4 = (4, 4, -4, -5)$ в векторы $b_1 = (-15, -9, -6)$, $b_2 = (17, 3, 14)$, $b_3 = (-9, -19, 10)$, $b_4 = (9, 20, -11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-1, 1, 1, 0)$, $e_4 = (-1, -1, -1, 1)$ и $f_1 = (1, 1, 2)$, $f_2 = (0, 1, 4)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -7 & 6 & 0 \\ -9 & 8 & 0 \\ -9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -1 & -4 \\ 7 & 2 & -6 & -8 & 10 & -2 \\ 11 & 10 & -3 & -7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (2, 2, 1, 3, 6)$, $a_2 = (3, 3, 1, -1, 5)$, $a_3 = (-8, -5, -7, 5, 0)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X^{\top} \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:
$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:
$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = -5; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = -4; \\ -x_1 + x_2 - 2x_5 + x_6 = -6; \\ -5x_1 + x_3 + x_4 - 6x_5 + 4x_6 = -19. \end{cases}$$
Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 6x_2y_2$.
368

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-2, 1, 0, -1)$, $a_2 = (-1, -1, 2, -1)$, $a_3 = (1, -2, 2, 3)$, $a_4 = (0, -3, -3, -3)$ в векторы $b_1 = (-3, -13, -10)$, $b_2 = (4, -9, -13)$, $b_3 = (1, 10, 9)$, $b_4 = (15, 12, -3)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (1, -3, 1, 0)$, $e_4 = (0, 3, -2, 1)$ и $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (0, 1, 3)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, 7, 5, 7, -3)$, $a_2 = (3, 3, 1, -2, -1)$, $a_3 = (7, 6, 6, -9, 3)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X^\top \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3 - x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + x_2 + 3\alpha x_3 + x_4 + 4\alpha x_5 = 2\alpha + 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 + x_6 = 0; \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - 2x_6 = 4; \\ x_2 + x_3 + x_5 - 2x_6 = 6; \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 7x_6 = -6. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-2, 1, -2, -3)$, $a_2 = (3, -2, 3, 0)$, $a_3 = (4, 3, 5, 4)$, $a_4 = (-1, -3, -1, -2)$ в векторы $b_1 = (-5, -2, 0)$, $b_2 = (-1, 3, 0)$, $b_3 = (1, 1, 0)$, $b_4 = (0, -1, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 2, 1, 0)$, $e_4 = (-1, 2, 0, 1)$ и $f_1 = (1, -3, 4)$, $f_2 = (0, 1, 3)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -12 & 4 & 7 & 20 \\ 8 & 2 & -9 & -4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, 6, 8, 1, -6)$, $a_2 = (3, -1, 0, -2, -1)$, $a_3 = (1, -2, -9, -3, -7)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 + 4x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 4; \\ -x_3 - x_4 - x_5 - x_6 = 1; \\ -2x_2 - x_3 - 2x_5 - 2x_6 = 3; \\ -x_1 - 8x_2 + x_3 + 4x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 10. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, 4, 4, -2)$, $a_2 = (3, 0, -1, 2)$, $a_3 = (0, 1, 4, -4)$, $a_4 = (-3, 4, 3, -1)$ в векторы $b_1 = (-14, -22, -8)$, $b_2 = (8, 2, -6)$, $b_3 = (-16, -14, 2)$, $b_4 = (-13, -19, -6)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 1, 1, 0)$, $e_4 = (-3, 0, -2, 1)$ и $f_1 = (1, 3, 0)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 8 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ -7 & 4 & 3 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, -3, 1, 6, -4)$, $a_2 = (6, -8, -1, -8, -9)$, $a_3 = (5, 4, 8, -5, 8)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:
$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:
$$\begin{cases} x_2 + x_4 + x_5 - 2x_6 = 1; \\ x_2 + x_5 + x_6 = -1; \\ -2x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -1; \\ -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_6 = 2. \end{cases}$$
Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-2, -1, 1, -2)$, $a_2 = (0, -1, -2, 3)$, $a_3 = (0, -3, -2, 1)$, $a_4 = (0, -3, -1, 1)$ в векторы $b_1 = (6, 5, 3)$, $b_2 = (-4, -4, -1)$, $b_3 = (-4, -12, -11)$, $b_4 = (-6, -10, -9)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-4, -4, 1, 0)$, $e_4 = (-3, -2, -1, 1)$ и $f_1 = (1, 1, 4)$, $f_2 = (0, 1, -2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & -2 & -8 & 11 \\ -2 & 12 & 0 & -2 & -10 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, 1, 4, 6, -2)$, $a_2 = (4, 1, 2, 3, -2)$, $a_3 = (8, 1, -7, 2, 3)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 6; \\ -2x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_6 = -1; \\ x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = -4; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 6x_4 - 4x_5 + x_6 = -5. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 2, 1, -4)$, $a_2 = (-3, -3, -1, 1)$, $a_3 = (-3, -3, 5, 3)$, $a_4 = (-3, -4, 3, 1)$ в векторы $b_1 = (-1, 11, 0)$, $b_2 = (-20, 5, 0)$, $b_3 = (-8, 15, 0)$, $b_4 = (-15, 21, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 0, 0)$, $e_3 = (2, 1, 1, 0)$, $e_4 = (1, 0, -4, 1)$ и $f_1 = (1, 3, 0)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 & -4 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 6 & 14 & 4 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & 11 & 0 & -10 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (3, 4, 1, 5, -8)$, $a_2 = (-2, -2, 3, -3, -1)$, $a_3 = (5, -6, -1, 8, -7)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X - X \cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 3x_2 + 3\alpha x_3 + 3x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = -1; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = -5; \\ x_2 - x_4 + x_5 + x_6 = 0; \\ 2x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 2x_5 = 13. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, -4, -2, -3)$, $a_2 = (4, -5, 0, 1)$, $a_3 = (0, -4, 3, -1)$, $a_4 = (-4, -4, 2, 0)$ в векторы $b_1 = (-7, -6, 0)$, $b_2 = (2, -19, 0)$, $b_3 = (6, 10, 0)$, $b_4 = (-6, 16, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-2, 2, 1, 0)$, $e_4 = (4, -1, -4, 1)$ и $f_1 = (1, -1, -3)$, $f_2 = (0, 1, -1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & 3 & -3 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & -4 & -4 & -4 & 2 \\ -6 & 12 & 8 & 2 & 10 & -4 \\ -4 & 8 & 12 & -12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (2, 5, -4, 8, -5)$, $a_2 = (7, -9, -8, 8, -1)$, $a_3 = (9, -2, -5, -2, 5)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X + X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 - x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 2x_2 + 3\alpha x_3 + 2x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 7x_4 + 8x_6 = 20; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 4x_6 = 14; \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6; \\ 4x_3 + x_4 + 3x_5 - x_6 = 14. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, -3, 3, -2)$, $a_2 = (3, -1, 0, -1)$, $a_3 = (6, -5, -3, 3)$, $a_4 = (2, 2, 2, -3)$ в векторы $b_1 = (9, 11, 2)$, $b_2 = (12, 3, -9)$, $b_3 = (18, -223, -41)$, $b_4 = (7, 18, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (2, 1, 1, 0)$, $e_4 = (-3, 2, -3, 1)$ и $f_1 = (1, -4, 2)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, 1, -6, 4, -1)$, $a_2 = (0, 2, -4, -2, 7)$, $a_3 = (5, 7, -2, -9, 5)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X + X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 3x_2 + 2\alpha x_3 + 3x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 8x_4 - x_5 = -3; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + x_5 = -3; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 4x_5 = 1. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-3, 3, -3, -4)$, $a_2 = (4, -1, 3, -2)$, $a_3 = (1, -1, 3, -3)$, $a_4 = (3, -4, 0, 4)$ в векторы $b_1 = (6, 9, -3)$, $b_2 = (-26, -14, -12)$, $b_3 = (-23, -5, -18)$, $b_4 = (6, -5, 11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (3, 1, 0, 0)$, $e_3 = (4, -3, 1, 0)$, $e_4 = (1, 1, 3, 1)$ и $f_1 = (1, 3, -4)$, $f_2 = (0, 1, 1)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 3 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & -1 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & -4 & -4 & 3 & -4 \\ 10 & -12 & 16 & 8 & -20 & 10 \\ 6 & -13 & 12 & 4 & -17 & 6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное данной системой векторов
$a_1 = (1, -1, 4, 1, 7)$, $a_2 = (2, 9, -8, -5, 9)$, $a_3 = (1, -6, -2, 8, 1)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X + X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = -5; \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + x_6 = -5; \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 - x_6 = 0; \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 7x_5 + 2x_6 = -1. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 8x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (1, 0, 3, 1)$, $a_2 = (-3, 0, 3, -2)$, $a_3 = (-1, 2, 8, -6)$, $a_4 = (-4, 3, -1, 3)$ в векторы $b_1 = (17, 1, 16)$, $b_2 = (-11, -24, 13)$, $b_3 = (-8, -32, 24)$, $b_4 = (-13, 4, -17)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (2, 1, 0, 0)$, $e_3 = (-4, 3, -1, 0)$, $e_4 = (2, 4, 3, 1)$ и $f_1 = (1, -2, 3)$, $f_2 = (0, 1, 0)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии
Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение
Вариант № 24

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 10 & -2 \\ 4 & 8 & 6 & 1 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, 4, 5, 5, 7)$, $a_2 = (8, -7, 3, 3, -5)$, $a_3 = (7, -7, -3, -3, -8)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X + X \cdot D$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3 - x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + x_2 + 3\alpha x_3 + x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha + 1. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 + 2x_3 - 4x_4 + x_5 + x_6 = 15; \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 2x_6 = -13; \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 3x_5 + x_6 = -2; \\ 4x_1 + 8x_2 + 6x_4 + 4x_5 - 6x_6 = 10. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 9x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (0, 3, 2, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 3)$, $a_3 = (5, 1, 1, -1)$, $a_4 = (1, -4, -3, -4)$ в векторы $b_1 = (20, -1, 21)$, $b_2 = (19, -2, 21)$, $b_3 = (19, 19, 0)$, $b_4 = (-23, 4, -27)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (-4, 1, 0, 0)$, $e_3 = (1, -2, -1, 0)$, $e_4 = (2, -3, 4, 1)$ и $f_1 = (1, 3, -1)$, $f_2 = (0, 1, 2)$, $f_3 = (0, 0, 1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & -4 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -2 & -1 & -4 \\ 7 & 2 & -6 & -8 & 10 & -2 \\ 11 & 10 & -3 & -7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (3, -7, 4, 1, -8)$, $a_2 = (-3, 4, 2, 1, 9)$, $a_3 = (8, -3, 6, -7, -2)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times3}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X$, где $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:
$$\begin{cases} \alpha x_1 - x_2 + \alpha x_3 - x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + x_2 + 3\alpha x_3 + x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha - 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 8x_4 - 6x_5 + 2x_6 = -24; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_5 + 4x_6 = -19; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 - 2x_6 = -5; \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 + x_5 - 3x_6 = 4. \end{cases}$$
Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (2, 2, 4, -2)$, $a_2 = (-1, 1, 4, 1)$, $a_3 = (3, 5, 0, 2)$, $a_4 = (-3, -1, 4, -1)$ в векторы $b_1 = (2, 6, 4)$, $b_2 = (11, 9, 10)$, $b_3 = (-11, -18, -16)$, $b_4 = (13, 23, 22)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (3,1,0,0),\ e_3 = (3,-3,-1,0),\ e_4 = (-2,3,-3,1)$ и $f_1 = (1,1,-3),\ f_2 = (0,1,1),\ f_3 = (0,0,1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & 6 & -3 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. (3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 6 & 0 & -8 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (7, 2, 3, 1, 7)$, $a_2 = (7, 4, 5, 4, -3)$, $a_3 = (2, 7, -2, 5, 2)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times3}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X$, где $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 + 4x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 + \alpha x_4 + x_5 = 2\alpha + 3; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 5x_2 + 3\alpha x_3 + 5x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha - 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 23; \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 - 3x_6 = -13; \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 + 3x_6 = -10; \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_6 = 10. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (3, -4, -4, 3)$, $a_2 = (0, 3, 0, 3)$, $a_3 = (-1, 2, 2, 0)$, $a_4 = (4, 3, 3, -2)$ в векторы $b_1 = (31, 0, -31)$, $b_2 = (-9, 3, 12)$, $b_3 = (-14, 0, 14)$, $b_4 = (-23, 0, 23)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (0,1,0,0),\ e_3 = (-3,-4,1,0),\ e_4 = (0,2,-4,1)$ и $f_1 = (1,-3,3),\ f_2 = (0,1,-1),\ f_3 = (0,0,1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 & 4 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & -4 & -4 \\ 4 & -2 & -12 & 4 & 7 & 20 \\ 8 & 2 & -9 & -4 & 8 & 16 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (5, 6, 2, 4, 5)$, $a_2 = (-2, 8, -5, -9, 5)$, $a_3 = (3, -9, 7, -8, 2)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times3}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X$, где $C = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:
$$\begin{cases} \alpha x_1 + 2x_2 + \alpha x_3 + 2x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 4; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha - 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_5 - 5x_6 = 9; \\ -3x_1 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 = -6; \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 3x_6 = -3; \\ x_2 - 4x_3 - 3x_4 + x_5 - 4x_6 = 3. \end{cases}$$
Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-1, -1, 2, -2)$, $a_2 = (0, -5, -2, 2)$, $a_3 = (-3, -8, 2, 6)$, $a_4 = (4, 4, -4, -5)$ в векторы $b_1 = (-15, -9, -6)$, $b_2 = (17, 3, 14)$, $b_3 = (8, -16, 24)$, $b_4 = (9, 20, -11)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (-3,1,0,0),\ e_3 = (-1,1,-1,0),\ e_4 = (-1,1,-1,-1)$ и $f_1 = (1,1,2),\ f_2 = (0,1,-4),\ f_3 = (0,0,1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -4 & -3 & 4 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & -4 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -6 & 8 & 1 & -7 & 1 & 8 \\ -7 & 4 & 3 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (3, -5, 1, 8, -5)$, $a_2 = (8, -3, 5, -8, 4)$, $a_3 = (6, -8, 5, 1, 1)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 3}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + 3x_2 + \alpha x_3 + 3x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 6; \\ 3x_1 + \alpha x_2 + 3x_3 + \alpha x_4 + 3x_5 = 2\alpha + 9; \\ \alpha x_1 + x_2 + 2\alpha x_3 + x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 2; \\ 2\alpha x_1 + 4x_2 + 3\alpha x_3 + 4x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha - 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 - 5x_4 + 7x_5 + 8x_6 = 7; \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - 4x_5 - 4x_6 = -10; \\ -x_1 + x_4 - 3x_5 - 4x_6 = 3; \\ 4x_1 - 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 + x_6 = 14. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 9x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-2, 1, 0, -1)$, $a_2 = (-1, -1, 2, -1)$, $a_3 = (0, -3, 4, 2)$, $a_4 = (0, -3, -3, -3)$ в векторы $b_1 = (-3, -13, -10)$, $b_2 = (4, -9, -13)$, $b_3 = (5, 1, -4)$, $b_4 = (15, 12, -3)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1,0,0,0),\ e_2 = (2,1,0,0),\ e_3 = (1,-3,1,0),\ e_4 = (0,-3,2,1)$ и $f_1 = (1,2,-3),\ f_2 = (0,1,3),\ f_3 = (0,0,1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

(3 балла)

Домашнее задание № 2 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -4 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 11 & 0 & -2 & -8 & 11 \\ -2 & 12 & 0 & -2 & -10 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Найти какую-нибудь систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство, порожденное системой векторов
$a_1 = (1, 8, -1, 8, 3)$, $a_2 = (5, 5, -1, 9, 6)$, $a_3 = (2, 1, 6, 5, -2)$.

3. Доказать, что отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{2\times 3} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 3}$, определенное равенством $\mathcal{A}X = C \cdot X$, где $C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, является линейным оператором. Найти его матрицу в базисе

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Исследовать систему линейных уравнений в зависимости от значения параметра α и найти общее решение при всех значениях α, когда она совместна:

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + \alpha x_3 + x_4 + \alpha x_5 = 3\alpha + 2; \\ 2x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 + \alpha x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 6; \\ \alpha x_1 + 2x_2 + 2\alpha x_3 + 2x_4 + 3\alpha x_5 = 6\alpha + 4; \\ 2\alpha x_1 + 3x_2 + 3\alpha x_3 + 3x_4 + 4\alpha x_5 = 4\alpha - 3. \end{cases}$$

5. Найти векторную форму записи общего решения системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 + 6x_6 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 3x_5 + 2x_6 = -2; \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_4 - 3x_5 + 4x_6 = 2; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 = -7. \end{cases}$$

Указать фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы уравнений.

6. Выяснить, можно ли в линейном пространстве строк $\mathbb{R}^2$ ввести скалярное произведение по формуле $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = 2x_1y_1 - 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 9x_2y_2$.

7. Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ переводит векторы $a_1 = (-2, 1, -2, -3)$, $a_2 = (3, -2, 3, 0)$, $a_3 = (7, 1, 8, 4)$, $a_4 = (-1, -3, -1, -2)$ в векторы $b_1 = (-5, -2, 0)$, $b_2 = (-1, 3, 0)$, $b_3 = (0, 4, 0)$, $b_4 = (0, -1, 0)$. Найти базис образа и базис ядра отображения $\mathcal{A}$.

Найти его матрицу в тех базисах, в которых даны координаты векторов.

Найти матрицу отображения $\mathcal{A}$ в базисах $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (1,1,0,0)$, $e_3 = (4,-2,1,0)$, $e_4 = (-1,2,0,1)$ и $f_1 = (1,-3,-4)$, $f_2 = (0,1,-3)$, $f_3 = (0,0,1)$.

8. Линейный оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Найти характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(x)$, собственные значения и собственные векторы оператора $\mathcal{A}$. Является ли $\mathcal{A}$ оператором простой структуры? Если да, то записать его матрицу в базисе из собственных векторов.

9. Найти жорданов базис и матрицу Жордана для линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. (3 балла)

10. Найти нормальную форму Жордана для матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(3 балла)