ОЛДУ с постоянными коэффициентами. Определение

Опр. Уравнение

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$$

где a_1, a_2 – некоторые числа, называется ОЛДУ с постоянными коэффициентами.

Пример. ОЛДУ $y'' + \omega^2 y = 0$, $y'' - 3y' + 2y = 0$ являются ОЛДУ с пост. коэффициентами.

Теорема об общем решении ОЛДУ с постоянными коэффициентами

<u>Теорема.</u> Пусть для ОЛДУ с пост. коэфф.

$$\boxed{y'' + a_1 y' + a_2 y = 0}$$

λ_1, λ_2 – корни характер. уравнения

$$\boxed{\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0}$$

Тогда возможно три случая:

Теорема об общ. реш. ОЛДУ с пост. коэфф.

1) если λ_1, λ_2 – действительные и $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

то $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$ – ФСР и

$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ – общее решение

2) если λ_1, λ_2 – действительные и $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$,

то $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$ – ФСР и

$y_0 = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$ – общее решение

3) если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно-сопряженные

то $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ – ФСР

$y_0 = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ – общ. реш.

Задача 1 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 1

Задача 1: Найти общее решение ДУ

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Решение. Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ - характерист. уравнение

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ - действительные различные корни

$y_1 = e^x,\ y_2 = e^{2x}$ - ФСР

$\boxed{y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$ - общее решение

Задача 2 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 2

Задача 2: Найти общее решение ДУ

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Решение. Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ - характерист. уравнение

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ - действительные равные корни

$y_1 = e^x,\ y_2 = xe^x$ - ФСР

$\boxed{y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x}$ - общее решение

Задача 3 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

Задача 3: Найти общее решение ДУ

$$y'' + y' + y = 0$$

Решение. Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ - характерист. уравнение

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ - комплексно-сопряженные корни

Задача 3 на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

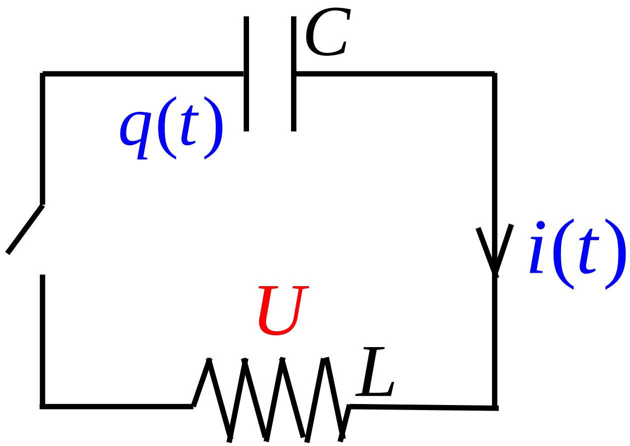
$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$ - ФСР

$$\boxed{y_0 = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x}$$

- общее решение

Задача 4 по физике на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3



Задача Коши:

$$\begin{cases} q'' + \omega^2 q = 0 \\ q(0) = q_0 \\ q'(0) = i(0) = 0 \end{cases} \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$\left.\begin{matrix} q(0) = q_0 \\ q'(0) = i(0) = 0 \end{matrix}\right\}$ **- НУ**

<u>Решение.</u> Это ОЛДУ с пост. коэфф.

$\lambda^2 + \omega^2 = 0$ - характерист. уравнение

Задача 4 по физике на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

$$D = 0 - 4 \cdot 1 \cdot \omega^2 = -4\omega^2 < 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4\omega^2}}{2} = \frac{\pm i\sqrt{4\omega^2}}{2} = \frac{\pm i \cdot 2\omega}{2} = \pm\omega i$$

- компл.-сопряж. корни $\Rightarrow$ $\alpha = 0,\ \beta = \omega \Rightarrow$

$q_1 = \cos\omega t,\ q_2 = \sin\omega t$ - ФСР

$\boxed{q_{общ} = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t}$ - общее решение

Задача 4 по физике на нахождение общего решения ОЛДУ с пост. коэфф. Случай 3

Подставим НУ в общее решение:

$$\left(q_{\text{общ}}\right)' = -\omega C_1 \sin \omega t + \omega C_2 \cos \omega t$$

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \\ q'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ 0 = -\omega C_1 \sin 0 + \omega C_2 \cos 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = q_0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{q_{\text{ч}} = q_0 \cos \omega t}$$

- частное решение