Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (11, 3, -16)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

2. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{3}$ образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -1$, $\vec{x}\vec{b} = 10$, где $\vec{a} = (4, 2, -7)$ и $\vec{b} = (8, -1, 3)$.

3. Найти вектор $\vec{c}$ длины $2\sqrt{3}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

4. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $120°$. Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – правая. Зная, что $|\vec{a}\,| = 6$, $|\vec{b}\,| = 3$, $|\vec{c}\,| = 5$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

5. На плоскости даны два базиса: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(-1, 3)$ и $(2, -7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e'}_1 - 4\vec{e'}_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1, 3)$ и $C(6, 2)$. Составить уравнения его сторон.

9. Точка $A(2, 0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $\ell : x+y-1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

10. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 6x - y + 15 = 0$, $(AC) : x + 6y + 21 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

11. Определить положение точки $D(-1, 1)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(AC) : 5x + 2y - 7 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$.

12. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 7y - 4 = 0$ и $3x + 7y + 5 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x-4y+z+6=0, \\ 2x-3y+z+2=0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3,-4,-6)$ и $M_2(1,2,2)$.

14. Даны три плоскости $2x+3y-4z+5=0$, $2x-z+3=0$, $x+y-z=0$. Через линию пересечения двух первых плоскостей провести плоскость так, чтобы линия ее пересечения с третьей плоскостью была перпендикулярна к линии пересечения первой и второй плоскостей.

15. Найти расстояние от точки $M(11,8,9)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+7}{5}=\frac{y+8}{6}=\frac{z-1}{-2}$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{14}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (17, -3, -6)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{83}$ образует с осью Oz тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 66$, $\vec{x}\vec{b} = 6$, где $\vec{a} = (7, -4, -1)$ и $\vec{b} = (1, 2, -1)$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$ и $\vec{c} = (0, -1, 2)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{42}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. На плоскости даны два базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(1, 3)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : x + 2y - 2 = 0$, а одна из боковых сторон — на прямой $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$. Расстояние от другой боковой стороны до точки $\ell_1 \cap \ell_2$ равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Составить уравнение этой боковой стороны.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(AC) : 5x + 2y - 7 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 6x - y + 15 = 0$, $(CD) : x + 6y + 21 = 0$, $(DA) : 5x + 2y - 7 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $5x - 2y - 3 = 0$ и $5x - 2y + 4 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, в котором лежит начало координат.

13. Через линию пересечения плоскостей $x + 5y + z = 0$ и $x - z + 4 = 0$ провести плоскость, образующую угол $\pi/4$ с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(11, 8, 9)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+2}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z+1}{-2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, Образованного двумя прямыми $x - 4y + 5 = 0$, $3x - y + 15 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{3}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, -1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (-2, -1, 3)$ и $\vec{s} = (-5, -5, 8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{14}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что8 $\vec{x}\vec{a} = -6$, $\vec{x}\vec{b} = 12$, где $\vec{a} = (5, 5, -8)$ и $\vec{b} = (1, 1, 5)$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (1, -2, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. На плоскости даны два базиса: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(-1, -3)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e'}_1 - 4\vec{e'}_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1, 3)$ и касающихся прямых $\ell_1 : 7x + y = 0$ и $\ell_2 : x - y + 8 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(BC) : 5x - 7y + 23 = 0$, $(AC) : 7x + 5y + 47 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-3, 0)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(AC) : 7x - 3y + 11 = 0$, $(BC) : 12x - 2y + 33 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 2y - 1 = 0$ и $3x - 2y + 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$ и образующей угол $\pi/3$ с прямой $x - y + z = 0$, $x - y + 2z = 0$.

14. Найти расстояние от точки $M(6, 3, -6)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+5}{3} = \frac{y+12}{9} = \frac{z-7}{2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы острого угла, Образованного двумя прямыми $3x + 4y - 5 = 0$, $5x - 12y + 3 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{21}$, ортогональный векторам $\vec{a} = (2,-1,1)$, $\vec{b} = (1,0,-1)$ и направленный так, что тройка $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ — правая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (-3,2,-1)$, $\vec{q} = (1,-1,2)$, $\vec{r} = (2,1,-3)$ и $\vec{s} = (5,5,-8)$. Проверить, что векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{59}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 14$, $\vec{x}\vec{b} = 3$, где $\vec{a} = (1,-3,2)$ и $\vec{b} = (1,1,1)$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (-1,2,-1)$, $\vec{b} = (1,-3,2)$ и $\vec{c} = (0,-1,2)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройка $(\vec{d},\vec{b},\vec{c})$ — правая.

5. На плоскости даны два базиса $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1,\vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1,\vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(1,-3)$ и $(-2,7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1+2\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1+\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1+2\vec{b}_2-\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : 2x + y - 2 = 0$, а точка $A(3,-1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна $\frac{9}{4}$. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты этого треугольника.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(AC) : 7x - 3y + 11 = 0$, $(BC) : 12x - 2y + 33 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 5x + y + 11 = 0$, $(BC) : 5x-7y+23 = 0$, $(CD) : 7x+5y+47 = 0$, $(DA) : 7x-3y+11 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $8x-5y-3 = 0$ и $8x-5y-15 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

13. Показать, что три плоскости $11x + 10y + 2z = 0$, $3x + 4y = 0$, $10x + 11y + z + 6 = 0$ образуют призму, и найти ее внутренний двугранный угол, образованный первой и второй плоскостями.

14. Найти точку, симметричную $M(6, 3, -6)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+2}{3} = \frac{y+3}{9} = \frac{z-9}{2}$.

15. Написать уравнения сторон ромба, зная точку $M(-1, 4)$ пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах: $P(1, -2)$ на стороне AB, $Q(4, 4)$ на стороне BC, $R(3, 7)$ на стороне CD.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, -1, 0)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{3}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (9, 2, -13)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{11}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 3$, $\vec{x}\vec{b} = 3$, где $\vec{a} = (1, -2, 2)$ и $\vec{b} = (2, 2, 1)$.

4. Доказать, что точки $A(4, 2, 3)$, $B(1, 1, 4)$, $C(2, 1, 3)$ и $D(1, 0, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(-1, 2)$ и $(2, -7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e'}_1 - 4\vec{e'}_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. На плоскости даны три точки $A(2, 3)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 2)$, и прямая ℓ : $x - 5y + 7 = 0$. Составить уравнение этой прямой в системе координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(AC) : 13x + 20y + 47 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-3, 3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 8x + 13y + 11 = 0$, $(AC) : 9x + 16y + 11 = 0$, $(BC) : 17x + 29y + 33 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $2x + 3y - 5 = 0$ и $2x + 3y - 11 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x + 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(-3, 4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

13. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, в котором лежит начало координат.

14. Найти расстояние от точки $M(17, 1, 7)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{8} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-1}{-8}$.

15. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, -1)$. Найти вектор $\vec{c}$ длины $\sqrt{3}$, ортогональный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (10, 0, -9)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{14}$ образует с осью Ox тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -20$, $\vec{x}\vec{b} = 11$, где $\vec{a} = (1, -6, -8)$ и $\vec{b} = (4, -7, 4)$.

4. Доказать, что точки $A(1, 4, 1)$, $B(1, 1, -2)$, $C(-1, 2, 3)$ и $D(0, 2, 1)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(1, 2)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Прямые $\ell_1 : x - 3y + 2 = 0$ и $\ell_2 : 3x + 2y - 5 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1, 2)$ имеет в новой системе координаты $(1, 1)$. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $5x - 4y + 7 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 8x + 13y + 11 = 0$, $(AC) : 9x + 16y + 11 = 0$, $(BC) : 17x + 29y + 33 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 2x + 3y - 5 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(CD) : 13x + 20y + 47 = 0$, $(DA) : 9x + 16y + 11 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $9x - 4y - 5 = 0$ и $9x - 4y - 12 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x-2y+z-5=0$, $3x+6y-2z+1=0$, в котором лежит точка $M(1,2,2)$.

13. С помощью аналитической геометрии найти расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно 6.

14. Найти точку, симметричную $M(17,1,7)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+1}{8}=\frac{y+6}{-5}=\frac{z+7}{-8}$.

15. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(15,10)$ и $(10,5)$, зная, что прямая $x+2y=0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. По векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (-3, -4, 5)$ и $\vec{s} = (-3, -4, 5)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{11}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 5$, $\vec{x}\vec{b} = 29$, где $\vec{a} = (5, 2, -8)$ и
$\vec{b} = (8, 4, 9)$.

4. Доказать, что точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-1, 1, 3)$ и $D(0, 1, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса: $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(-1, -2)$ и $(2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $3\vec{e'}_1 - 4\vec{e'}_2$ в первом базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 4$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана прямая $\ell : \sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной декартовой системы координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ имеет в исходной системе координаты $O'(-2, 3)$, а базисные векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ получаются из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ соответственно поворотом на угол $\pi/6$ в направлении кратчайшего поворота от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$. Составить уравнение прямой ℓ в системе координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(BC) : 8x - 15y + 26 = 0$, $(AC) : 11x - 16y - 29 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(9, 6)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(AC) : x - 4y + 5 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $7x - 4y - 3 = 0$ и $7x - 4y - 8 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $2x + 6y + 3z + 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

13. Найти расстояние от точки $(1, 3, 5)$ до прямой $5x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + y + 2z - 3 = 0$.

14. Найти расстояние от точки $M(-6, -1, -2)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-8}{5}$.

15. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x + 3y - 10 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ перпендикуляров, восставленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. По векторам $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, $\vec{c} = (3, 1, 1)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (-2, 1, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -3)$ и $\vec{s} = (3, 4, -5)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{19}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -29$, $\vec{x}\vec{b} = -4$, где $\vec{a} = (1, 8, -8)$ и $\vec{b} = (2, -5, -5)$.

4. Доказать, что точки $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 4, 1)$, $C(1, -1, 0)$ и $D(2, 4, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. На плоскости даны два базиса $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ и $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2)$. Векторы второго базиса $\vec{e'}_1, \vec{e'}_2$ имеют в первом базисе координаты $(1, -2)$ и $(-2, 7)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $5\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ во втором базисе.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 8$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Прямые $\ell_1 : 2x - y + 1 = 0$ и $\ell_2 : x + 2y - 7 = 0$, заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(2, 0)$ имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $4x + y - 1 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : -4x + 5y + 2 = 0$, $(AC) : x - 4y + 5 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : -4x+5y+2 = 0$, $(BC) : 8x-15y+26 = 0$, $(CD) : 11x-16y-29 = 0$, $(DA) : x-4y+5 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $6x - 5y - 1 = 0$ и $6x - 5y - 8 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x - 2y + 2z - 15 = 0$.

13. Доказать, что плоскость $2x - 6y + 3z - 49 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

14. Найти точку, симметричную $M(-6, -1, -2)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+7}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{5}$.

15. Даны две прямые $3x + 4y - 2 = 0$, $5x - 12y - 4 = 0$ и точка $(1, 1)$. Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния от данных прямых были равны соответственно 3 и 1.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. По векторам $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$, $\vec{c} = (2, 2, 0)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (11, 3, -16)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{35}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = -1$, $\vec{x}\vec{b} = -4$, где $\vec{a} = (6, -1, -4)$ и $\vec{b} = (3, -3, -2)$.

4. Доказать, что точки $A(3, 2, 2)$, $B(0, 5, 2)$, $C(2, 0, 1)$ и $D(3, 5, 3)$ лежат в одной плоскости.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (4, -3)$, $\vec{a}_2 = (2, 1)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон ромба, зная точку $M(-1, 4)$ пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах: $P(1, -2)$ на стороне AB, $Q(4, 4)$ на стороне BC, $R(3, 7)$ на стороне CD.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(BC) : 20x - 13y + 31 = 0$, $(AC) : 9x - 4y - 36 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(6, 11)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(AC) : 11x - 8y + 12 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 7y - 6 = 0$ и $4x - 7y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Найти расстояние от точки $P(1, 2, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1, -1, 2)$, $M_2(2, 1, 4)$, $M_3(3, 0, 0)$.

13. Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-1}$.

14. Найти расстояние от точки $M(-5, 8, -4)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+1}{5} = \frac{y+8}{6} = \frac{z-9}{6}$.

15. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром $(1, 9)$ и радиусом 5, зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой $x - 7y = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. По векторам $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$, $\vec{c} = (0, 1, 2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (17, -3, -6)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{45}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 61$, $\vec{x}\vec{b} = -23$, где $\vec{a} = (2, -9, 7)$ и $\vec{b} = (1, -9, -9)$.

4. Доказать, что точки $A(-2, 1, 1)$, $B(1, 4, 1)$, $C(-1, -1, 0)$ и $D(-2, 4, 2)$ лежат в одной плоскости.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (4, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, -1)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/4$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(AC) : 11x - 8y + 12 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : y - 7 = 0$, $(BC) : 20x - 13y + 31 = 0$, $(CD) : 9x - 4y - 36 = 0$, $(DA) : 11x - 8y + 12 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $2x + 3y - 5 = 0$ и $2x + 3y - 1 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - y + z - 5 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

13. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 2y + 26z - 113 = 0$ и параллельных прямым $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+13}{2}$, $\frac{x+7}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{0}$.

14. Найти точку, симметричную $M(-5, 8, -4)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x-4}{5} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-15}{6}$.

15. Даны уравнения $3x-2y+1 = 0$, $x-y+1 = 0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x - y - 1 = 0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 0, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1, -2)$. Найти вектор $\big[\vec{a} + \vec{c}, [\vec{b}, \vec{c}]\big] - (\vec{a}(\vec{b} + 2\vec{c}))\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (3, -2, 1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (-5, -5, 8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{17}$ образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 33$, $\vec{x}\vec{b} = -26$, где $\vec{a} = (1, 9, 9)$ и $\vec{b} = (2, -3, -7)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(2, 3, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (-4, -3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 1)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(15, 10)$ и $(10, 5)$, зная, что прямая $x + 2y = 0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(AC) : 45x + 32y + 16 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-14, 20)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(AC) : 29x + 20y - 4 = 0$, $(BC) : 56x + 39y + 1 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x + 5y - 9 = 0$ и $4x + 5y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z - 6 = 0, \\ 2x - 3y + z - 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. Найти проекцию точки $C(3, -4, -2)$ на плоскость, проходящую через параллельные прямые $\frac{x-5}{13} = \frac{y-6}{1} = \frac{z+3}{-4}$, $\frac{x-2}{13} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{-4}$.

14. Найти расстояние от точки $M(-4, -3, 6)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x-3}{7} = \frac{y+5}{8} = \frac{z-1}{8}$.

15. Вершинами треугольника являются точки $A(20, 15)$, $B(-16, 0)$, $C(-8, -6)$. Найти длины радиусов и координаты центров вписанной и описанной окружностей.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 3, 2)$ и $\vec{c} = (2, 2, 0)$. Найти вектор $\big[[\vec{a}, -\vec{b}], \vec{a} + \vec{c}\big] - (\vec{a}\vec{c})(2\vec{b} - \vec{c})$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (-3, 2, -1)$, $\vec{q} = (1, -1, 2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (5, 5, -8)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{17}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 11$, $\vec{x}\vec{b} = 3$, где $\vec{a} = (5, -6, 4)$ и $\vec{b} = (1, -2, 2)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(3, 4, 2)$, $B(6, 6, 5)$, $C(4, 3, 0)$, $D(-4, -3, 9)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (1, -3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 1$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x + 3y - 10 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ перпендикуляров, восставленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(AC) : 29x + 20y - 4 = 0$, $(BC) : 56x + 39y + 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 27x + 19y - 6 = 0$, $(BC) : 4x + 9y + 23 = 0$, $(CD) : 45x + 32y + 16 = 0$, $(DA) : 29x + 20y - 4 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 1 = 0$ и $4x - 3y - 9 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x + 2y + z - 5 = 0$, $3x - 2y + 6z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 2)$.

13. Доказать, что через прямую $\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0, \\ x - y - 2z = 0. \end{cases}$ можно провести две плоскости, касательные к сфере $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(-4, -3, 6)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+4}{7} = \frac{y+13}{8} = \frac{z+7}{8}$.

15. Точка $A(2, 0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $\ell : x+y-1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Даны точки $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, -3)$ и $C(5, 2, 6)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.

2. Даны векторы $\vec{p} = (2, -1, -1)$, $\vec{q} = (-1, 1, -2)$, $\vec{r} = (5, 1, -4)$ и $\vec{s} = (9, 2, -13)$. Проверить, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $3\sqrt{3}$ образует с осью Oy острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a} = 9$, $\vec{x}\vec{b} = 9$, где $\vec{a} = (1, -2, -2)$ и $\vec{b} = (2, 2, -1)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(4, 5, 3)$, $B(7, 7, 6)$, $C(5, 4, 1)$, $D(-3, -2, 10)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (-1, -3)$, $\vec{a}_2 = (2, -5)$ и $\vec{b}_1 = (6, -2)$, $\vec{b}_2 = (0, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны две прямые $3x + 4y - 2 = 0$, $5x - 12y - 4 = 0$ и точка $(1, 1)$. Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния от данных прямых были равны соответственно 3 и 1.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 15x + 11y - 7 = 0$, $(BC) : 25x + 17y - 29 = 0$, $(AC) : 39x + 28y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(9, -12)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 15x + 11y - 7 = 0$, $(AC) : x + 1 = 0$, $(BC) : 7x + 5y - 1 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $5x + 8y - 1 = 0$ и $5x + 8y - 3 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $12x - 16y + 15z - 175 = 0$ касается сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ и найти координаты точки касания.

13. Найти точку Q, симметричную точке $P(3, -4, -6)$ относительно плоскости, проходящей через точки $M_1(-6, 1, -5)$, $M_2(7, -2, -1)$, $M_3(10, -7, 1)$.

14. Найти расстояние от точки $M(9, 2, -3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+4}{2} = \frac{y+5}{-3} = \frac{z-5}{-3}$.

15. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : x + 2y - 2 = 0$, а одна из боковых сторон — на прямой $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$. Расстояние от другой боковой стороны до точки $\ell_1 \cap \ell_2$ равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Составить уравнение этой боковой стороны.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Даны точки $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$ и $C(6,3,7)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.

2. Даны векторы $\vec{p}=(2,-1,-1)$, $\vec{q}=(1,-1,2)$, $\vec{r}=(5,1,-4)$ и $\vec{s}=(10,0,-9)$. Проверить, что векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{30}$ образует с осью Ox острый угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a}=7$, $\vec{x}\vec{b}=4$, где $\vec{a}=(1,-4,3)$ и $\vec{b}=(3,5,-8)$.

4. Даны вершины тетраэдра $A(5,6,4)$, $B(8,8,7)$, $C(6,5,2)$, $D(-2,-1,11)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1=(1,3)$, $\vec{a}_2=(2,5)$ и $\vec{b}_1=(6,-2)$, $\vec{b}_2=(0,-5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1-3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=2$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/6$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1+2\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=2\vec{b}_1+\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=2\vec{b}_1+2\vec{b}_2-\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром $(1,9)$ и радиусом 5, зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой $x-7y=0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB): 15x+11y-7=0$, $(AC): x+1=0$, $(BC): 7x+5y-1=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB): 15x+11y-7=0$, $(BC): 25x+17y-29=0$, $(CD): 39x+28y+11=0$, $(DA): x+1=0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x-4y+1=0$ и $3x-4y-3=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2=81$ и параллельных плоскости $x+2y-2z-10=0$.

13. Доказать, что через прямую $\frac{x+6}{3}=y+3=z+1$ нельзя провести плоскость, касательную к сфере $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-15=0$.

14. Найти точку, симметричную $M(9,2,-3)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+6}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-8}{-3}$.

15. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку $A(-1, 3)$ и касающихся прямых $\ell_1 : 7x + y = 0$ и $\ell_2 : x - y + 8 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Даны точки $A(1,2,0)$, $B(3,0,-3)$ и $C(5,2,6)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A.

2. Даны векторы $\vec{p}=(5,1,-4)$, $\vec{q}=(-1,1,-2)$, $\vec{r}=(-3,-4,5)$ и $\vec{s}=(6,7,-13)$. Проверить, что векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{30}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a}=-19$, $\vec{x}\vec{b}=10$, где $\vec{a}=(1,6,-9)$ и $\vec{b}=(3,3,-1)$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2,1,-1)$, $B(3,0,1)$, $C(2,-1,3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1=(-1,3)$, $\vec{a}_2=(-2,5)$ и $\vec{b}_1=(6,-2)$, $\vec{b}_2=(0,-5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1-3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=1$, $b_2=2$, $b_3=4$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/6$ и векторы $\vec{a}_1=-\vec{b}_1+2\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=-2\vec{b}_1+\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=-2\vec{b}_1+2\vec{b}_2-\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7,15)$, а середина его основания в точке $(1,3)$. Составить уравнения сторон треугольника, зная, что тангенс угла при основании равен 4.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB): 6x-5y+7=0$, $(AC): 7x-4y-1=0$, $(BC): 12x-2y+33=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-3,-3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB): 6x-5y+7=0$, $(AC): 7x-4y-1=0$, $(BC): 12x-2y+33=0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x+7y+10=0$ и $3x+7y-5=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x+4y+z+6=0, \\ 2x+3y+z+2=0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3,4,-6)$ и $M_2(-1,2,2)$.

13. Найти точку Q, симметричную точке $P(-3, 2, 5)$ относительно плоскости, проходящей через прямые

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y - 4z + 3 = 0, \\ x - 2y + 2z - 5 = 0; \end{array}\right. \quad \text{и} \left\{\begin{array}{l} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{array}\right.$$

14. Найти расстояние от точки $M(15, 6, 11)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{6} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-3}$.

15. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой $\ell_1 : 2x + y - 2 = 0$, а точка $A(3, -1)$ является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна $\frac{9}{4}$. Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты этого треугольника.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Даны точки $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$ и $C(6,3,7)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A.

2. Даны векторы $\vec{p}=(-2,1,1)$, $\vec{q}=(1,-1,2)$, $\vec{r}=(5,1,-4)$ и $\vec{s}=(3,4,-5)$. Проверить, что векторы $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{s}$ в этом базисе.

3. Вектор $\vec{x}$ длины $\sqrt{21}$ образует с осью Oy тупой угол. Найти его координаты, если известно, что $\vec{x}\vec{a}=21$, $\vec{x}\vec{b}=14$, где $\vec{a}=(4,-1,2)$ и $\vec{b}=(3,-8,-3)$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2,3,-1)$, $B(3,2,1)$, $C(2,1,3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1=(1,3)$, $\vec{a}_2=(-2,-5)$ и $\vec{b}_1=(6,-2)$, $\vec{b}_2=(0,-5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1-3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1+\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=4$, $b_2=2$, $b_3=1$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/6$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1+3\vec{b}_2+\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=\vec{b}_1+\vec{b}_2+3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=3\vec{b}_1+\vec{b}_2+\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения $3x-2y+1=0$, $x-y+1=0$ двух сторон треугольника и уравнение $2x-y-1=0$ медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB): 18x+13y-7=0$, $(AC): 23x+16y-1=0$, $(BC): 41x+29y+3=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB): 6x-5y+7=0$, $(BC): 22x-15y+29=0$, $(CD): 21x-16y-11=0$, $(DA): 7x-4y-1=0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x-3y-1=0$ и $4x-3y-3=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $2x-y+2z-5=0$, $6x+2y-3z+1=0$, в котором лежит точка $M(1,2,2)$.

13. Доказать, что через прямую $x = 4t + 4$, $y = 3t + 1$, $z = t + 1$ можно провести единственную плоскость, касательную к сфере $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z + 8 = 0$, и составить ее уравнение.

14. Найти точку, симметричную $M(15, 6, 11)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{6} = \frac{y+6}{7} = \frac{z-4}{-3}$.

15. На плоскости даны три точки $A(2, 3)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 2)$, и прямая $\ell : x - 5y + 7 = 0$. Составить уравнение этой прямой в системе координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Вектор $\vec{x}$ ортогонален векторам $\vec{a}=(1,-2,2)$ и $\vec{b}=(2,1,0)$ и образует тупой угол с вектором $\vec{c}=(1,-1,0)$. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что $|\vec{x}\,|=3\sqrt{5}$.

2. Проверить, что векторы $e_1=(3,5,6)$, $e_2=(1,2,2)$, $e_3=(1,2,3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x=(5,6,7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a}=(2,3,-3)$, $\vec{b}=(-1,2,3)$ и $\vec{c}=(1,-2,4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x}=-4$ и $\vec{c}\,\vec{x}=7$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2,5,-1)$, $B(3,4,1)$, $C(2,3,3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(1,1)$, $B(2,3)$, $C(3,2)$ приобретают новые координаты $(3,4)$, $(5,7)$, $(7,5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1+3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=2$, $b_2=4$, $b_3=1$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/6$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1+3\vec{b}_2+3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=2\vec{b}_1+\vec{b}_2+3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=3\vec{b}_1+2\vec{b}_2+\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-y-1=0$ и $x-2y-10=0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,-1)$. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB): 6x-5y+7=0$, $(BC): 22x-15y+29=0$, $(CD): 21x-16y-11=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-15,21)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB): 18x+13y-7=0$, $(AC): 23x+16y-1=0$, $(BC): 41x+29y+3=0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $A(2,6,-1)$, $B(9,2,3)$, $C(7,9,-5)$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $-2x+6y+3z+98=0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=196$ и найти координаты точки касания.

13. Убедиться, что прямые $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-5}{4}$ и $x=3t+7$, $y=2t+2$, $z=-2t+1$ лежат в одной плоскости. Найти уравнение этой плоскости и координаты точки пересечения указанных прямых.

14. Найти расстояние от точки $M(11, -6, 19)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{6} = \frac{y+3}{-9} = \frac{z+7}{-1}$.

15. Прямые $\ell_1 : x-3y+2 = 0$ и $\ell_2 : 3x+2y-5 = 0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1, 2)$ имеет в новой системе координаты $(1, 1)$. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $\ell_3 : 5x - 4y + 7 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 1, -2)$, $\vec{b} = (4, 1, -2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Найти вектор $\big[[-\vec{a}, \vec{b}], 2\vec{a} - \vec{c}\big] - (\vec{b}\vec{c})(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (3, 5, 6)$, $e_2 = (-1, -2, -2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (5, 6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x} = 4$ и $\vec{c}\,\vec{x} = 7$.

4. Объем тетраэдра равен 5, три его вершины находятся в точках $A(2, 8, -1)$, $B(3, 7, 1)$, $C(2, 6, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(1, -1)$, $B(2, -3)$, $C(3, -2)$ приобретают новые координаты $(3, -4)$, $(5, -7)$, $(7, -5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 8$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1, 1)$, $(2, 8)$ и точки $(4, -3)$, $(15, 14)$ на ее боковых сторонах.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(AC) : 7x - 4y + 1 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 13y - 7 = 0$, $(BC) : 14x + 9y + 29 = 0$, $(CD) : 27x + 20y + 11 = 0$, $(DA) : 23x + 16y - 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $7x + 9y - 2 = 0$ и $7x + 9y - 6 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ и параллельных плоскости $x - 2y - 2z - 15 = 0$.

13. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z + 15 = 0$.

14. Найти точку, симметричную $M(11, -6, 19)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{6} = \frac{y-6}{-9} = \frac{z+6}{-1}$.

15. В прямоугольной декартовой системе координат $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана прямая $\ell : \sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной декартовой системы координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ имеет в исходной системе координаты $O'(-2, 3)$, а базисные векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ получаются из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ соответственно поворотом на угол $\pi/6$ в направлении кратчайшего поворота от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$. Составить уравнение прямой ℓ в системе координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Вектор $\vec{x}$ ортогонален векторам $\vec{a} = (1, 2, -2)$ и $\vec{b} = (2, 1, 0)$ и образует тупой угол с вектором $\vec{c} = (1, -1, 0)$. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что $|\vec{x}\,| = 3\sqrt{5}$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (-3, -5, -6)$, $e_2 = (1, 2, 2)$, $e_3 = (1, 2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (5, 6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -3)$, $\vec{b} = (1, -2, -3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\,\vec{x} = 7$.

4. Найти объем параллелипипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (6, 1, 0)$, $\vec{b} = (1, -3, 4)$ и $\vec{c} = (0, 1, -3)$.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$, $C(-3, 2)$ приобретают новые координаты $(-3, 4)$, $(-5, 7)$, $(-7, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения параллельных прямых $9x - 7y - 130 = 0$ и $9x - 7y - 162 = 0$. Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 13y - 7 = 0$, $(BC) : 14x + 9y + 29 = 0$, $(AC) : 27x + 20y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(3, 3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(AC) : 7x - 4y + 1 = 0$, $(BC) : -3x + y + 18 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x + 7y - 3 = 0$ и $4x + 7y + 1 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Найти расстояние от точки $P(1, 5, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(2, 0, 3)$, $M_2(3, 2, 5)$, $M_3(4, 1, 1)$.

13. Найти точку Q, симметричную точке $P(4, 1, 6)$ относительно прямой
$$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0, \\ 2x + y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

14. Найти расстояние от точки $M(11, -4, 13)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{5} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+8}{-8}$.

15. Прямые $\ell_1 : 2x - y + 1 = 0$ и $\ell_2 : x + 2y - 7 = 0$, заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(2, 0)$ имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $4x + y - 1 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{b} = (4, 1, -2)$ и $\vec{c} = (1, 2, 3)$. Найти вектор $\big[[-\vec{a}, \vec{b}], 2\vec{a} - \vec{c}\big] - (\vec{b}\vec{c})(2\vec{a} - 3\vec{c})$.

2. Проверить, что векторы $e_1 = (-3, -5, 6)$, $e_2 = (-1, -2, 2)$, $e_3 = (-1, -2, 3)$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $x = (-5, -6, 7)$ по этому базису.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, -3, 3)$, $\vec{b} = (1, -2, -3)$ и $\vec{c} = (1, -2, 4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x} = 4$ и $\vec{c}\,\vec{x} = 7$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (1, 5, 3)$, $\vec{b} = (7, 2, -2)$ и $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Компланарны ли векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $[-\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}]$?

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-1, -1)$, $B(-2, -3)$, $C(-3, -2)$ приобретают новые координаты $(-3, -4)$, $(-5, -7)$, $(-7, -5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/6$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти площадь треугольника с вершинами $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(4, 6)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(BC) : 22x - 15y - 29 = 0$, $(AC) : 21x - 16y + 11 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 5y - 7 = 0$, $(BC) : 22x - 15y - 29 = 0$, $(CD) : 21x - 16y + 11 = 0$, $(DA) : 7x - 4y + 1 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 5y - 4 = 0$ и $3x + 5y - 8 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - 6y + z - 5 = 0$, $3x + 5y - 7z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. На плоскости Oxy найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(-1, 2, 5)$ и $B(11, -16, 10)$ была бы наименьшей.

14. Найти точку, симметричную $M(11,-4,13)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+8}{5}=\frac{y-11}{-7}=\frac{z}{-8}$.

15. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(2,2)$ и уравнения двух высот $x-4y=0$, $x+y-1=0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Вектор $\vec{x}$ ортогонален векторам $\vec{a} = (2, 1, -2)$ и $\vec{b} = (0, 2, 1)$ и образует острый угол с вектором $\vec{c} = (0, 1, -1)$. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что $|\vec{x}\,| = \sqrt{5}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (7, 7, -5)$, $\vec{b} = (5, 4, -2)$ и $\vec{c} = (5, 3, 9)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (-11, 7, -77)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, 3, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 3)$ и $\vec{c} = (-1, 2, -4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\,\vec{x} = -7$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (1, 5, 3)$, $\vec{b} = (7, 2, -2)$ и $\vec{c} = (3, -2, 5)$. Компланарны ли векторы $\vec{a} - 2\vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $[-\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}]$?

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(3, 2)$ приобретают новые координаты $(3, 4)$, $(5, 7)$, $(7, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 4y - 25 = 0$ и $3x - 4y - 39 = 0$. Найти расстояние между прямыми.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 13x + 18y - 7 = 0$, $(AC) : 16x + 23y - 1 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(21, -15)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 13x+18y-7 = 0$, $(AC) : 16x+23y-1 = 0$, $(BC) : 11x - 9y + 30 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $7x-4y-4 = 0$ и $14x-8y-16 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z - 8 = 0, \\ 2x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(-3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. На плоскости Oxz найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(3, 2, -5)$ и $B(8, -14, 17)$ была бы наименьшей.

14. Найти расстояние от точки $M(16, -9, 2)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+8}{1} = \frac{y-9}{6} = \frac{z+1}{-8}$.

15. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(3, 3)$, уравнения высоты $x - 4y + 3 = 0$ и медианы $y - 1 = 0$, проведенных из одной вершины.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Даны точки $A(3,4,2)$, $B(5,2,-1)$ и $C(7,4,8)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(4,5,-3)$, $\vec{b}=(6,-1,-1)$ и $\vec{c}=(3,-6,1)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x}=(39,49,-24)$.

3. Даны векторы $\vec{a}=(-2,-3,3)$, $\vec{b}=(-1,2,3)$ и $\vec{c}=(-1,2,-4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x}=4$ и $\vec{c}\,\vec{x}=-7$.

4. Даны векторы $\vec{a}=(1,5,3)$, $\vec{b}=(7,2,-2)$ и $\vec{c}=(3,-2,5)$. Компланарны ли векторы $2\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{b}\times\vec{c}$ и $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+2\vec{c}]$?

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(2,-1)$, $B(4,-3)$, $C(3,-2)$ приобретают новые координаты $(3,-4)$, $(5,-7)$, $(7,-5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix}8&4\\4&4\end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1+3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=2$, $b_2=1$, $b_3=2$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/3$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1+2\vec{b}_2+2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=2\vec{b}_1+\vec{b}_2+2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=2\vec{b}_1+2\vec{b}_2+\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения параллельных прямых $2x+3y-13=0$ и $2x+3y-11=0$. Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB):13x+18y-7=0$, $(BC):9x+14y+29=0$, $(AC):20x+27y+11=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB):13x+18y-7=0$, $(BC):9x+14y+29=0$, $(CD):20x+27y+11=0$, $(DA):16x+23y-1=0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $12x-10y-4=0$ и $6x-5y-18=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $6x+2y+3z-5=0$, $3x-2y-6z+1=0$, в котором лежит точка $M(3,2,2)$.

13. На плоскости $2x-3y+3z-17=0$ найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(3,-4,7)$ и $B(-5,-14,17)$ была бы наименьшей.

14. Найти точку, симметричную $M(16, -9, 2)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+9}{1} = \frac{y-3}{6} = \frac{z-7}{-8}$.

15. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения прямых $\ell_1 : 2x + 3y - 5 = 0$ и $\ell_2 : 3x - 2y - 1 = 0$ точка $A(1, 0)$. На плоскости выбрана новая прямоугольная декартова система координат, в которой прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются осями $O'X$ и $O'Y$ соответственно, а точка A лежит в первом квадранте. Найти в этой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $\ell_3 : 5x + 8y - 2 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Даны точки $A(-2,-3,-1)$, $B(-4,-1,2)$ и $C(-6,-3,-7)$. Вычислить площадь $\triangle ABC$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(5,-8,6)$, $\vec{b}=(1,-7,1)$ и $\vec{c}=(4,-3,-6)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x}=(28,-78,87)$.

3. Даны векторы $\vec{a}=(2,3,-3)$, $\vec{b}=(1,-2,-3)$ и $\vec{c}=(-1,2,-4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x}=-4$ и $\vec{c}\,\vec{x}=-7$.

4. Выяснить, лежат ли точки $A(1,1,1)$, $B(2,1,0)$, $C(-1,1,3)$, $D(5,-1,2)$ в одной плоскости.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-2,1)$, $B(-4,3)$, $C(-3,2)$ приобретают новые координаты $(-3,4)$, $(-5,7)$, $(-7,5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1+3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=2$, $b_2=2$, $b_3=1$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/3$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1-2\vec{b}_2+\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=\vec{b}_1-\vec{b}_2+2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=2\vec{b}_1-\vec{b}_2+\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC: $A(0,0)$, $B(4,3)$, $C(6,8)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB): 5x-6y+7=0$, $(BC): 15x-22y+29=0$, $(CD): 16x-21y-11=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(3,3)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB): 5x-6y+7=0$, $(AC): 4x-7y-1=0$, $(BC): x+y-3=0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $8x-14y-6=0$ и $4x-7y-7=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $12x-16y+15z-75=0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=9$ и найти координаты точки касания.

13. На плоскости $2x+3y-4z-15=0$ найти такую точку P, сумма расстояний которой до точек $A(5,2,-7)$ и $B(7,-25,10)$ была бы наименьшей.

14. Найти расстояние от точки $M(2,-2,3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+6}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{4}$.

15. На плоскости даны три точки $A(4,5)$, $B(2,6)$, $C(1,4)$, и прямая ℓ : $2x - 5y + 3 = 0$. Составить уравнение этой прямой в системе координат $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Даны точки $A(3,4,2)$, $B(5,2,-1)$ и $C(7,4,8)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A.

2. Даны векторы $\vec{a}=(7,-7,3)$, $\vec{b}=(2,3,-4)$ и $\vec{c}=(5,-5,7)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x}=(47,-7,-43)$.

3. Даны векторы $\vec{a}=(-2,-3,3)$, $\vec{b}=(1,-2,-3)$ и $\vec{c}=(-1,2,-4)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x}=4$ и $\vec{c}\,\vec{x}=-7$.

4. Выяснить, лежат ли точки $A(5,1,1)$, $B(6,1,0)$, $C(3,1,3)$, $D(8,-1,2)$ в одной плоскости.

5. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-2,-1)$, $B(-4,-3)$, $C(-3,-2)$ приобретают новые координаты $(-3,-4)$, $(-5,-7)$, $(-7,-5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1+3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=1$, $b_2=1$, $b_3=2$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/3$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1+2\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=2\vec{b}_1+\vec{b}_2-2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=2\vec{b}_1+2\vec{b}_2-\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны две вершины треугольника $A(2,-2)$, $B(2,3)$ и точка пересечения медиан $H(1,1)$. Найти третью вершину C.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB): 5x-6y+7=0$, $(AC): 4x-7y-1=0$, $(BC): x+y-3=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB): 5x-6y+7=0$, $(BC): 15x-22y+29=0$, $(CD): 16x-21y-11=0$, $(DA): 4x-7y-1=0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $12x+5y-16=0$ и $12x+5y-3=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2+y^2+z^2=144$ и параллельных плоскости $x-2y-2z-10=0$.

13. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2,-4,-1)$ и середину отрезка прямой $\begin{cases} 3x+4y+5z-26=0, \\ 3x-3y-2z-5=0, \end{cases}$ заключенного между плоскостями $5x+3y-4z+11=0$, $5x+3y-4z-41=0$.

14. Найти точку, симметричную $M(2,-2,3)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-5}{4}$.

15. Прямые $\ell_1: 2x-y+1=0$ и $\ell_2: 3x+4y-7=0$ являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(-1,2)$ имеет в новой системе координаты $(1,1)$. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $\ell_3: 5x-4y+7=0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 25

1. Даны точки $A(-2,-3,-1)$, $B(-4,-1,2)$ и $C(-6,-3,-7)$. Вычислить длину высоты $\triangle ABC$, опущенной из вершины A.

2. Даны векторы $\vec{a} = (1,-1,2)$, $\vec{b} = (1,-5,8)$ и $\vec{c} = (7,-7,4)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (-58,70,-54)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (4,-1,2)$, $\vec{b} = (-1,-2,6)$ и $\vec{c} = (3,-2,1)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{c}$, $\vec{a}\,\vec{x} = 4$ и $\vec{b}\,\vec{x} = 1$.

4. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $30°$. Тройка $(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$ – правая. Зная, что $|\vec{a}\,| = 6$, $|\vec{b}\,| = 3$, $|\vec{c}\,| = 3$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1,1)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2,3)$ и последующего поворота системы координат по часовой стрелке на угол $\pi/3$.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -2\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти длину высоты AD треугольника ABC: $A(2,-3)$, $B(3,-4)$, $C(3,-1)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 23y - 12 = 0$, $(AC) : 23x + 30y - 8 = 0$, $(BC) : 41x + 53y - 9 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(26,-20)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 18x+23y-12 = 0$, $(AC) : 23x+30y-8 = 0$, $(BC) : 41x + 53y - 9 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $8x+10y-16 = 0$ и $4x+5y-2 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} -3x + 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(5,4,-6)$ и $M_2(-1,2,2)$.

13. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-1,2,-3)$ перпендикулярно к вектору $\vec{a} = (6,-2,-3)$ и пересекает прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

14. Найти расстояние от точки $M(1, -4, -2$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+7}{1} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{3}$.

15. В прямоугольной декартовой системе координат $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ задана прямая $\ell : x + 2y - 6 = 0$. Начало новой прямоугольной декартовой системы координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ имеет в исходной системе координаты $O'(-2, 1)$, а базисные векторы $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'$ получаются из векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ соответственно поворотом на угол $\pi/3$ в направлении кратчайшего поворота от $\vec{e}_1$ к $\vec{e}_2$. Составить уравнение прямой ℓ в системе координат $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 26

1. По векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 5, 1)$, $\vec{c} = (-1, 1, -3)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (1, -5, -7)$, $\vec{b} = (4, -1, 4)$ и $\vec{c} = (3, -4, 5)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (6, -37, 6)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, 0)$, $\vec{b} = (2, 3, -1)$ и $\vec{c} = (3, -1, 2)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{x} = -4$ и $\vec{c}\,\vec{x} = 9$.

4. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°. Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ – правая. Зная, что $|\vec{a}\,| = 6$, $|\vec{b}\,| = 3$, $|\vec{c}\,| = 5$, вычислить $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 1)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2, 1)$ и последующего поворота системы координат против часовой стрелке на угол $\pi/3$.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 4$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(2, 2)$ и уравнения двух высот $x - 4y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(AC) : 7x - 10y - 8 = 0$, $(BC) : x - 3y - 9 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 18x + 23y - 12 = 0$, $(BC) : 14x + 19y + 24 = 0$, $(CD) : 27x + 34y + 4 = 0$, $(DA) : 23x + 30y - 8 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 6 = 0$ и $4x - 3y - 16 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $3x - 6y + 2z - 5 = 0$, $6x + 2y - 3z + 1 = 0$, в котором лежит точка $M(1, 2, 5)$.

13. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $M_1(-4,-5,3)$ и пересекает две прямые $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$.

14. Найти точку, симметричную $M(1,-4,-2$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+6}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-7}{3}$.

15. Прямые $\ell_1 : 3x-y-2=0$ и $\ell_2 : x+3y-7=0$, заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями $O'x'$ и $O'y'$ новой системы координат, а точка $A(2,0)$ имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой ℓ_3, которая в исходной системе имеет уравнение $4x+7y-1=0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 27

1. По векторам $\vec{a}=(1,4,2)$, $\vec{b}=(2,4,1)$, $\vec{c}=(3,1,2)$ найти вектор $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]-(\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=(8,3,-1)$, $\vec{b}=(4,-3,8)$ и $\vec{c}=(2,5,-6)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x}=(30,46,-58)$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}\,|=4$, $|\vec{b}\,|=1$ и $|\vec{c}\,|=3$, вычислить скалярное произведение $(2\vec{a}+\vec{b}\,)(\vec{b}-3\vec{c}\,)$.

4. Даны векторы $\vec{a}=(2,1,-1)$, $\vec{b}=(1,-1,0)$ и $\vec{c}=(0,1,-2)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{42}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройка $(\vec{d},\vec{b},\vec{c}\,)$ — правая.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1,2)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2,3)$ и последующего поворота системы координат по часовой стрелке на угол $\pi/6$.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1=2\vec{b}_1+3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1=\vec{b}_1-\vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$, в котором $b_1=2$, $b_2=4$, $b_3=1$, $\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_2}=\widehat{\vec{b}_1,\vec{b}_3}=\widehat{\vec{b}_2,\vec{b}_3}=\pi/3$ и векторы $\vec{a}_1=\vec{b}_1+3\vec{b}_2+3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2=2\vec{b}_1+\vec{b}_2+3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3=3\vec{b}_1+2\vec{b}_2+\vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1,\vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти проекцию точки $P(1,-3)$ на прямую, проходящую через точки $A(3,0)$ и $B(1,2)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB):18x+23y-12=0$, $(BC):14x+19y+24=0$, $(AC):27x+34y+4=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(-6,-4)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB):6x-7y+12=0$, $(AC):7x-10y-8=0$, $(BC):x-3y-9=0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $5x+12y-1=0$ и $5x+12y-14=0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Доказать, что плоскость $-2x+6y-3z+77=0$ касается сферы $x^2+y^2+z^2=121$ и найти координаты точки касания.

13. Составить параметрические уравнения общего перпендикуляра двух прямых, заданных уравнениями $x = 3t - 4$, $y = -2t + 2$, $z = 3t + 7$ и $x = t + 2$, $y = 2t - 6$, $z = -t - 13$.

14. Найти расстояние от точки $M(9, -1, 11)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+7}{-2}$.

15. Даны две противоположные вершины квадрата $A(1, 3)$ и $C(7, 5)$. Составить уравнения его сторон.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 28

1. По векторам $\vec{a} = (-1, 2, -7)$, $\vec{b} = (1, 3, 5)$, $\vec{c} = (2, 3, 0)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (9, 1, 1)$, $\vec{b} = (8, -8, 3)$ и $\vec{c} = (2, -1, -2)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (119, -26, 15)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (-2, 1, 2)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ и $\vec{c} = (-3, -2, 1)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{b}\,\vec{x} = 9$ и $\vec{c}\,\vec{x} = 3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 0)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 2)$. Найти координаты этой точки после параллельного переноса начала координат в точку $O'(2, 1)$ и последующего поворота системы координат против часовой стрелке на угол $\pi/6$.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 8$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + \vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2 + 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 - \vec{b}_2 + \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин $B(3, 3)$, уравнения высоты $x - 4y + 3 = 0$ и медианы $y - 1 = 0$, проведенных из одной вершины.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(BC) : 22x - 29y + 24 = 0$, $(AC) : 21x - 26y - 4 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 6x - 7y + 12 = 0$, $(BC) : 22x - 29y + 24 = 0$, $(CD) : 21x - 26y - 4 = 0$, $(DA) : 7x - 10y - 8 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x - 4y + 3 = 0$ и $6x - 8y - 4 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнения плоскостей, касательных к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 144$ и параллельных плоскости $x + 2y - 2z - 15 = 0$.

13. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x - 4y + z + 6 = 0, \\ 2x - 3y + z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноудаленной от точек $M_1(3, -4, -6)$ и $M_2(1, 2, 2)$.

14. Найти точку, симметричную $M(9, -1, 11)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+9}{-2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы тупого угла, Образованного двумя прямыми $3x - 4y + 1 = 0$, $8x - 6y + 2 = 0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 29

1. По векторам $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3, 1, 2)$ найти вектор $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}\vec{c})\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (1, 3, 3)$, $\vec{b} = (4, -2, 5)$ и $\vec{c} = (1, -7, 3)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (-23, 61, -34)$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2, -1, -2)$, $\vec{b} = (1, -1, 3)$ и $\vec{c} = (-3, -2, 1)$. Найти вектор $\vec{x}$ такой, что $\vec{x} \perp \vec{a}$, $\vec{b}\,\vec{x} = 9$ и $\vec{c}\,\vec{x} = 3$.

4. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, -1)$, $\vec{b} = (-1, 3, -2)$ и $\vec{c} = (0, 1, -2)$. Найти вектор $\vec{d}$ длины $\sqrt{84}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, ортогональный вектору $\vec{c}$ и направленный так, что тройка $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$ — правая.

5. Точка A в прямоугольной декартовой системе координат имеет координаты $(1, 1)$. Найти угол, на который нужно повернуть эту систему координат против часовой стрелки, чтобы точка A имела координаты $(\sqrt{2}, 0)$.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 8$, $b_3 = 2$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = 3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = 3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Найти точку Q, симметричную точке $P(3, 5)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(1, -1)$ и $B(4, -2)$.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(BC) : 16x + 43y + 21 = 0$, $(CD) : 15x + 38y + 16 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Определить положение точки $D(26, -10)$ относительно $\triangle ABC$, стороны которого лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(AC) : 19x + 50y - 4 = 0$, $(BC) : 31x + 81y + 1 = 0$.

11. Даны уравнения параллельных прямых $3x + 7y + 10 = 0$ и $6x + 14y - 1 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Найти расстояние от точки $P(6, 5, -3)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(3, 1, 4)$, $M_2(4, 3, 6)$, $M_3(5, 2, 2)$.

13. Составить уравнения проекции прямой $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x - y + z - 1 = 0$.

14. Найти расстояние от точки $M(1,2,-3)$ до прямой, заданной уравнениями $\frac{x+3}{5}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-8}{2}$.

15. Составить уравнение биссектрисы острого угла, Образованного двумя прямыми $8x+15y-23=0$, $5x-12y+7=0$.

Домашнее задание № 3 по алгебре и геометрии

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 30

1. Даны векторы $\vec{a} = (1, 2, -1)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 3, -2)$. Найти вектор $\big[\vec{a} + \vec{c}, [\vec{b}, \vec{c}]\big] - (\vec{a}(\vec{b} + 2\vec{c}))\vec{b}$.

2. Даны векторы $\vec{a} = (4, -7, 6)$, $\vec{b} = (3, 4, -8)$ и $\vec{c} = (7, 2, 1)$. Доказать, что эти векторы образуют базис в пространстве, и разложить по нему вектор $\vec{x} = (80, 6, -9)$.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, вектор $\vec{c}$ образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}\,| = 4$, $|\vec{b}\,| = 1$ и $|\vec{c}\,| = 6$, вычислить скалярное произведение $(2\vec{a} - \vec{b}\,)(\vec{b} + 3\vec{c}\,)$.

4. Выяснить, лежат ли точки $A(7, -1, 1)$, $B(-6, 1, 0)$, $C(3, -1, 3)$, $D(8, -1, -2)$ в одной плоскости.

5. Установить, что наборы векторов $\vec{a}_1 = (1, -3)$, $\vec{a}_2 = (-2, 5)$ и $\vec{b}_1 = (4, -2)$, $\vec{b}_2 = (3, -5)$ образуют базисы на плоскости и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму.

6. На плоскости задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ с матрицей Грама $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{a}_1 = 2\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$, $\vec{a}_1 = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$. Найти их длины и скалярное произведение.

7. В пространстве задан базис $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$, в котором $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 8$, $\widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_2} = \widehat{\vec{b}_1, \vec{b}_3} = \widehat{\vec{b}_2, \vec{b}_3} = \pi/3$ и векторы $\vec{a}_1 = -\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - 2\vec{b}_3$, $\vec{a}_2 = -3\vec{b}_1 + \vec{b}_2 - 3\vec{b}_3$, $\vec{a}_3 = -3\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2 - \vec{b}_3$. Найти векторное произведение $[\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ и смешанное произведение $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

8. Даны уравнения параллельных прямых $5x + 3y - 13 = 0$ и $5x + 3y - 1 = 0$. Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

9. Стороны $\triangle ABC$ лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(AC) : 19x + 50y - 4 = 0$, $(BC) : 31x + 81y + 1 = 0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат высоты этого треугольника, не вычисляя координат его вершин.

10. Стороны четырехугольника $ABCD$ лежат на прямых $(AB) : 12x + 31y - 6 = 0$, $(BC) : 16x + 43y + 22 = 0$, $(CD) : 15x + 38y + 16 = 0$, $(DA) : 19x + 50y - 4 = 0$. Определить, будет ли четырехугольник $ABCD$ выпуклым.

11. Даны уравнения параллельных прямых $4x - 3y - 10 = 0$ и $4x - 3y - 30 = 0$. Найти расстояние между прямыми и уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

12. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x - 4y + 3z - 7 = 0$, $3x + 5y - 7z + 1 = 0$, и равноудаленной от точек $M_1(3, 4, 6)$ и $M_2(1, 2, 4)$.

13. Определить, при каких значениях ℓ, m плоскость $5x + \ell y + 4z + m = 0$ проходит через прямую $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 7y + z - 3 = 0, \\ x - 9y - 2z + 5 = 0 \end{array} \right.$

14. Найти точку, симметричную $M(1, 2, -3)$ относительно данной прямой, заданной уравнениями $\frac{x+8}{5} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{2}$.

15. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-1, 3)$ и $C(6, 2)$. Составить уравнения его сторон.