Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

2. Составить канонические уравнения проекции прямой $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.

3. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x+y+3 = 0$ и которая проходит через точки $(1, 1)$ и $(1, 2)$.

4. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{144}{13-5\cos\theta}$ в полярных координатах.

5. Определить тип линии $4x^2+24xy+11y^2+64x+42y+51 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

6. Найти параметрические уравнения множества фокусов гипербол, получающихся при пересечении гиперболического параболоида

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x$$

плоскостями, параллельными плоскости Oyz.

7. Будет ли система векторов $a_1 = (1, 8, 3, -4, 2)$, $a_2 = (1, 8, 7, -2, 5)$, $a_3 = (3, -1, 7, -3, 6)$, $a_4 = (-4, 18, 0, 2, -2)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 20, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $4k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (2, 0, -13, 6, -4)$, $a_2 = (4, 3, 6, 2, -2)$, $a_3 = (4, 1, 1, -5, 6)$, $a_4 = (18, 12, 11, 14, -12)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (6, 1, 2, 3, -3)$, $a_2 = (6, -4, 5, -8, -6)$, $a_3 = (2, -6, 4, 1, -7)$;

$b_1 = (3, -2, -4, -4, 4)$, $b_2 = (14, -18, 11, -4, -32)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Написать уравнение конуса, проходящего через прямые $y = x$, $z = 0$; $y = -x$, $z = 0$ и точку $(1, 2, 3)$, для которого ось Oz является осью симметрии.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, в котором лежит начало координат.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{12}{2-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Даны плоскость с уравнением $5x-6y-4z-80 = 0$ и точка $P(9, -12, 1)$. Найти точку, симметричную P относительно данной плоскости.

5. Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, заключенного между ее центром и директрисой.

6. Доказать, что кривая с уравнением $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 6x + 58y + 1 = 0$ является гиперболой. Найти длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты ее центра и фокусов, составить уравнения осей, асимптот и директрис. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6, 3, -7, 8, -6)$, $a_2 = (4, 3, 6, 2, -2)$, $a_3 = (4, 1, 1, -5, 6)$, $a_4 = (18, 12, 11, 14, -12)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 5×2, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 4k + 1$, $j = 3m + 2$ $(k, m = 0, 1, \dots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 8, 3, -4, 2)$, $a_2 = (1, 8, 7, -2, 5)$, $a_3 = (4, 7, 14, -5, 11)$, $a_4 = (-4, 18, 0, 2, -2)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (14, 9, 2, 3, 13)$, $a_2 = (7, 9, 4, 2, -3)$, $a_3 = (4, -3, -4, 2, 9)$;

$b_1 = (1, 2, 1, 2, 2)$, $b_2 = (1, 3, 1, -1, 5)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Найти острый угол между образующими конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, по которым его пересекает плоскость $5x + 10y - 11z = 0$.

2. Доказать, что плоскость $2x-6y+3z-49 = 0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{6}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Даны плоскость с уравнением $5x-6y-4z-75 = 0$ и точка $P(10, -11, 2)$. Найти точку, симметричную P относительно данной плоскости.

5. Написать уравнение гиперболы, зная, что ее асимптоты параллельны осям координат и что гипербола проходит через точки $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.

6. Доказать, что кривая с уравнением $34x^2+24xy+41y^2-44x-10y-3 = 0$ является эллипсом. Найти длины полуосей и эксцентриситет этого эллипса, координаты его центра и фокусов, составить уравнения осей и директрис. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (7, 6, -5, 4, 3)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 10, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $3k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (5, -4, -5, 5, -3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, 5)$, $a_3 = (11, 0, 0, -1, 8)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, -1)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (6, -5, -8, -8, 3)$, $a_2 = (3, 7, 9, -5, -3)$, $a_3 = (9, -3, -5, 2, -6)$;

$b_1 = (6, -1, -6, 6, 4)$, $b_2 = (18, -2, -8, -11, -12)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и пересекающей однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$ по паре прямых. Найти эти прямые.

2. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2=9$ и параллельных плоскости $x+2y-2z+15=0$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho=\frac{225}{17-8\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения высоты, проведенной из вершины A на сторону BC в треугольнике ABC с вершинами $A(0,1,-1)$, $B(1,4,5)$, $C(2,3,5)$.

5. Дана парабола $y=\frac{3}{4}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду (хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к ее оси).

6. Доказать, что кривая с уравнением $7x^2+48xy-7y^2-62x-34y+98=0$ является гиперболой. Найти длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты ее вершины и фокуса, составить уравнения оси и директрисы. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1=(6,-2,-3,-4,2)$, $a_2=(4,3,6,-1,5)$, $a_3=(3,-1,8,-1,-2)$, $a_4=(1,4,-2,0,7)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 10×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $i=2k+1$, $j=5m+2$ $(k,m=0,1,\ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1=(6,-2,-3,-4,2)$, $a_2=(7,2,14,-2,3)$, $a_3=(3,-1,8,-1,-2)$, $a_4=(1,4,-2,0,7)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2:

$a_1=(1,0,1,0,1)$, $a_2=(1,4,-1,7,-7)$, $a_3=(9,8,4,-2,6)$;

$b_1=(8,4,-8,6,1)$, $b_2=(10,12,6,10,-1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Найти параметрические уравнения множества фокусов гипербол, получающихся при пересечении гиперболического параболоида $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 2z$ плоскостями, параллельными плоскости Oxy.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(-3, 4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{25}{12 - 13\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. С помощью аналитической геометрии найти расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 6.

5. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов $(-2, 2)$ и асимптоты $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$.

6. Доказать, что кривая с уравнением $x^2 + 2xy + y^2 + x = 0$ является параболой. Найти параметр этой параболы, координаты ее центра и фокусов, составить уравнения осей, асимптот и директрис. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (1, 6, -7, 4, -9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, 2)$, $a_3 = (5, -4, 8, 1, 1)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, -7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 8, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $5k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 6, -7, 4, -9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, 2)$, $a_3 = (6, -11, 17, -6, 3)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, -7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, 2, -3, -3)$, $a_2 = (2, -3, 2, -3)$, $a_3 = (1, 2, -2, 1)$;

$b_1 = (-1, 1, -2, 2)$, $b_2 = (2, -3, -5, -2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ вокруг ее действительной оси.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x - 2y + z - 5 = 0$, $3x + 6y - 2z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{12}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Найти расстояние от точки $P(1, 3, 5)$ до прямой $\ell : \begin{cases} 5x + 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и асимптоты параллельны осям координат.

6. Определить тип линии $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (7, 6, -7, -4, -4)$, $a_2 = (2, 1, -7, 4, -8)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, 8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, -40)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 2k + 1$, $j = 4m + 2$ $(k, m = 0, 1, \dots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (7, 6, -7, -4, -4)$, $a_2 = (9, -1, -15, -1, 0)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, 8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, -40)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, -2, -1, 1)$, $a_2 = (1, -1, -2, -2)$, $a_3 = (1, -3, 1, 2)$;

$b_1 = (1, -2, -2, -1)$, $b_2 = (3, -4, 2, -3)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 2z$ и плоскость $4x + 5y - 20 = 0$?

2. Доказать, что плоскость $2x+6y+3z+49 = 0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{576}{25-7\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x+12y-3z-5 = 0$, $3x-4y+9z+7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

5. Расстояние между директрисами эллипса в 2 раза больше расстояния между фокусами. Найти эксцентриситет эллипса.

6. Определить тип линии $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, 7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 9, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $5k + 1$ $(k = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, 2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, 5)$, $a_3 = (7, 2, 14, -2, 3)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, 7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, -2, -2, 1)$, $a_2 = (1, 3, 3, 1)$, $a_3 = (1, 1, -2, 2)$;

$b_1 = (2, -2, -2, -1)$, $b_2 = (1, 2, -1, 1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид $x^2-y^2=2z$ и плоскость $x+y+z-1=0$?

2. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2=9$ и параллельных плоскости $x-2y+2z-15=0$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho=\frac{576}{7-25\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2-10x+2y+26z-113=0$ и параллельных прямым $\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+13}{2}$, $\frac{x+7}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-8}{0}$.

5. Найти угол между асимптотами гиперболы, у которой расстояние между фокусами в 2 раза больше расстояния между директрисами.

6. Определить тип линии $4x^2+4xy+y^2+16x+8y+15=0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1=(6,5,7,-6,-9)$, $a_2=(2,5,-8,8,-4)$, $a_3=(6,5,-1,5,-1)$, $a_4=(-14,-5,-13,1,-5)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 5×3, у которых элементы a_{ij} с индексами $i=7k+1$, $j=5m+2$ $(k,m=0,1,\ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1=(6,5,7,-6,-9)$, $a_2=(2,5,-8,8,-4)$, $a_3=(6,5,-1,5,-1)$, $a_4=(-14,-5,-13,1,-5)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2:

$a_1=(2,-2,-3,-1)$, $a_2=(1,2,2,2)$, $a_3=(1,2,-2,2)$;

$b_1=(1,-1,2,-1)$, $b_2=(2,2,0,3)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Найти угол φ между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$, проходящими через точку $(1,4,8)$, беря на этих образующих лучи, направленные от данной точки к горловому эллипсу.

2. Найти расстояние от точки $P(1,2,-3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,-1,2)$, $M_2(2,1,4)$, $M_3(3,0,0)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{18}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Найти проекцию точки $C(3,-4,-2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13}=\frac{y-6}{1}=\frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{-4}$.

5. Расстояние между директрисами эллипса в 4 раза больше расстояния между фокусами. Найти эксцентриситет эллипса.

6. Доказать, что кривая с уравнением $4x^2+6xy-4y^2-6x+58y+1=0$ является гиперболой. Найти длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты ее центра и фокусов, составить уравнения осей, асимптот и директрис. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1=(5,-8,1,7,-4)$, $a_2=(1,2,-3,-8,-4)$, $a_3=(1,-4,1,-6,-4)$, $a_4=(7,-4,-5,-9,-12)$, $a_5=(-1,10,-5,4,4)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 9, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $7k+2$ $(k=0,1,\ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1=(5,-8,1,7,-4)$, $a_2=(1,2,-3,-8,-4)$, $a_3=(1,-4,1,-6,-4)$, $a_4=(6,6,-10,-5,-8)$, $a_5=(-1,10,-5,4,4)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2:

$a_1=(2,-1,3,2)$, $a_2=(2,2,-2,-1)$, $a_3=(2,2,1,-2)$;

$b_1=(-1,2,-2,1)$, $b_2=(3,3,2,-2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$ вокруг ее мнимой оси.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{441}{29 - 20\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Доказать, что через прямую $\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$ можно провести две плоскости, касательные к сфере $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.

5. Написать уравнения асимптот гиперболы, у которой расстояние между фокусами в 3 раза больше расстояния между директрисами.

6. Доказать, что кривая с уравнением $34x^2 + 24xy + 41y^2 - 44x - 10y - 3 = 0$ является эллипсом. Найти длины полуосей и эксцентриситет этого эллипса, координаты его центра и фокусов, составить уравнения осей и директрис. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (5, 6, 7, -7, -7)$, $a_2 = (7, 2, 7, -6, -8)$, $a_3 = (5, -5, -7, -2, 8)$, $a_4 = (-3, 12, 21, -2, -24)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 3k + 1$, $j = 4m + 1$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (5, -8, 1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, -3, -8, -4)$, $a_3 = (7, 2, -9, -11, -12)$, $a_4 = (6, 6, -10, -5, -8)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, -3, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, 2, 2)$, $a_3 = (2, 2, -1, -2)$;

$b_1 = (2, 1, -2, 2)$, $b_2 = (5, 0, 5, 2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Составить уравнение цилиндра, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=1$, зная направляющий вектор $(1, 2, 3)$ образующих цилиндра.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x-4y+z-6=0, \\ 2x-3y+z-2=0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3,-4,-6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{441}{20-29\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Найти точку Q, симметричную точке $P(3,-4,-6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6, 1,-5)$, $M_2(7,-2,-1)$, $M_3(10,-7, 1)$.

5. Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, проведенных через точку $A(2, 2)$. Сделать чертеж.

6. Доказать, что кривая с уравнением $7x^2 + 48xy - 7y^2 - 62x - 34y + 98 = 0$ является гиперболой. Найти длины полуосей и эксцентриситет этой гиперболы, координаты ее вершины и фокуса, составить уравнения оси и директрисы. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6,-5,-7,-6,-1)$, $a_2 = (6,-7, 0, 0,-8)$, $a_3 = (4,-3, 2,-8, 3)$, $a_4 = (2,-4,-2, 8,-11)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 11, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $3k + 2$ $(k = 0, 1, \dots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (2, 2,-1, 1, 6)$, $a_2 = (5, 7, 3, 1,-1)$, $a_3 = (5, 6, 4, 7,-7)$, $a_4 = (12, 16, 5, 3, 4)$, $a_5 = (-5,-5,-5,-13, 13)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1,-1,-1, 1)$, $a_2 = (1,-1, 1,-1)$, $a_3 = (1, 1,-1,-2)$;

$b_1 = (1, 2,-2,-1)$, $b_2 = (3,-6,-2,-4)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Доказать, что уравнение $z^2 = xy$ определяет конус с вершиной в начале координат.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x+2y+z-5=0$, $3x-2y+6z+1=0$, в котором лежит точка $M(1,2,2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{24}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Доказать, что через прямую $\frac{x+6}{3} = y+3 = z+1$ нельзя провести плоскость, касательную к сфере $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0$.

5. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x+y+5=0$ и которая проходит через точки $(2,2)$ и $(2,3)$.

6. Доказать, что кривая с уравнением $x^2+2xy+y^2+x=0$ является параболой. Найти параметр этой параболы, координаты ее центра и фокусов, составить уравнения осей, асимптот и директрис. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (8,0,-5,3,-6)$, $a_2 = (5,6,3,-1,1)$, $a_3 = (1,2,-3,4,-1)$, $a_4 = (7,6,15,-14,5)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 5×3, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 2k+1$, $j = m+2$ $(k,m = 0,1,\ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (5,2,-8,2,1)$, $a_2 = (7,3,2,-6,-7)$, $a_3 = (2,-8,9,8,3)$, $a_4 = (26,11,-2,-16,-20)$, $a_5 = (1,27,-25,-30,-16)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2:

$a_1 = (1,2,1,-3)$, $a_2 = (2,1,3,-2)$, $a_3 = (-3,-3,-2,-2)$;

$b_1 = (2,1,3,2)$, $b_2 = (5,2,-8,4)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. По какой линии пересекаются гиперболический параболоид $x^2 - 4y^2 = 2z$ и плоскость $2x - 12y - z + 16 = 0$?

2. Доказать, что плоскость $12x - 16y + 15z - 175 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

3. Составить уравнение кривой $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ в полярных координатах.

4. Найти точку Q, симметричную точке $P(-3, 2, 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые

$$\begin{cases} x - 2y - 4z + 3 = 0, \\ x - 2y + 2z - 5 = 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

5. Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, заключенного между ее центром и директрисой.

6. Определить тип линии $x^2 - 4xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (3, 5, 5, -4, -9)$, $a_2 = (4, 0, 8, -5, -5)$, $a_3 = (8, 2, -8, 9, 8)$, $a_4 = (11, 5, 21, -14, -19)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 11, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $2k + 1$ ($k = 0, 1, \ldots$) равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 8, -1, 8, 3)$, $a_2 = (5, 5, -1, 9, 6)$, $a_3 = (2, 1, 6, 5, -2)$, $a_4 = (16, 23, -4, 35, 21)$, $a_5 = (-1, 2, -19, -6, 12)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (-2, -2, 1, 2)$, $a_2 = (2, -1, 2, 3)$, $a_3 = (2, -1, -2, 1)$;

$b_1 = (1, 2, 2, 1)$, $b_2 = (2, 1, -1, 2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Убедившись, что точка $A(-2, 0, 1)$ лежит на гиперболическом параболоиде $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = z$, определить острый угол, образованный его прямолинейными образующими, проходящими через A.

2. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2 = 81$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z - 10 = 0$.

3. Составить уравнение кривой $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ в полярных координатах.

4. Доказать, что через прямую $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ можно провести единственную плоскость, касательную к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$, и составить ее уравнение.

5. Написать уравнение гиперболы, зная, что ее асимптоты параллельны осям координат и что гипербола проходит через точки $(1, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$.

6. Определить тип линии $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (4, 6, 6, -3, -8)$, $a_2 = (5, 1, 9, -4, -4)$, $a_3 = (9, 3, -7, 10, 9)$, $a_4 = (12, 6, 22, -13, -18)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 6×3, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 3k + 1$, $j = m + 2$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (3, -5, 1, 8, -5)$, $a_2 = (8, -3, 5, -8, 4)$, $a_3 = (6, -8, 5, 1, 1)$, $a_4 = (30, -19, 17, -8, 2)$, $a_5 = (-2, 18, -5, -19, 5)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (2, -3, 1, 1)$, $a_3 = (1, -1, 1, 2)$;

$b_1 = (1, -1, -3, -3)$, $b_2 = (1, -3, 2, 1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - 2z + 1 = 0$, $y - z + 1 = 0$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, 4, -6)$ и $M_2(-1, 2, 2)$.

3. Составить уравнение кривой $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{225} = 1$ в полярных координатах.

4. Убедиться, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z = -2t + 1$ лежат в одной плоскости. Найти уравнение этой плоскости и координаты точки пересечения указанных прямых.

5. Дана парабола $y = \frac{7}{16}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду (хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к ее оси).

6. Определить тип линии $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (2, 9, 4, -3, 3)$, $a_2 = (2, 9, 8, -1, 6)$, $a_3 = (4, 0, 8, -4, 7)$, $a_4 = (-3, 19, 1, 3, -1)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ степени, не превосходящей 8, у которых коэффициенты при степенях x с показателями вида $3k + 1$ ($k = 0, 1, \ldots$) равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (7, 2, 3, 1, 7)$, $a_2 = (7, 4, 5, 4, -3)$, $a_3 = (2, 7, -2, 5, 2)$, $a_4 = (35, 16, 21, 14, 5)$, $a_5 = (8, -13, 16, -7, -12)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (3, -2, -1, 1)$, $a_2 = (2, -1, 3, 2)$, $a_3 = (2, -1, -2, 2)$;

$b_1 = (2, 1, -2, -2)$, $b_2 = (1, -2, 0, 2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y + z - 1 = 0$.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x - y + 2z - 5 = 0$, $6x + 2y - 3z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{144}{37 - 35\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Найти точку Q, симметричную точке $P(4, 1, 6)$ относительно прямой $\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$

5. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов $(0, -4)$ и асимптоты $2x - 3y + 1 = 0$, $3x + 2y - 5 = 0$.

6. Определить тип линии $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (7, 4, -6, 9, -5)$, $a_2 = (5, 4, 7, 3, -1)$, $a_3 = (5, 2, 2, -4, 7)$, $a_4 = (19, 13, 12, 15, -11)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×3, у которых элементы a_{ij} с индексами $i = 3k + 1$, $j = m + 2$ $(k, m = 0, 1, \ldots)$ равны 0, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (7, 4, 5, 5, 7)$, $a_2 = (8, -7, 3, 3, -5)$, $a_3 = (7, -7, -3, -3, -8)$, $a_4 = (31, -17, 14, 14, -8)$, $a_5 = (-13, 14, 12, 12, 19)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, -3, -1, 1)$, $a_2 = (2, 3, 2, 1)$, $a_3 = (-1, 1, 1, 1)$;

$b_1 = (-1, 2, -2, 2)$, $b_2 = (4, 1, 2, 3)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z - 1 = 0$.

2. Доказать, что плоскость $-2x + 6y + 3z + 98 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 196$ и найти координаты точки касания.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{144}{35-37\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, -4, -1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases} 3x + 4y + 5z - 26 = 0, \\ 3x - 3y - 2z - 5 = 0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x + 3y - 4z + 11 = 0$, $5x + 3y - 4z - 41 = 0$.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(2, 1)$ и $(1, 2)$ и асимптоты параллельны осям координат.

6. Определить тип линии $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (5, -4, -5, 5, 3)$, $a_2 = (4, -6, 5, -5, -5)$, $a_3 = (7, 6, -5, 4, -3)$, $a_4 = (-10, -18, 15, -13, 1)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×4, у которых элементы a_{ij} с индексами $|i - j| > 1$ равны 0 $(i, j = 1, \ldots, 4)$, и $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$ при $i = 1, 2, 3$, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, -1, 4, 1, 7)$, $a_2 = (2, 9, -8, -5, 9)$, $a_3 = (1, -6, -2, 8, 1)$, $a_4 = (5, 17, -12, -9, 25)$, $a_5 = (0, 21, -4, -21, 7)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, -1, -2, 1)$, $a_2 = (1, 3, 3, 3)$, $a_3 = (1, 3, -2, 3)$;

$b_1 = (1, 2, 1, 1)$, $b_2 = (5, 2, 5, -1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Найти прямолинейные образующие квадрики $4x^2 - y^2 - 16z = 0$, проходящие через точку $A(1, 2, 0)$.

2. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2 = 36$ и параллельных плоскости $x - 2y - 2z - 15 = 0$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{20}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1, 2, -3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = (6, -2, -3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

5. Расстояние между директрисами эллипса в 3 раза больше расстояния между фокусами. Найти эксцентриситет эллипса.

6. Определить тип линии $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$, написать ее каноническое уравнение и найти каноническую систему координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, -2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, -5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, -2)$, $a_4 = (1, 4, -2, 0, 7)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×4, у которых элементы a_{ij} с индексами $|i - j| > 1$ равны 0 $(i, j = 1, \ldots, 5)$, и $a_{i,i+1} = -a_{i+1,i}$ при $i = 1, 2, 3$, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (2, 5, -4, 8, -5)$, $a_2 = (7, -9, -8, 8, -1)$, $a_3 = (9, -2, -5, -2, 5)$, $a_4 = (11, 1, -16, 24, -11)$, $a_5 = (5, -16, -11, 18, -7)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (1, 3, 3, 1)$, $a_2 = (2, 2, 2, 1)$, $a_3 = (3, 2, -2, 2)$;

$b_1 = (1, -1, -1, 1)$, $b_2 = (2, 1, 2, 2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Найти прямолинейные образующие квадрики $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2 = 0$, проходящие через точку $A(1, 1, 0)$.

2. Найти расстояние от точки $P(1, 5, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, 0, 3)$, $M_2(3, 2, 5)$, $M_3(4, 1, 1)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{81}{40-41\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4, -5, 3)$ и пересекает прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

5. Найти угол между асимптотами гиперболы, у которой расстояние между фокусами в 3 раза больше расстояния между директрисами.

6. Найти вид и расположение квадрики $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$. Сделать чертеж. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (1, 6, -7, 4, 9)$, $a_2 = (1, -7, 9, -7, -2)$, $a_3 = (5, -4, 8, 1, -1)$, $a_4 = (2, -1, 2, -3, 7)$, $a_5 = (-4, -3, 1, -8, 1)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 5×5, у которых элементы a_{ij} с индексами $|i - j| > 1$ или $i = j$ $(i, j = 1, \ldots, 5)$ равны 0, и $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$ при $i = 1, 2, 3, 4$, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 1, 4, 6, -2)$, $a_2 = (4, 1, 2, 3, -2)$, $a_3 = (8, 1, -7, 2, 3)$, $a_4 = (13, 4, 10, 15, -8)$, $a_5 = (-20, -2, 23, -3, -11)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, 2, -2, 1)$, $a_2 = (2, -3, 2, 2)$, $a_3 = (-2, -3, -1, 1)$;

$b_1 = (1, 1, 1, 2)$, $b_2 = (-6, -3, 2, 2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Найти прямолинейные образующие квадрики $4x^2 - y^2 - 16z = 0$, проходящие через точку $A(2, 0, 1)$.

2. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - 6y + z - 5 = 0$, $3x + 5y - 7z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{81}{41-40\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x = 3t-7$, $y = -2t+4$, $z = 3t+4$ и $x = t+1$, $y = 2t - 8$, $z = -t - 12$.

5. Расстояние между директрисами эллипса в 5 раза больше расстояния между фокусами. Найти эксцентриситет эллипса.

6. Найти вид и расположение квадрики $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$. Сделать чертеж. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (7, 6, -7, -4, 4)$, $a_2 = (2, 1, -7, 4, 8)$, $a_3 = (7, -2, -8, -5, -8)$, $a_4 = (-17, 8, 10, 23, 40)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 6×6, у которых элементы a_{ij} с индексами $|i - j| > 1$ или $i = j$ $(i, j = 1, \dots, 6)$ равны 0, и $a_{i,i+1} = -a_{i+1,i}$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$, тносительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (7, -3, 1, 6, -4)$, $a_2 = (6, -8, -1, -8, -9)$, $a_3 = (5, 4, 8, -5, 8)$, $a_4 = (13, -11, 0, -2, -13)$, $a_5 = (1, -12, -9, -3, -17)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, 1, -2, 1)$, $a_2 = (3, 1, 3, -1)$, $a_3 = (2, 3, -1, 2)$;

$b_1 = (2, 1, -1, 1)$, $b_2 = (1, 1, -2, 0)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии
Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение
Вариант № 21

1. Найти прямолинейные образующие квадрики $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2 = 0$, проходящие через точку $A(0, 2, 0)$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0, \\ 2x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(-3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{8}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения высоты, проведенной из вершины A на сторону BC в треугольнике ABC с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 3)$, $C(6, 8, 5)$.

5. Написать уравнения асимптот гиперболы, у которой расстояние между фокусами в 4 раза больше расстояния между директрисами.

6. Найти вид и расположение квадрики $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$. Сделать чертеж. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6, -2, -3, -4, -2)$, $a_2 = (4, 3, 6, -1, -5)$, $a_3 = (3, -1, 8, -1, 2)$, $a_4 = (10, 1, 3, -5, -7)$, $a_5 = (1, 4, -2, 0, 7)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 6×6, у которых элементы a_{ij} с индексами $|i - j| > 1$ или $i = j$ $(i, j = 1, \ldots, 6)$ равны 0, и $a_{i,i+1} = a_{i+1,i}$ при $i = 1, 2, 3, 4, 5$, тносительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, 7, 5, 7, -3)$, $a_2 = (3, 3, 1, -2, -1)$, $a_3 = (7, 6, 6, -9, 3)$, $a_4 = (10, 16, 8, 1, -6)$, $a_5 = (-18, -15, -17, 25, -10)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, 2, 2, 1)$, $a_2 = (2, 3, 2, 3)$, $a_3 = (1, 3, 3, -2)$;

$b_1 = (3, 2, 1, 3)$, $b_2 = (1, 2, 2, 1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Определить линию пересечения квадрики $2x^2 + y^2 = 12z$ с плоскостью $3x - y + 6z - 14 = 0$.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $6x + 2y + 3z - 5 = 0$, $3x - 2y - 6z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(3, 2, 2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{121}{60 - 61 \cos \theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения биссектрисы, проведенной из вершины B на сторону BC в треугольнике ABC с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 3)$, $C(6, 8, 5)$.

5. Составить уравнения касательных к эллипсу $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$, проведенных через точку $A(1, 3)$. Сделать чертеж.

6. Найти вид и расположение квадрики $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$. Сделать чертеж. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6, 5, 7, 6, -9)$, $a_2 = (2, 5, -8, -8, -4)$, $a_3 = (6, 5, -1, -5, -1)$, $a_4 = (-14, -5, -13, -1, -5)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×4 вида $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (3, -1, -9, -7, -3)$, $a_2 = (5, -6, 1, 3, 4)$, $a_3 = (5, 3, 5, -5, 3)$, $a_4 = (16, -14, -16, -8, 2)$, $a_5 = (0, -18, -8, 16, 2)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, -2, -1, -1)$, $a_2 = (2, 2, 2, -1)$, $a_3 = (2, -2, 1, -1)$;

$b_1 = (3, 3, -1, 2)$, $b_2 = (3, 1, 1, -3)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Определить линию пересечения квадрики $3x^2 - 4y^2 = 24z$ с плоскостью $x - 2y + 2 = 0$.

2. Доказать, что плоскость $12x - 16y + 15z - 75 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и найти координаты точки касания.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{121}{61 - 60\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

5. Составить уравнения касательных к гиперболе $5x^2 - 4y^2 - 20 = 0$, проведенных через точку $A(1, 3)$. Сделать чертеж.

6. Доказать, что квадрика $2x^2 - xy - y^2 + 3y - 2 = 0$ является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (5, -8, -1, 7, -4)$, $a_2 = (1, 2, 3, -8, -4)$, $a_3 = (1, -4, -1, -6, -4)$, $a_4 = (7, -4, 5, -9, -12)$, $a_5 = (-1, 10, -5, 4, 4)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{R}$ размеров 4×4 вида $\begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ b & -c & d & -a \\ c & -d & a & -b \\ d & -a & b & -c \end{pmatrix}$, относительно линейных операций образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (1, -8, 7, 8, 6)$, $a_2 = (8, 6, 1, -1, -2)$, $a_3 = (1, -7, -3, 3, -3)$, $a_4 = (26, 2, 17, 13, 6)$, $a_5 = (13, 33, 11, -11, 5)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (-1, 3, 2, -1)$, $a_2 = (2, 1, -2, -2)$, $a_3 = (-2, 3, -2, 1)$;

$b_1 = (1, 1, -1, 3)$, $b_2 = (1, -2, -2, -2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Определить линию пересечения квадрики $9x^2 + 4y^2 - z^2 = 36$ с плоскостью $9x - 6y + 2z - 28 = 0$.

2. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2 = 144$ и параллельных плоскости $x - 2y - 2z - 10 = 0$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{4}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

5. Написать уравнение параболы, осью которой служит прямая $x+y+6 = 0$ и которая проходит через точки $(2, 3)$ и $(2, 4)$.

6. Доказать, что квадрика $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y - 3 = 0$ является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (5, 6, 7, -7, 7)$, $a_2 = (7, 2, 7, -6, 8)$, $a_3 = (5, -5, -7, -2, -8)$, $a_4 = (-3, 12, 21, -2, 24)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{C}$ размеров 2×2 вида $\begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ c+di & e+fi \end{pmatrix}$, относительно операций сложения и умножения на действительное число образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (8, 5, -2, 1, -5)$, $a_2 = (4, 3, 4, -9, 6)$, $a_3 = (1, 6, -7, -3, 7)$, $a_4 = (24, 16, 4, -16, 2)$, $a_5 = (6, -6, 22, -12, -2)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (4, -1, 0, 3)$, $a_2 = (2, -3, 2, 2)$, $a_3 = (-2, -3, -1, 1)$;

$b_1 = (-5, -2, 3, 4)$, $b_2 = (-6, -3, 2, 2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Определить линию пересечения квадрики $4x^2 - 9y^2 = 72z$ с плоскостью $2x + 3y - 6 = 0$.

2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} -3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(5, 4, -6)$ и $M_2(-1, 2, 2)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{256}{63-61\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x = 3t - 7$, $y = -2t + 4$, $z = 3t + 4$ и $x = t + 1$, $y = 2t - 8$, $z = -t - 12$.

5. Вычислить длину отрезка асимптоты гиперболы $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$, заключенного между ее центром и директрисой.

6. Доказать, что квадрика $2x^2 - xy - 3y^2 - 2x + 3y = 0$ является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (6, 5, -7, -6, -1)$, $a_2 = (6, 7, 0, 0, -8)$, $a_3 = (4, 3, 2, -8, 3)$, $a_4 = (2, 4, -2, 8, -11)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{C}$ размеров 2×2 вида $\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c - di & e + fi \end{pmatrix}$, относительно операций сложения и умножения на действительное число образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (7, -6, -8, 2, -5)$, $a_2 = (7, 4, -5, -7, -3)$, $a_3 = (8, -6, 4, 8, -1)$, $a_4 = (35, 0, -31, -17, -19)$, $a_5 = (-10, 26, -22, -38, -3)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (5, 2, 1, 0)$, $a_2 = (3, 1, 3, -1)$, $a_3 = (2, 3, -1, 2)$;

$b_1 = (2, 1, -1, 1)$, $b_2 = (3, 2, -3, 1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. Найти острый угол между образующими конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, по которым его пересекает плоскость $2x + 2y - z = 0$.

2. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $3x - 6y + 2z - 5 = 0$, $6x + 2y - 3z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 5)$.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho = \frac{256}{61 - 63\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения высоты, проведенной из вершины A на сторону BC в треугольнике ABC с вершинами $A(2, 3, 4)$, $B(4, 4, 6)$, $C(7, 10, 8)$.

5. Написать уравнение гиперболы, зная, что ее асимптоты параллельны осям координат и что гипербола проходит через точки $(1, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 4)$.

6. Доказать, что квадрика $6x^2 - xy - 15y^2 - x + 46y - 35 = 0$ является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (-8, 0, -5, 3, -6)$, $a_2 = (-5, 6, 3, -1, 1)$, $a_3 = (-1, 2, -3, 4, -1)$, $a_4 = (-7, 6, 15, -14, 5)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех матриц над полем $\mathbb{C}$ размеров 2×2 вида $\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ e + fi & g + hi \end{pmatrix}$, относительно операций сложения и умножения на действительное число образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (8, 3, 3, 6, -2)$, $a_2 = (8, -4, 3, -6, 1)$, $a_3 = (5, 2, 1, -8, 9)$, $a_4 = (24, 2, 9, 6, -3)$, $a_5 = (11, -10, 5, -4, -7)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (2, 2, 2, 1)$, $a_2 = (3, 6, 5, 1)$, $a_3 = (1, 3, 3, -2)$;

$b_1 = (3, 2, 1, 3)$, $b_2 = (4, 4, 3, 4)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2+y^2-z^2=1$, $x+2y+z-3=0$.

2. Доказать, что плоскость $-2x+6y-3z+77=0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=121$ и найти координаты точки касания.

3. Определить, какая линия задана уравнением $\rho=\frac{28}{1-\cos\theta}$ в полярных координатах.

4. Составить канонические уравнения биссектрисы, проведенной из вершины B на сторону BC в треугольнике ABC с вершинами $A(2,3,4)$, $B(4,4,6)$, $C(7,10,8)$.

5. Дана парабола $y=\frac{27}{36}x^2$. Написать уравнение другой параболы, имеющей с данной параболой общую фокальную хорду (хорду, проходящую через фокус параболы и перпендикулярную к ее оси).

6. Доказать, что квадрика $3x^2-14xy+15y^2+17x-33y+10=0$ является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1=(3,5,5,-4,9)$, $a_2=(4,0,8,-5,5)$, $a_3=(8,2,-8,9,-8)$, $a_4=(11,5,21,-14,19)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех последовательностей $\{a_n\}_1^\infty$ с элементами из поля $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $a_k=a_{k+3}$ при $k=1,2,\ldots$, относительно операций сложения последовательностей и умножения последовательности на действительное число образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1=(6,-1,-6,-8,-3)$, $a_2=(4,-4,-3,-4,-9)$, $a_3=(4,-2,3,4,3)$, $a_4=(10,-5,-9,-12,-12)$, $a_5=(0,-2,-6,-8,-12)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2:

$a_1=(4,-4,0,-2)$, $a_2=(2,2,2,-1)$, $a_3=(2,-2,1,-1)$;

$b_1=(3,3,-1,2)$, $b_2=(6,4,0,-1)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. Составить уравнение конуса с вершиной в начале координат, направляющая которого дана уравнениями $x^2 - y^2 = 2z$, $x + y + 3z - 2 = 0$.

2. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2 = 144$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z - 15 = 0$.

3. Составить уравнение кривой $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{49} = 1$ в полярных координатах.

4. Найти кратчайшее расстояние между прямыми $\frac{x+2}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+1}{-5}$, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+2}{-1}$.

5. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов $(6, 4)$ и асимптоты $4x - y - 3 = 0$, $x + 4y - 5 = 0$.

6. Доказать, что квадрика $2x^2 - 14xy + 20y^2 + 9x - 31y + 10 = 0$ является парой пересекающихся прямых и найти их уравнения в исходной системе координат. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1 = (-4, 6, 6, -3, -8)$, $a_2 = (-5, 1, 9, -4, -4)$, $a_3 = (-9, 3, -7, 10, 9)$, $a_4 = (-12, 6, 22, -13, -18)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех последовательностей $\{a_n\}_1^\infty$ с элементами из поля $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $a_k = a_{k+4}$ при $k = 1, 2, \ldots$, относительно операций сложения последовательностей и умножения последовательности на действительное число образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1 = (8, -8, 4, 8, 5)$, $a_2 = (9, 6, 8, -4, -7)$, $a_3 = (5, -7, -9, 5, 4)$, $a_4 = (34, -4, 24, 8, -4)$, $a_5 = (8, 26, 34, -18, -22)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^4$, порожденные данными системами векторов a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2:

$a_1 = (-1, 3, 2, -1)$, $a_2 = (2, 1, -2, -2)$, $a_3 = (-1, 2, 0, 0)$;

$b_1 = (2, -1, -3, 1)$, $b_2 = (1, -2, -2, -2)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U + W$ и $U \cap W$. (2 балла)

Домашнее задание № 1 по алгебре и геометрии

Семестр II, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. Составить уравнение цилиндра, описанного около сферы $x^2+y^2+z^2=4$, зная направляющий вектор $(2,2,1)$ образующих цилиндра.

2. Найти расстояние от точки $P(6,5,-3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3,1,4)$, $M_2(4,3,6)$, $M_3(5,2,2)$.

3. Составить уравнение кривой $\frac{x^2}{576}-\frac{y^2}{49}=1$ в полярных координатах.

4. Найти расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-5}{12}=\frac{y-6}{15}=\frac{z+3}{16}$, $\frac{x-2}{12}=\frac{y-3}{15}=\frac{z+3}{16}$.

5. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(2,1)$ и $(1,3)$ и асимптоты параллельны осям координат.

6. Найти вид и расположение квадрики $x^2-4xy+4y^2-2x+9y-5=0$. Сделать чертеж. (2 балла)

7. Будет ли система векторов $a_1=(3,5,5,4,-9)$, $a_2=(4,0,8,5,-5)$, $a_3=(8,2,-8,-9,8)$, $a_4=(11,5,21,14,-19)$ линейно зависимой?

8. Убедиться, что множество всех последовательностей $\{a_n\}_1^\infty$ с элементами из поля $\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $a_k=a_{k+5}$ при $k=1,2,\ldots$, относительно операций сложения последовательностей и умножения последовательности на действительное число образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Указать какой-нибудь базис этого пространства и найти его размерность.

9. Найти ранг и какую-нибудь максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $a_1=(5,2,3,1,6)$, $a_2=(2,-9,7,6,-3)$, $a_3=(1,-4,-3,2,-4)$, $a_4=(12,-5,13,8,9)$, $a_5=(3,-14,17,10,-2)$.

10. Даны подпространства U и W линейного пространства $\mathbb{R}^5$, порожденные данными системами векторов a_1,a_2,a_3 и b_1,b_2:

$a_1=(6,1,2,3,-3)$, $a_2=(6,-4,5,-8,-6)$, $a_3=(2,-6,4,1,-7)$;

$b_1=(3,-2,-4,-4,4)$, $b_2=(14,-18,11,-4,-32)$.

Найти размерности и базисы подпространств $U+W$ и $U\cap W$. (2 балла)