Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

На правах рукописи

Гусев Сергей Валентинович

РЕШЕТКА МНОГООБРАЗИЙ МОНОИДОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Б. М. Верников

Екатеринбург
2019

Оглавление

Введение

1. Актуальность темы и обзор результатов, предшествующих диссертации

Одним из основных направлений современной общей алгебры является изучение многообразий алгебр. Этому направлению посвящено большое количество монографий и обзорных статей. Не претендуя на полноту, отметим здесь, например, монографии [3, 10, 11, 16, 35]. При этом значительное внимание уделяется как исследованию многообразий универсальных алгебр, так и рассмотрению многообразий различных конкретных типов алгебр — групп, полугрупп, колец, решеток и др. Совокупность всех многообразий алгебр одного и того же типа образует решетку относительно включения. Исследование этой решетки относится к числу важнейших направлений изучения многообразий. Отметим, что исследование решеток многообразий естественно вписывается в более общий подход, связанный с рассмотрением производных решеток алгебраических объектов — таких, как решетки подалгебр, конгруэнций и т.п. (см., например, монографии [13, 52, 57] и обзор [44]).

В частности, с начала 60-х годов прошлого века активно изучается решетка многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через $\mathbb{SEM}$. Число работ, полностью или частично посвященных этой решетке, в настоящее время исчисляется несколькими сотнями. Результаты, полученные на начальном этапе изучения решетки $\mathbb{SEM}$, приведены в обзорах [1, 24]. Обзор более поздних исследований по многообразиям полугрупп дается в статьях [18–20, 64]. Можно отметить еще обзоры [36, 54]. В них рассматриваются многообразия (а в [54] — и другие классы) различных типов алгебр, среди которых полугруппы занимают видное место. Обзор [18] посвящен решеточному направлению в теории многообразий полугрупп и отражает его состояние, близкое к современному. Не так давно вышел еще один обзор [61], посвященный не всей решетке $\mathbb{SEM}$, а только ее специальным элементам.

На этом фоне резким контрастом выглядит крайне незначительное число работ, в которых изучается решетка всех многообразий моноидов, которую мы будем обозначать через $\mathbb{MON}$ (говоря о многообразиях моноидов, мы имеем в виду, что 0-арная операция, выделяющая единицу, входит в сигнатуру). По существу, можно назвать всего несколько работ, полностью или в существенной степени посвященных этой решетке. Прежде чем приступить к перечислению этих работ следует сказать, что, поскольку решетка $\mathbb{SEM}$ изучена достаточно хорошо по сравнению с $\mathbb{MON}$, в процессе изложения мы будем постоянно оглядываться на решетку $\mathbb{SEM}$, сравнивая моноидные результаты с их полугрупповыми аналогами. Мы увидим, что несмотря на близость двух алгебр — полугрупп и моноидов, а также тот легко проверяемый факт, что $\mathbb{MON}$ изоморфно вкладывается в $\mathbb{SEM}$ (см. предложение 1.1 ниже), уже с самых первых работ, посвященных решетке $\mathbb{MON}$, начинает прослеживаться существенная разница между свойствами этой решетки и решетки $\mathbb{SEM}$. В данной диссертации мы еще не раз убедимся в том, что одна и та же постановка задачи для решеток $\mathbb{SEM}$ и $\mathbb{MON}$ зачастую приводит к совершенно различным результатам. Чтобы сделать картину более полной, отметим, что встречаются и противоположные ситуации, когда свойства решеток $\mathbb{SEM}$ и $\mathbb{MON}$ оказываются аналогичными. Одна из причин таких аналогий указана в § 1 диссертации после предложения 1.1.

По-видимому, первой статьей о решетке $\mathbb{MON}$ является работа Т.Хида [30]. В ней дается полное описание решетки коммутативных многообразий моноидов. В частности, доказывается, что эта решетка является счетной и дистрибутивной. Для сравнения, заметим, что решетка многообразий коммутативных полугрупп также счетна (П.Перкинс [47]), но не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству (С.Баррис и Э.Нельсон [22]).

В работе Д.Поллака [49] изучается свойство покрываемости в решетках многообразий алгебр различных типов. В частности, в ней указан пример многообразия моноидов, не имеющего покрытий в решетке $\mathbb{MON}$. Этот факт контрастирует с доказанным А.Н.Трахтманом в [15] результатом о том, что всякое собственное многообразие полугрупп (т.е. многообразие, отличное от многообразия всех полугрупп) имеет покрытие в решетке $\mathbb{SEM}$.

Третьей работой, в существенной степени посвященной решетке $\mathbb{MON}$, является статья Ш.Висмат [66]. В ней дано полное описание решеток многообразий и псевдомногообразий идемпотентных моноидов. Отметим, что решетка многообразий идемпотентных полугрупп полностью описана намного раньше независимо А.П.Бирюковым [4], Ч.Фенмором [25] и Дж.Герхардом [26].

Статьи [30, 49, 66], по-видимому, исчерпывают список работ, полностью или в существенной степени посвященных решетке $\mathbb{MON}$, опубликованных до 2018 г. Для полноты картины отметим только еще статьи [59, 67], посвященные не решетке $\mathbb{MON}$, а решеткам многообразий моноидов с некоторыми дополнительными унарными операциями.

В последнее время ситуация начала постепенно меняться. В работах ряда авторов (в первую очередь, М.Джексона и Э.Ли), посвященных в основном изучению тождеств в моноидах, появляются и промежуточные результаты, относящиеся к решеткам многообразий (см., например, [31, 38–42, 68]). В основном они представляют собой описание решеток подмногообразий некоторых конкретных многообразий моноидов. В частности, в [38] построен первый, насколько нам известно, пример многообразия моноидов с немодулярной решеткой подмногообразий. А в недавней статье М.Джексона и Э.Ли [32] получен уже некоторый результат о решетке многообразий моноидов, представляющий несомненный самостоятельный интерес. А именно, в этой работе построены многообразия моноидов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ такие, что решетки их подмногообразий конечны, а решетка подмногообразий их объединения $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ континуальна и не удовлетворяет условию максимальности. Более того, из доказательств работы [32] легко вытекает, что последняя решетка не удовлетворяет и условию минимальности. Тем самым, показано, что в классе решеток подмногообразий многообразий моноидов конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты относительно объединения многообразий. Совсем недавно автором диссертации в [9] был анонсирован еще один пример многообразий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ с указанными выше свойствами. При этом в примере из [9], в отличие от примера из [32], многообразие $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ покрывает одно из многообразий $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Таким образом, в указанном выше классе решеток конечность решетки, условие максимальности и условие минимальности не замкнуты еще и относительно перехода к покрытиям. Этот результат автора не включен в диссертацию, так как он пока не опубликован. Интересно, что для многообразий полугрупп ответы на вопросы, аналогичные обсуждаемым сейчас, относительно конечности и условия минимальности отрицательны (М.В.Сапир [50]), а относительно условия максимальности неизвестны (соответствующий вопрос сформулирован в [18, вопрос 10.2]).

Подведем итоги. Решетке многообразий моноидов до последнего времени уделялось незаслуженно мало внимания. Результаты об этой решетке носили фрагментарный характер. Систематически решетка $\mathbb{MON}$ до настоящего времени не исследовалась, и данная диссертация является первой попыткой заполнить этот пробел.

2. Постановка задач и обсуждение результатов диссертации

При изучении решетки многообразий полугрупп большое внимание уделялось рассмотрению ограничений, формулирующихся в терминах тождеств (см. [18, §11]). Поэтому изучение решетки $\mathbb{MON}$ естественно начать с рассмотрения такого типа ограничений, что и является **целью** нашей работы.

Как мы уже упоминали выше, решетка $\mathbb{MON}$ не является модулярной. Однако до последнего времени не было известно, удовлетворяет ли эта решетка какому-либо нетривиальному тождеству. Первый из основных результатов данной диссертации дает отрицательный ответ на этот вопрос (см. теорему 2.1 и следствие 2.2 ниже).

Обсудим этот результат подробнее. Многообразие моноидов называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие всех коммутативных моноидов. Ясно, что совокупность всех надкоммутативных многообразий моноидов образует подрешетку в решетке всех многообразий моноидов, которую будем обозначать через $\mathbb{OC}$. Как и в случае полугрупп, решетка $\mathbb{MON}$ является дизъюнктным объединением решетки $\mathbb{OC}$ и решетки *периодических* многообразий (т.е. многообразий, состоящих из периодических моноидов). В данной диссертации доказано отсутствие нетривиальных тождеств в решетке $\mathbb{OC}$, откуда, в частности, следует отсутствие нетривиальных тождеств во всей решетке $\mathbb{MON}$. Отметим, что, как показала недавно И.А.Михайлова, решетка периодических многообразий моноидов также не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству (не опубликовано).

Для сравнения заметим, что отсутствие нетривиальных тождеств в решетке многообразий полугрупп было доказано еще в 1971 г. в двух работах С.Барриса и Э.Нельсон [22, 23]. Что касается решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, то в статье [63] М.В.Волковым было дано описание этой решетки в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального типа. В качестве следствия из указанного результата, в этой статье был доказан полугрупповой аналог нашего результата, а именно тот факт, что решетка всех надкоммутативных многообразий полугрупп не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Отсутствие нетривиальных тождеств в решетках надкоммутативных многообразий как в полугрупповом, так и в моноидном случаях — один из немногих примеров ситуаций, когда свойства решеток $\mathbb{SEM}$ и $\mathbb{MON}$ аналогичны.

После доказательства отсутствия нетривиальных тождеств в решетке $\mathbb{MON}$ естественно начать изучение многообразий моноидов с модулярной или дистрибутивной решеткой подмногообразий. Для решетки $\mathbb{SEM}$ аналогичные проблемы были сформулированы Т.Эвансом в 1971 г. [24] и Л.Н.Шевриным в 1979 г. [12, задача 2.60a] соответственно. Для решения первой из этих проблем потребовалось более двадцати лет усилий ряда математиков. Окончательно она была решена М.В.Волковым в начале 1990-х годов (см. [7], а также [18, раздел 11.1]). Параллельно с решением проблемы Эванса, М.В.Волков значительно продвинулся и в решении проблемы Шеврина и описал многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий в очень широком частном случае. В общем случае проблема Шеврина остается не решенной до сих пор (более подробные комментарии см. в [18, раздел 11.3]). Поскольку решетка $\mathbb{MON}$ пока изучена слабо, трудно рассчитывать на решение задачи описания многообразий моноидов с модулярной или дистрибутивной решеткой подмногообразий в ближайшее время. В качестве первого шага в этом направлении представляется естественным рассмотреть предельное усиление тождества дистрибутивности, а именно — свойство быть цепью. Многообразие, решетка подмногообразий которого является цепью, принято называть *цепным*. Для большинства классических типов алгебр задача описания цепных многообразий решена 35–40 и более лет назад. В частности, негрупповые цепные многообразия полугрупп описаны Е.В.Сухановым в 1982 г. [14] (см. рис. 3 на стр. 92), а локально конечные цепные многообразия групп — В.А.Артамоновым в 1978 г. [2]. Отметим, что задача описания произвольных цепных многообразий групп представляется трансцендентно сложной. Это вытекает из результатов П.А.Кожевникова [37], согласно которым существует континуум периодических не локально конечных многообразий групп, решетка подмногообразий которых является 3-элементной цепью.

Отдельные нетривиальные примеры цепных многообразий моноидов появлялись в некоторых работах в процессе доказательств основных результатов (см., в частности, [31, 38, 41]). Однако систематически цепные многообразия моноидов до последнего времени не изучались. В данной диссертации получено полное описание негрупповых цепных многообразий моноидов (см. теорему 3.1 и следствие 3.34 ниже).

Минимальные нецепные многообразия принято называть *почти цепными*. В [14, следствие 2] отмечается, что всякое негрупповое цепное многообразие полугрупп содержится в некотором максимальном цепном многообразии, а всякое негрупповое не цепное многообразие полугрупп содержит некоторое почти цепное подмногообразие. В случае моноидов ни одно из этих утверждений места не имеет (см. рис. 2 на стр. 91 и следствие 3.37 ниже).

В [14] негрупповые цепные многообразия полугрупп описаны двумя способами: на языке тождеств и на языке минимальных запрещенных подмногообразий. Второй способ описания состоит в указании полного списка негрупповых почти цепных многообразий полугрупп. Это действительно дает характеризацию цепных многообразий, поскольку, в силу упомянутого выше следствия 2 из [14], негрупповое многообразие полугрупп является цепным тогда и только тогда, когда оно не содержит ни одного почти цепного многообразия. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что в случае моноидов этот способ описания цепных многообразий невозможен. Поэтому почти цепные многообразия моноидов ниже не рассматриваются.

В данной диссертации мы рассматриваем еще несколько ограничений, связанных с тождествами дистрибутивности и модулярности. Речь идет о специальных элементах в решетке $\mathbb{MON}$. Напомним определения тех типов специальных элементов, которые будут возникать в данной работе. Элемент x решетки L называют

нейтральным, если	$\forall\, y, z \in L\colon$	$(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$ $= (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$
костандартным, если	$\forall\, y, z \in L\colon$	$(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z);$
кодистрибутивным, если	$\forall\, y, z \in L\colon$	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$
модулярным, если	$\forall\, y, z \in L\colon$	$y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$
верхнемодулярным, если	$\forall\, y, z \in L\colon$	$y \le x \longrightarrow x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z).$

Нижнемодулярные элементы определяются двойственно к верхнемодулярным. Хорошо известно, что элемент $x \in L$ нейтрален тогда и только тогда, когда для всех $y, z \in L$ подрешетка в L, порожденная x, y и z, дистрибутивна (см., например, [28, теорема 254]). Нейтральные элементы играют важную роль в общей теории решеток. В частности, элемент a является нейтральным элементом решетки L тогда и только тогда, когда L разложима в подпрямое произведение главного идеала и главного фильтра, порожденных элементом a (см, например, [28, теорема 254]). Таким образом, знание нейтральных элементов решетки позволяет судить о строении этой решетки в целом. Очевидно, что всякий нейтральный элемент нижнемодулярен и костандартен одновременно; всякий костандартный модулярен; всякий кодистрибутивный верхнемодулярен. Хорошо известно также, что всякий костандартный элемент кодистрибутивен (см., например, [28, теорема 253]). Некоторую информацию о специальных элементах в произвольных решетках можно найти в [28, раздел III.2] и [53, глава 1].

К настоящему времени получено много интересных и глубоких результатов о специальных элементах решетки $\mathbb{SEM}$ (см. обзоры [18, § 14] и [61], а также недавние работы [29, 55, 56, 58, 62]). В частности, нейтральные элементы решетки $\mathbb{SEM}$ были полностью описаны М.В.Волковым в [65, предложение 4.1], а Б.М.Верников в [6, теорема 1.3] доказал, что многообразие полугрупп является костандартным элементом решетки $\mathbb{SEM}$ тогда и только тогда, когда оно является нейтральным элементом этой решетки. Кодистрибутивные элементы решетки $\mathbb{SEM}$ изучались в работе [6], а верхнемодулярные — в работах [5, 60].

Специальные элементы решетки $\mathbb{MON}$ до настоящего времени не изучались. В диссертации полностью описаны нейтральные и костандартные элементы этой решетки (теоремы 4.1 и 4.2 ниже). При этом оказалось, что в отличие от решетки $\mathbb{SEM}$, в решетке $\mathbb{MON}$ свойства быть нейтральным и костандартным элементом не эквивалентны. Кроме того, нами получена существенная информация о кодистрибутивных и верхнемодулярных элементах этой решетки (предложения 4.3 и 4.4 ниже). Для того, чтобы охарактеризовать эти результаты, напомним, что, как и в полугрупповом случае, многообразие моноидов называют *вполне регулярным*, если оно состоит из *вполне регулярных* моноидов (объединений групп). Нами доказано, что любое собственное многообразие моноидов (т.е. многообразие, отличное от многообразия всех моноидов), являющееся верхнемодулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$, либо коммутативно, либо вполне регулярно (предложение 4.3). При этом оказалось, что всякое коммутативное многообразие моноидов является кодистрибутивным элементом решетки $\mathbb{MON}$ (предложение 4.4). Поскольку всякий кодистрибутивный элемент верхнемодулярен, предложения 4.3 и 4.4 полностью сводят изучение верхнемодулярных и кодистрибутивных элементов решетки $\mathbb{MON}$ к вполне регулярному случаю. В этом случае задачи полного описания кодистрибутивных и верхнемодулярных элементов решетки $\mathbb{MON}$ остаются до сих пор открытыми (как и аналогичные задачи для решетки $\mathbb{SEM}$), что объясняется некоторыми объективными трудностями. Хорошо известно, что решетка многообразий групп модулярна, но не дистрибутивна. Следовательно, она содержит 5-элементную модулярную, но не дистрибутивную подрешетку. Ясно, что попарно несравнимые элементы этой подрешетки не являются кодистрибутивными элементами решетки $\mathbb{MON}$. Мы видим, что задача описания кодистрибутивных элементов решетки $\mathbb{MON}$ тесно связана с задачей описания многообразий групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий. Упомянутый выше результат работы [37] о существовании континуума периодических многообразий групп с 3-элементной решеткой подмногообразий показывает, что последняя задача чрезвычайно трудна даже в периодическом случае. Следовательно, задача описания кодистрибутивных элементов решетки $\mathbb{MON}$ также является чрезвычайно трудной. То же можно сказать и о задаче описания верхнемодулярных элементов этой решетки, поскольку класс всех таких элементов включает в себя все ее кодистрибутивные элементы.

Подводя итог сказанному, сформулируем явно задачи, решению которых посвящена диссертация:

1) выяснить, удовлетворяет ли решетка многообразий моноидов какому-либо нетривиальному тождеству;
2) описать цепные негрупповые многообразия моноидов;
3) описать нейтральные элементы решетки многообразий моноидов;
4) описать костандартные элементы той же решетки.

3. Теоретическая и практическая значимость, научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий. Результаты, полученные в диссертации, значительно расширяют круг наших знаний о строении решетки многообразий моноидов. Для решения рассмотренных в диссертации задач потребовалось найти критерии выполнимости тождества (т.е. решить проблему равенства слов) в целом ряде конкретных многообразий моноидов. Для этого в диссертации разработан метод, основанный на целом ряде понятий, связанных с комбинаторикой слов (k-разложение слова, k-блоки и k-разделители слова, глубина буквы в слове и др.). Эти понятия введены и изучены в диссертации (рассмотрению их свойств посвящен раздел 1.2), Нам представляется, что потенциал этого подхода к изучению многообразий моноидов далеко не исчерпан задачами, рассмотренными в диссертации. Он может оказаться полезным как при рассмотрении других задач, связанных с решеткой многообразий моноидов, так и при изучении вопросов о конечной и бесконечной базируемости моноидов.

4. Методология и методы исследования. Степень достоверности

В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием научно-обоснованных методов с опорой на основополагающие теоретические положения в области математики, на фундаментальные работы по теории полугрупп, теории решеток и теории многообразий, использованием общеалгебраических и специальных методов исследований в области теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

5. Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся:

1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов, а значит, и в решетке всех моноидных многообразий; опубликовано в статье [69];
2) полное описание всех негрупповых цепных многообразий моноидов; опубликовано в статье [71];
3) полное описание нейтральных элементов решетки всех многообразий моноидов; опубликовано в статье [70];
4) полное описание костандартных элементов той же решетки; опубликовано в статье [70].

6. Апробация и публикации

Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015), Международной конференции «Группы и графы, метрики и многообразия» (Екатеринбург, 2017), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017), Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2018), 56-й летней школе по алгебре и упорядоченным множествам (Шпиндлерув Млын, Чехия, 2018). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2016–2019).

По теме диссертации опубликовано семь работ [69–75]. Из них три работы опубликованы в журналах из списка ВАК [69–71]. Одна работа написана совместно с Б.М.Верниковым [71]. В этой работе постановка задачи, указание на основные идеи и методы доказательства и усовершенствование первоначального варианта изложения принадлежат Б.М.Верникову, а само доказательство найдено диссертантом.

7. Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех параграфов, заключения и списка литературы. В § 1 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. В § 2 доказывается отсутствие нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов, § 3 посвящен цепным многообразиям моноидов, а в § 4 рассматриваются специальные элементы решетки многообразий моноидов.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. О многообразиях моноидов

Мы начнем со следующего фольклорного факта (в явном виде он отмечался, например, в [32, раздел 1.1]).

Предложение 1.1. *Отображение из* $\mathbb{MON}$ *в* $\mathbb{SEM}$*, сопоставляющее многообразию моноидов, порожденному моноидом* M*, многообразие полугрупп, порожденное этим моноидом, является вложением решетки* $\mathbb{MON}$ *в решетку* $\mathbb{SEM}$. □

Отметим, что из предложения 1.1 вытекает, что многие «позитивные» решеточные свойства, прежде всего — свойства наследуемые подрешетками, переносятся с «составных частей» решетки $\mathbb{SEM}$ на соответствующие части решетки $\mathbb{MON}$. Так, например, из дезарговости решетки вполне регулярных многообразий полугрупп, доказанной тремя различными способами Ф.Пастейном в [45, 46] и М.Петричем и Н.Райли в [48], вытекает дезарговость решетки вполне регулярных многообразий моноидов, а из финитной аппроксимируемости решетки надкоммутативных многообразий полугрупп, доказанной М.В.Волковым в [63], следует финитная аппроксимируемость решетки надкоммутативных многообразий моноидов.

Нам понадобится ряд обозначений и определений. Через F мы будем обозначать абсолютно свободную полугруппу счетного ранга над некоторым фиксированным алфавитом. Как обычно, элементы полугруппы F будем называть *словами*, а элементы алфавита — *буквами*. И слова, и буквы будут обозначаться маленькими латинскими буквами, но, в отличие от букв, слова, заведомо не являющиеся буквами или не обязанные ими быть, выделяются жирным шрифтом. Через F^1 будем обозначать полугруппу F с внешнеприсоединенной единицей. Эту единицу мы будем трактовать как пустое слово и обозначать символом λ. Как обычно, через $\mathrm{End}(F)$ и $\mathrm{End}(F^1)$ будут обозначаться моноиды эндоморфизмов полугруппы F и моноида F^1 соответственно. Две части тождества мы будем соединять знаком $\approx$, а обычным знаком равенства будет, среди прочего, обозначаться отношение равенства на моноиде F^1. Слово называется *полугрупповым*, если оно не содержит 1. Тождество принято называть *полугрупповым*, если обе его части являются полугрупповыми словами. Заметим, что любое тождество, записанное в сигнатуре умножения и 0-арной операции, выделяющей единицу, эквивалентно системе полугрупповых тождеств. Действительно, любое тождество вида $\mathbf{w} \approx 1$ можно заменить парой тождеств вида $\mathbf{w}y \approx y\mathbf{w} \approx y$, где y — произвольная буква, не входящая в запись слова $\mathbf{w}$. При этом слово $\mathbf{w}$ можно считать полугрупповым, поскольку всякий моноид удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \cdot 1 \cdot \mathbf{v} \approx \mathbf{uv}$ для любых слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что все тождества, с которыми мы имеем дело, являются полугрупповыми.

Следующее утверждение является специализацией для моноидов общеизвестного универсально-алгебраического факта.

Лемма 1.2. *Тождество* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *выполнено в многообразии моноидов, заданном системой тождеств* Σ*, тогда и только тогда, когда существует* *последовательность слов* $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n = \mathbf{v}$ *такая, что для любого* $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ *найдутся слова* $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \in F^1$, *эндоморфизм* $\xi_i \in \mathrm{End}(F^1)$ *и тождество* $\mathbf{u}_i \approx \mathbf{v}_i$ *из системы* Σ, *для которых либо* $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{u}_i)\mathbf{b}_i$, *а* $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{v}_i)\mathbf{b}_i$, *либо* $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{v}_i)\mathbf{b}_i$, *а* $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{u}_i)\mathbf{b}_i$. $\square$

Через $\mathrm{con}(\mathbf{w})$ обозначается *содержание* слова $\mathbf{w}$, т.е. множество всех букв, входящих в запись этого слова. Многообразие всех полурешеток, как обычно, будем обозначать через $\mathbf{SL}$. Следующее утверждение хорошо известно, но, насколько мы знаем, нигде не появлялось в такой форме. Для полноты изложения приведем здесь его доказательство.

Лемма 1.3. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathbf{V}$ *является многообразием групп;*

б) $\mathbf{V}$ *удовлетворяет тождеству* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, *для которого* $\mathrm{con}(\mathbf{u}) \ne \mathrm{con}(\mathbf{v})$*;*

в) $\mathbf{SL} \nsubseteq \mathbf{V}$.

Доказательство. Импликация а) $\longrightarrow$ б) очевидна.

Импликация в) $\longrightarrow$ б) вытекает из того очевидного факта, что многообразие $\mathbf{SL}$ удовлетворяет любому тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, для которого $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v})$.

б) $\longrightarrow$ а) Согласно условию, существует буква x, входящая только в одно из слов $\mathbf{u}$ или $\mathbf{v}$. Пусть y — буква, не входящая в $\mathrm{con}(\mathbf{uv})$. Ясно, что тождества $\mathbf{u}y \approx \mathbf{v}y$ и $y\mathbf{u} \approx y\mathbf{v}$ выполняются в $\mathbf{V}$. Подставим 1 вместо всех букв, входящих в эти тождества, кроме x и y. Мы получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам $x^n y \approx y$ и $yx^n \approx y$ для некоторого n. Это означает, что $\mathbf{V}$ является многообразием групп. $\square$

Многообразие абелевых групп экспоненты n обозначается через $\mathbf{A}_n$.

Лемма 1.4 ([30]). *Если* $\mathbf{V}$ *— периодическое коммутативное многообразие моноидов, то* $\mathbf{V} = \mathbf{A}_n \vee \mathbf{Q}$, *где* n *— некоторое натуральное число, а* $\mathbf{Q}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *или* $\mathbf{C}_m$ *для некоторого* $m \ge 2$. $\square$

Многообразие моноидов называется *комбинаторным*, если все его группы одноэлементны. Из предложения 1.1 и леммы 2.6 работы [60] вытекает

Лемма 1.5. *Если* $\mathbf{V}$ *— комбинаторное многообразие моноидов, а* $\mathbf{G}$ *— многообразие периодических групп, то* $\mathbf{G}$ *является наибольшим групповым подмногообразием многообразия* $\mathbf{G} \vee \mathbf{V}$. $\square$

Буква называется *простой* [*кратной*] *в слове* $\mathbf{w}$, если она входит в $\mathbf{w}$ один [не менее двух] раз. Множество всех простых [кратных] букв слова $\mathbf{w}$ обозначается через $\mathrm{sim}(\mathbf{w})$ [соответственно $\mathrm{mul}(\mathbf{w})$]. Следующее утверждение хорошо известно и легко проверяется.

Предложение 1.6. *Нетривиальное тождество* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *выполнено в многообразии* $\mathbf{C}_2$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \mathrm{sim}(\mathbf{v}) \text{ и } \mathrm{mul}(\mathbf{u}) = \mathrm{mul}(\mathbf{v}). \tag{1.1}$$

Следующая конструкция впервые появилась в статье [47] и многократно возникала в работах по теории многообразий полугрупп (см., например, [31–33, 38, 41]; в [32, замечание 2.4] указан целый ряд других ссылок). Пусть W — множество слов. Через $S(W)$ обозначим фактор-моноид Риса свободного моноида F^1 по идеалу всех слов, не являющихся подсловами слов из W. Если $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$, то полугруппу $S\bigl(\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}\bigr)$ будем обозначать через $S\bigl(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\bigr)$.

Слово $\mathbf{w}$ называется *изотермом* для данного класса полугрупп, если из того, что все полугруппы из этого класса удовлетворяют тождеству $\mathbf{w} \approx \mathbf{w}'$, следует, что $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. Следующее утверждение играет важную роль в дальнейших рассуждениях.

Лемма 1.7. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— многообразие моноидов, а* W *— множество слов. Моноид* $S(W)$ *принадлежит* $\mathbf{V}$ *тогда и только тогда, когда каждое слово из* W *является изотермом для* $\mathbf{V}$.

Доказательство. Простые соображения (см. абзац после леммы 3.3 в работе [31]) показывают, что достаточно рассмотреть случай, когда множество W состоит из одного слова. В этом случае необходимость очевидна, а достаточность доказана в [33, лемма 5.3]. □

Через $\mathrm{var}\,\Sigma$ обозначается многообразие моноидов, заданное системой тождеств Σ, а через $\mathrm{var}\,M$ — многообразие, порожденное моноидом M. Для всякого $n \geq 2$ положим

$$\mathbf{C}_n = \mathrm{var}\{x^n \approx x^{n+1},\, xy \approx yx\}.$$

Лемма 1.8 ([21, следствие 6.1.5])**.** *Для любого натурального* n *выполнено равенство* $\mathbf{C}_{n+1} = \mathrm{var}\,S(x^n)$. □

Лемма 1.9. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— многообразие моноидов, а* n *— натуральное число. Если* $\mathbf{C}_{n+1} \nsubseteq \mathbf{V}$*, то* $\mathbf{V}$ *удовлетворяет тождеству* $x^n \approx x^{n+m}$ *для некоторого натурального* m.

Доказательство. Мы можем считать, что $\mathbf{V}$ не является многообразием групп, поскольку в противном случае заключение леммы очевидно. В силу лемм 1.7 и 1.8, в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено нетривиальное тождество вида $x^n \approx \mathbf{w}$. Тогда, по лемме 1.3, $\mathrm{con}(\mathbf{w}) = \{x\}$, откуда следует, что $\mathbf{w} = x^k$ для некоторого $k \neq n$. Очевидно, что при любом k тождество $x^n \approx x^k$ влечет тождество $x^n \approx x^{n+m}$ для некоторого m. Таким образом, многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $x^n \approx x^{n+m}$. □

Хорошо известно, что многообразие вполне регулярно тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству $x \approx x^{m+1}$ для некоторого m. Из этого наблюдения, леммы 1.9 и того очевидного факта, что многообразие $\mathbf{C}_2$ не является вполне регулярным, вытекает

Следствие 1.10. *Многообразие моноидов* $\mathbf{V}$ *является вполне регулярным тогда и только тогда, когда* $\mathbf{C}_2 \nsubseteq \mathbf{V}$. $\square$

Введем обозначения для следующих трех конкретных тождеств:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &: \ xyzxty \approx yxzxty,\\ \sigma_2 &: \ xtyzxy \approx xtyzyx,\\ \gamma_1 &: \ y_1y_0x_1y_1x_0x_1 \approx y_1y_0y_1x_1x_0x_1.\end{aligned}$$

Заметим, что тождества σ_1 и σ_2 являются двойственными друг другу, а тождество γ_1 принадлежит счетной серии тождеств γ_k которая будет определена в подразделе 3.4.1. С «содержательной точки зрения» тождества σ_1, σ_2 и γ_1 позволяют переставлять местами две смежных буквы в слове при выполнении некоторого дополнительного условия. Для тождества σ_1 [соответственно σ_2] это условие состоит в том, что переставляются не первые [не последние] вхождения букв в данном слове, а для тождества γ_1 — в том, что для одной из букв переставляемое вхождение является не первым, а для другой — не последним. Для любого натурального k положим

$$\mathbf{D}_k = \operatorname{var}\{x^2 \approx x^3,\, x^2y \approx yx^2,\, \sigma_1,\, \sigma_2,\, \gamma_1,\, x^2y_1y_2\cdots y_k \approx xy_1xy_2x\cdots xy_kx\}.$$

Из доказательства предложения 4.1 работы [41] вытекает

Лемма 1.11. $\mathbf{D}_1 = \operatorname{var} S(xy)$ *и* $\mathbf{D}_{n+1} = \operatorname{var} S(xy_1xy_2x\cdots xy_nx)$ *для любого натурального* n. $\square$

Тривиальное многообразие моноидов обозначим через $\mathbf{T}$. Положим

$$\mathbf{D} = \operatorname{var}\{x^2 \approx x^3,\, x^2y \approx yx^2,\, \sigma_1,\, \sigma_2,\, \gamma_1\}.$$

Как обычно, через $L(\mathbf{X})$ обозначается решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{X}$. Из предложения 4.1 работы [41] и его доказательства легко вытекает

Лемма 1.12. *Решетка* $L(\mathbf{D})$ *является цепью* $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \cdots \subset \mathbf{D}_k \subset \cdots \subset \mathbf{D}$. $\square$

Положим

$$\mathbf{LRB} = \operatorname{var}\{xy \approx xyx\} \text{ и } \mathbf{RRB} = \operatorname{var}\{yx \approx xyx\}.$$

Следующее утверждение вытекает из [66, предложение 4.7].

Лемма 1.13. (i) *Всякое многообразие идемпотентных моноидов либо содержит многообразие* $\mathbf{LRB} \vee \mathbf{RRB}$, *либо содержится в этом многообразии.*

(ii) *Решетка* $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{RRB})$ *имеет вид, изображенный на рис.* 1a). $\square$

Положим

$$\mathbf{E} = \operatorname{var}\{x^2 \approx x^3,\, x^2y \approx xyx,\, x^2y^2 \approx y^2x^2\}.$$

Следующая лемма доказана в [38, предложение 4.1(i) и лемма 3.3(iv)].

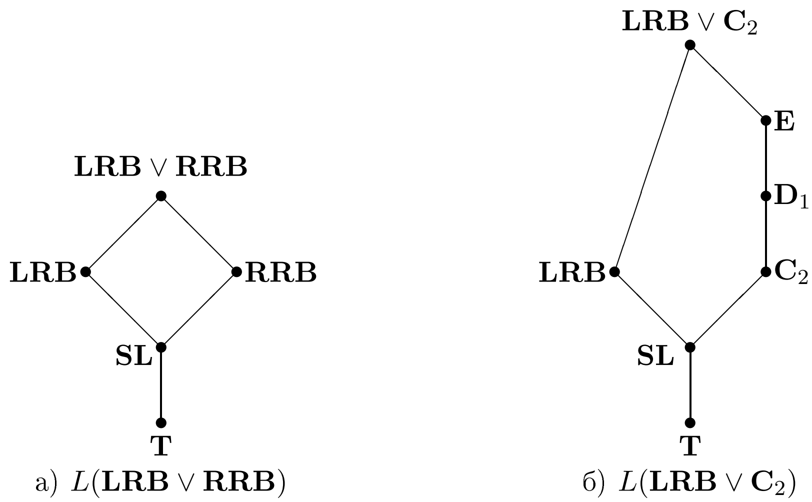

Рис. 1: решетки $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{RRB})$ и $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2)$

Лемма 1.14. (i) $\mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2 = \mathrm{var}\{x^2 \approx x^3,\ x^2y \approx xyx\}$.

(ii) *Решетка* $L(\mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2)$ *имеет вид, изображенный на рис.* 1б). □

Если $\mathbf{w} \in F$ и $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w})$, то через $\mathrm{occ}_x(\mathbf{w})$ обозначим число вхождений буквы x в слово $\mathbf{w}$. Если $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w})$ и $i \le \mathrm{occ}_x(\mathbf{w})$, то через $\ell_i(\mathbf{w}, x)$ будем обозначать длину минимального префикса $\mathbf{p}$ слова $\mathbf{w}$ такого, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{p}) = i$. Приведем пример, иллюстрирующий эти обозначения.

Пример 1.15. Пусть $\mathbf{w} = xyx^2zy$. Тогда $\mathrm{occ}_x(\mathbf{w}) = 3$, $\mathrm{occ}_y(\mathbf{w}) = 2$ и $\mathrm{occ}_z(\mathbf{w}) = 1$. Кроме того, очевидно, что кратчайшими префиксами $\mathbf{p}$ слова $\mathbf{w}$, для которых $\mathrm{occ}_x(\mathbf{p}) = 1$, $\mathrm{occ}_x(\mathbf{p}) = 2$ и $\mathrm{occ}_x(\mathbf{p}) = 3$, являются слова x, xyx и xyx^2 соответственно. Следовательно, $\ell_1(\mathbf{w}, x) = 1$, $\ell_2(\mathbf{w}, x) = 3$ и $\ell_3(\mathbf{w}, x) = 4$. Аналогичным образом можно показать, что $\ell_1(\mathbf{w}, y) = 2$, $\ell_2(\mathbf{w}, y) = 6$ и $\ell_1(\mathbf{w}, z) = 5$.

Мы часто будем иметь дело с неравенствами вида $\ell_i(\mathbf{w}, x) < \ell_j(\mathbf{w}, y)$. Ясно, что это неравенство на самом деле означает, что i-е вхождение x в $\mathbf{w}$ предшествует j-му вхождению y в $\mathbf{w}$.

Если $\mathbf{w}$ — слово, а X — множество букв, то через $\mathbf{w}_X$ обозначается слово, полученное из $\mathbf{w}$ вычеркиванием всех букв, содержащихся в X. Договоримся писать $\mathbf{w}_x$ вместо $\mathbf{w}_{\{x\}}$.

Лемма 1.16. *Если некоммутативное многообразие моноидов* $\mathbf{V}$ *удовлетворяет тождеству* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, *для которого выполнено условие* (1.1), *то*

$$\mathbf{u}_{\mathrm{mul}(\mathbf{u})} = \mathbf{v}_{\mathrm{mul}(\mathbf{u})}. \tag{1.2}$$

Доказательство. Из условия (1.1) следует, что $\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \mathrm{sim}(\mathbf{v})$ и $\mathrm{mul}(\mathbf{u}) = \mathrm{mul}(\mathbf{v})$. Очевидно, что условие (1.2) выполняется в случае, когда $\mathrm{sim}(\mathbf{u})$ содержит менее двух букв. Предположим, что $\mathrm{sim}(\mathbf{u})$ содержит по крайней мере две различные буквы, а условие (1.2) не выполняется. Тогда существуют такие буквы $x, y \in \mathrm{sim}(\mathbf{u})$, что $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, y)$ и $\ell_1(\mathbf{v}, x) > \ell_1(\mathbf{v}, y)$.

Подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, кроме x и y. Мы получим тождество $xy \approx yx$, что противоречит некоммутативности многообразия $\mathbf{V}$. $\square$

Предложение 1.17. *Нетривиальное тождество* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *выполнено в многообразии* $\mathbf{D}_1$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.1) *и* (1.2).

Доказательство. Необходимость. Из включения $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{D}_1$ и предложения 1.6 следует, что тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ удовлетворяет условию (1.1). Поскольку многообразие $\mathbf{D}_1$ является некоммутативным, из леммы 1.16 вытекает, что выполняется условие (1.2).

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (1.1) и (1.2). Пусть $\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 y_1 \mathbf{u}_1 y_2 \mathbf{u}_2 \cdots y_m \mathbf{u}_m,$$

где $\mathrm{con}(\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m) = \mathrm{mul}(\mathbf{u})$. Тогда из условия (1.1) следует, что $\mathrm{sim}(\mathbf{v}) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Далее, согласно условию (1.2), $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 y_1 \mathbf{v}_1 y_2 \mathbf{v}_2 \cdots y_m \mathbf{v}_m$. Снова воспользуемся условием (1.1) и получим равенство $\mathrm{con}(\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_m) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_0\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_m)$. Теперь нетрудно заметить, что из системы тождеств

$$\{x^2 \approx x^3, x^2y \approx xyx \approx yx^2\}$$

следуют тождества

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 y_1 \mathbf{u}_1 y_2 \mathbf{u}_2 \cdots y_m \mathbf{u}_m \approx \mathbf{v}_0 y_1 \mathbf{v}_1 y_2 \mathbf{v}_2 \cdots y_m \mathbf{v}_m = \mathbf{v},$$

откуда вытекает, что $\mathbf{D}_1$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. $\square$

Лемма 1.18. *Если многообразие моноидов* $\mathbf{V}$ *не вполне регулярно и не коммутативно, то* $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$.

Доказательство. Возьмем произвольное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в многообразии $\mathbf{V}$. Из следствия 1.10 вытекает, что $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{V}$, откуда следует, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполняется в $\mathbf{C}_2$. Тогда, согласно предложению 1.6, выполняется условие (1.1). Условие (1.2) вытекает из леммы 1.16 и некоммутативности многообразия $\mathbf{V}$. Нам остается применить предложение 1.17 и заключить, что тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполняется в многообразии $\mathbf{D}_1$. $\square$

Лемма 1.19. *Если* $\mathbf{X}$ — *многообразие моноидов и* $\mathbf{D}_{n+1} \nsubseteq \mathbf{X}$ *для некоторого* n, *то* $\mathbf{X}$ *удовлетворяет тождеству вида*

$$xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx x^{k_1}y_1x^{k_2}y_2x^{k_2} \cdots x^{k_n}y_nx^{k_{n+1}}, \tag{1.3}$$

где $k_i > 1$ *для некоторого* i.

Доказательство. Если многообразие $\mathbf{X}$ коммутативно, то оно удовлетворяет тождеству

$$xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx x^{n+1}y_1y_2 \cdots y_n.$$

Если $\mathbf{X}$ является вполне регулярным, то оно удовлетворяет тождеству $x \approx x^m$ для некоторого $m > 1$. Ясно, что тогда в $\mathbf{X}$ выполнено тождество

$$xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx x^m y_1xy_2x \cdots xy_nx.$$

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда $\mathbf{X}$ не вполне регулярно и не коммутативно. Тогда из леммы 1.18 следует, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$. В силу лемм 1.7 и 1.11, $\mathbf{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx \mathbf{w}$. Применим теперь предложение 1.17 и получим, что

$$\mathbf{w} = x^{k_1}y_1x^{k_2}y_2x^{k_2} \cdots y_nx^{k_{n+1}}.$$

Если $k_i > 1$ для некоторого i, то доказывать нечего. Предположим, что $k_i \le 1$ для всех i. Поскольку тождество $xy_1xy_2x \cdots xy_nx \approx \mathbf{w}$ нетривиально, найдется такое $1 \le i \le n+1$, что $k_i = 0$. Подставим xy_i вместо y_i в это тождество для всех i, для которых $k_i = 0$. Если $k_{n+1} = 0$, то умножим полученное тождество справа на x. В результате, мы получим тождество вида (1.3), где $k_i > 1$ для некоторого i. □

1.2. k-разложение слова и связанные с ним понятия

В этом разделе мы введем ряд понятий, связанных со словами, и изучим их свойства. Доказанные здесь результаты будут играть ключевую роль в наиболее сложной части доказательства теоремы 3.1 — разделе 3.4.

Если $\mathbf{w}$ — слово, а $x_1, x_2, \ldots, x_k$ — буквы из $\mathrm{con}(\mathbf{w})$, то обозначим через $\mathbf{w}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ слово, получающееся из $\mathbf{w}$ удалением всех букв, кроме $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Пусть $\mathbf{w}$ — слово и $\mathrm{sim}(\mathbf{w}) = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\mathbf{w}(t_1, t_2, \ldots, t_m) = t_1t_2 \cdots t_m$. Тогда

$$\mathbf{w} = t_0\mathbf{w}_0t_1\mathbf{w}_1 \cdots t_m\mathbf{w}_m, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ — некоторые (возможно пустые) слова, а $t_0 = \lambda$. Слова $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{w}_1$, $\ldots$, $\mathbf{w}_m$ назовем 0-*блоками* слова $\mathbf{w}$, а $t_0, t_1, \ldots, t_m$ — 0-*разделителями* этого слова. Представление слова $\mathbf{w}$ в виде произведения чередующихся 0-разделителей и 0-блоков, начиная с 0-разделителя t_0 и заканчивая 0-блоком $\mathbf{w}_m$, будем называть 0-*разложением* слова $\mathbf{w}$.

Пусть k — натуральное число. Определим k-разложение слова $\mathbf{w}$ индукцией по k. Пусть (1.4) является $(k-1)$-разложением слова $\mathbf{w}$ с $(k-1)$-блоками $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ и $(k-1)$-разделителями $t_0, t_1, \ldots, t_m$. Для каждого $i = 0, 1, \ldots, m$ обозначим через $s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ir_i}$ все простые буквы $(k-1)$-блока $\mathbf{w}_i$, не входящие в запись слова $\mathbf{w}_0t_1\mathbf{w}_1 \cdots t_{i-1}\mathbf{w}_{i-1}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\mathbf{w}_i(s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{ir_i}) = s_{i1}s_{i2} \cdots s_{ir_i}$. Тогда

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_{i0}s_{i1}\mathbf{v}_{i1}s_{i2}\mathbf{v}_{i2} \cdots s_{ir_i}\mathbf{v}_{ir_i} \tag{1.5}$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}_{i0}, \mathbf{v}_{i1}, \ldots, \mathbf{v}_{ir_i}$. Положим $s_{i0} = t_i$. Слова $\mathbf{v}_{i0}, \mathbf{v}_{i1}, \ldots, \mathbf{v}_{ir_i}$ назовем k-*блоками* слова $\mathbf{w}$, а буквы $s_{i0}, s_{i1}, \ldots, s_{ir_i}$ — k-*разделителями* этого слова.

Замечание 1.20. Заметим, что только первое вхождение буквы в слово может быть k-разделителем этого слова. Поэтому мы будем использовать ниже выражения вида «буква x является (или не является) k-разделителем слова $\mathbf{w}$», имея в виду, что первое вхождение буквы x в $\mathbf{w}$ обладает указанным свойством.

Для каждого $i = 0, 1, \ldots, m$ представим $(k-1)$-блок $\mathbf{w}_i$ в виде (1.5). В результате мы получим представление слова $\mathbf{w}$ в виде произведения чередующихся k-разделителей и k-блоков, начиная с k-разделителя $s_{00} = t_0$ и заканчивая k-блоком $\mathbf{v}_{mr_m}$. Такое представление назовем *k-разложением* слова $\mathbf{w}$.

Замечание 1.21. Поскольку длина слова $\mathbf{w}$ конечна, существует такое число k, что k-разложение слова $\mathbf{w}$ совпадает с n-разложением этого слова для всех $n > k$.

Для удобства читателя проиллюстрируем введенные только что понятия следующим примером.

Пример 1.22. Положим $\mathbf{w} = xyxzytszxs$. Единственной простой буквой в слове $\mathbf{w}$ является буква t. Следовательно, 0-разложение слова $\mathbf{w}$ имеет вид

$$\lambda \cdot \underline{xyxzy} \cdot t \cdot \underline{szxs} \tag{1.6}$$

(в примере 1.22 мы будем подчеркивать блоки, чтобы отличать их от разделителей). Буква z является единственной простой буквой 0-блока $xyxzy$; 0-блок $szxs$ содержит две простые буквы, а именно z и x, но обе эти буквы встречаются в слове $\mathbf{w}$ слева от этого блока. Следовательно, 1-разложение слова $\mathbf{w}$ имеет вид

$$\lambda \cdot \underline{xyx} \cdot z \cdot \underline{y} \cdot t \cdot \underline{szxs}.$$

Аналогичным образом можно показать, что 2-разложение слова $\mathbf{w}$ имеет вид

$$\lambda \cdot \underline{x} \cdot y \cdot \underline{x} \cdot z \cdot \underline{y} \cdot t \cdot \underline{szxs},$$

а k-разложение $\mathbf{w}$ при $k \geq 3$ — вид

$$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot x \cdot \underline{\lambda} \cdot y \cdot \underline{x} \cdot z \cdot \underline{y} \cdot t \cdot \underline{szxs}.$$

Для данного слова $\mathbf{w}$, буквы $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w})$, натурального числа $i \leq \mathrm{occ}_x(\mathbf{w})$ и $k \geq 0$, назовем *(i,k)-ограничителем* буквы x в слове $\mathbf{w}$ и обозначим через $h_i^k(\mathbf{w}, x)$ самый правый k-разделитель слова $\mathbf{w}$, предшествующий i-му вхождению x в $\mathbf{w}$. Это понятие иллюстрируется следующим примером.

Пример 1.23. Пусть $\mathbf{w}$ — то же слово, что и в примере 1.22. Напомним, что 0-разложение слова $\mathbf{w}$ имеет вид (1.6). Мы видим, что самым правым 0-разделителем слова $\mathbf{w}$, предшествующим первым двум вхождениям x, обоим вхождениям y и первым вхождениям z и t, является пустое слово λ. Самым правым 0-разделителем слова $\mathbf{w}$, предшествующим третьему вхождению x, второму вхождению z и обоим вхождениям s, является t. Это означает, что $h_1^0(\mathbf{w}, x) = h_2^0(\mathbf{w}, x) = \lambda$, $h_3^0(\mathbf{w}, x) = t$, $h_1^0(\mathbf{w}, y) = h_2^0(\mathbf{w}, y) = \lambda$, $h_1^0(\mathbf{w}, z) = \lambda$, $h_2^0(\mathbf{w}, z) = t$, $h_1^0(\mathbf{w}, s) = h_2^0(\mathbf{w}, s) = t$ и $h_1^0(\mathbf{w}, t) = \lambda$. Аналогичным образом, основываясь на примере 1.22, легко вычислить все остальные ограничители букв в слове $\mathbf{w}$. Все они приведены в табл. 1.

Таблица 1: ограничители букв слова $xyxzytszxs$

a	k	i	$h_i^k(\mathbf{w},a)$	a	k	i	$h_i^k(\mathbf{w},a)$
x	0	1	λ	z	0	1	λ
		2	λ			2	t
		3	t		1	1	λ
	1	1	λ			2	t
		2	λ		2	1	y
		3	t			2	t
	2	1	λ		≥ 3	1	y
		2	y			2	t
		3	t	s	0	1	t
	≥ 3	1	λ			2	t
		2	y		1	1	t
		3	t			2	t
y	0	1	λ		2	1	t
		2	λ			2	t
	1	1	λ		≥ 3	1	t
		2	z			2	t
	2	1	λ	t	0	1	λ
		2	z		1	1	z
	≥ 3	1	x		2	1	z
		2	z		≥ 3	1	z

Лемма 1.24. *Пусть* $\mathbf{w}$ *— слово,* t *— буква, а* k *и* r *— такие числа, что* $r < k$.

(i) *Если* t *является* r*-разделителем слова* $\mathbf{w}$*, то* t *является также* k*-разделителем этого слова.*

(ii) *Если* $h_1^k(\mathbf{w},x) = h_2^k(\mathbf{w},x)$*, то* $h_1^r(\mathbf{w},x) = h_2^r(\mathbf{w},x)$.

(iii) *Если* $t_0\mathbf{w}_0t_1\mathbf{w}_1\cdots t_m\mathbf{w}_m$ *—* k*-разложение слова* $\mathbf{w}$ *и* $m > 0$*, то* $t_m \in \mathrm{sim}(\mathbf{w})$.

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) очевидны. Проверим утверждение (iii). Предположим, что $t_m \in \mathrm{mul}(\mathbf{w})$. Тогда t_m не является 0-разделителем слова $\mathbf{w}$. Пусть p — наименьшее натуральное число, для которого t_m является p-разделителем слова $\mathbf{w}$. Очевидно, что $p \leq k$.

Предположим, что $h_1^{p-1}(\mathbf{w},t_m) = h_2^{p-1}(\mathbf{w},t_m)$. Это означает, что в слове $\mathbf{w}$ не существует $(p-1)$-разделителей между первым и вторым вхождениями t_m в $\mathbf{w}$. Иными словами, первое и второе вхождения буквы t_m в слово $\mathbf{w}$ лежат в одном и том же $(p-1)$-блоке этого слова. Следовательно, буква t_m не является простой в этом $(p-1)$-блоке. В частности, она не может быть p-разделителем слова $\mathbf{w}$, что противоречит выбору t_m. Таким образом, $h_1^{p-1}(\mathbf{w},t_m) \neq h_2^{p-1}(\mathbf{w},t_m)$. Отметим, что рассуждения данного абзаца очень типичны. Мы много раз будем использовать аналогичные рассуждения, не расписывая их так подробно.

Заметим, что $t_m \neq h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$, так как буква t_m не является $(p-1)$-разделителем слова $\mathbf{w}$. Положим $t_{m+1} = h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$. Поскольку $p - 1 < k$, из утверждения (i) следует, что t_{m+1} является k-разделителем слова $\mathbf{w}$. Последним k-разделителем этого слова является буква t_m. Следовательно, первое вхождение t_{m+1} в слово $\mathbf{w}$ предшествует первому вхождению t_m в это слово. Но тогда $h_1^{p-1}(\mathbf{w}, t_m) = t_{m+1} = h_2^{p-1}(\mathbf{w}, t_m)$, что противоречит доказанному в предыдущем абзаце. $\square$

Для данного слова $\mathbf{w}$ и буквы $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w})$ определим некоторое число, которое назовем *глубиной* буквы x в слове $\mathbf{w}$, и обозначим его через $D(\mathbf{w}, x)$. Если $x \in \mathrm{sim}(\mathbf{w})$, то положим $D(\mathbf{w}, x) = 0$. Предположим, что $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{w})$. Если найдется такое натуральное k, что первое и второе вхождения x в $\mathbf{w}$ лежат в различных $(k-1)$-блоках слова $\mathbf{w}$, то глубину буквы x в слове $\mathbf{w}$ положим равной наименьшему числу с таким свойством. Если же для любого k первое и второе вхождения x в $\mathbf{w}$ лежат в одном и том же k-блоке слова $\mathbf{w}$, то положим $D(\mathbf{w}, x) = \infty$. Иными словами, $D(\mathbf{w}, x) = k$ тогда и только тогда, когда $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ и k — наименьшее число с таким свойством, а $D(\mathbf{w}, x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$ для любого k. Определение глубины буквы в слове проиллюстрируем следующим примером.

Пример 1.25. Пусть $\mathbf{w}$ — то же слово, что в примерах 1.22 и 1.23, т.е. $\mathbf{w} = xyxzytszxs$. Используя информацию об ограничителях букв в слове $\mathbf{w}$ из табл. 1, вычислим глубину всех букв в этом слове. Поскольку $h_1^k(\mathbf{w}, x) = \lambda$ для всех k, а $h_2^0(\mathbf{w}, x) = h_2^1(\mathbf{w}, x) = \lambda$ и $h_2^2(\mathbf{w}, x) = y$, мы имеем, что $D(\mathbf{w}, x) = 3$. Далее, $h_1^0(\mathbf{w}, y) = h_2^0(\mathbf{w}, y) = \lambda$, $h_1^1(\mathbf{w}, y) = \lambda$ и $h_2^1(\mathbf{w}, y) = z$. Следовательно, $D(\mathbf{w}, y) = 2$. Из равенств $h_1^0(\mathbf{w}, z) = \lambda$ и $h_2^0(\mathbf{w}, z) = t$ вытекает, что $D(\mathbf{w}, z) = 1$. Далее, поскольку $h_1^k(\mathbf{w}, s) = h_2^k(\mathbf{w}, s) = t$ для всех $k \geq 0$, мы имеем, что $D(\mathbf{w}, s) = \infty$. Наконец, $D(\mathbf{w}, t) = 0$, так как $t \in \mathrm{sim}(\mathbf{w})$.

Следующее утверждение мы часто будем использовать в дальнейших рассуждениях.

Лемма 1.26. *Буква t является k-разделителем слова $\mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда $D(\mathbf{w}, t) \leq k$.*

Доказательство. Если $k = 0$, то утверждение очевидно, поскольку свойство буквы t быть 0-разделителем слова $\mathbf{w}$ и равенство $D(\mathbf{w}, t) = 0$ эквивалентны свойству буквы t быть простой в слове $\mathbf{w}$. Далее, если $k > 0$, то t является k-разделителем слова $\mathbf{w}$ тогда и только тогда, когда первое и второе вхождения t в $\mathbf{w}$ лежат в различных $(k-1)$-блоках слова $\mathbf{w}$. В свою очередь, последнее утверждение эквивалентно неравенству $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, t) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{w}, t)$, т.е. утверждению, что $D(\mathbf{w}, t) \leq k$. $\square$

Слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ назовем *k-эквивалентными*, если они имеют одинаковые наборы k-разделителей, и эти k-разделители появляются в $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ в одинаковом порядке.

Лемма 1.27. *Пусть k — целое неотрицательное число. Слова* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *являются k-эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнено условие* (1.1) *и для любого $x \in \mathrm{con}(\mathbf{uv})$ такого, что либо $D(\mathbf{u}, x) \leq k$, либо $D(\mathbf{v}, x) \leq k$, выполняется равенство $h_1^k(\mathbf{u}, x) = h_1^k(\mathbf{v}, x)$.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что

$$t_0\mathbf{u}_0 t_1\mathbf{u}_1 \cdots t_m\mathbf{u}_m \tag{1.7}$$

и $s_0\mathbf{v}_0 s_1\mathbf{v}_1 \cdots s_r\mathbf{v}_r$ являются k-разложениями слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ соответственно. Ясно, что $t_0 = s_0 = \lambda$. Если $m = r = 0$, то требуемый факт очевиден. Пусть теперь $m > 0$. По лемме 1.26, $D(\mathbf{u}, t_i) \leq k$ для любого $1 \leq i \leq m$. Тогда $t_{i-1} = h_1^k(\mathbf{u}, t_i) = h_1^k(\mathbf{v}, t_i)$ для любого $1 \leq i \leq m$, откуда следует, что t_{i-1} является k-разделителем слова $\mathbf{v}$. Согласно лемме 1.24(iii), $t_m \in \mathrm{sim}(\mathbf{u})$. Тогда из условия (1.1) следует, что $t_m \in \mathrm{sim}(\mathbf{v})$, откуда получаем, что t_m является 0-разделителем слова $\mathbf{v}$. По лемме 1.24(i), t_m является также k-разделителем слова $\mathbf{v}$. Таким образом, буквы $t_1, t_2, \ldots, t_m$ являются k-разделителями слова $\mathbf{v}$. В частности, отсюда вытекает, что $m \leq r$. В силу симметрии, $r \leq m$. Таким образом, мы доказали, что $m = r$ и $\{t_1, t_2, \ldots, t_m\} = \{s_1, s_2, \ldots, s_r\}$. Ясно, что t_1 совпадает с s_p для некоторого p. Если $p \neq 1$, то $h_1^k(\mathbf{v}, t_1) \neq t_0$. Это противоречит тому, что $h_1^k(\mathbf{v}, t_1) = h_1^k(\mathbf{u}, t_1) = t_0$. Таким образом, $p = 1$ и, следовательно, $t_1 = s_1$. Используя индукцию, легко проверить, что $t_j = s_j$ для любого $j \leq m$.

Необходимость. Предположим, что (1.7) — k-разложение слова $\mathbf{u}$. Тогда k-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид

$$t_0\mathbf{v}_0 t_1\mathbf{v}_1 \cdots t_m\mathbf{v}_m. \tag{1.8}$$

Пусть $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$ и $D(\mathbf{u}, x) \leq k$. Из леммы 1.26 следует, что $x = t_i$ для некоторого $1 \leq i \leq m$. Следовательно, $h_1^k(\mathbf{v}, x) = h_1^k(\mathbf{u}, x) = t_{i-1}$. Аналогичным образом можно проверить, что если $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v})$ и $D(\mathbf{v}, x) \leq k$, то $h_1^k(\mathbf{v}, x) = h_1^k(\mathbf{u}, x)$. □

Лемма 1.28. *Пусть k — натуральное число, $\mathbf{w}$ — слово, x — кратная в нем буква, а t — $(k-1)$-разделитель этого слова. Предположим, что $D(\mathbf{w}, x) = k$.*

(i) *Если $t = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$, то $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t)$.*

(ii) *Если $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_2(\mathbf{w}, x)$, то $D(\mathbf{w}, t) = k - 1$; если, кроме того, $k > 1$, то $\ell_2(\mathbf{w}, x) < \ell_2(\mathbf{w}, t)$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $\ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_1(\mathbf{w}, x)$. Тогда, поскольку $t = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$, имеем $t = h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x)$. Следовательно, $h_1^{k-1}(\mathbf{w}, x) = h_2^{k-1}(\mathbf{w}, x)$. Но это противоречит равенству $D(\mathbf{w}, x) = k$. Таким образом, $\ell_1(\mathbf{w}, x) \leq \ell_1(\mathbf{w}, t)$. Поскольку t — $(k-1)$-разделитель, из леммы 1.26 вытекает, что $D(\mathbf{w}, t) \leq k - 1$. Тогда $D(\mathbf{w}, t) \neq D(\mathbf{w}, x)$, откуда получаем, что $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t)$.

(ii) Предположим, что $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_2(\mathbf{w}, x)$. Положим $r = D(\mathbf{w}, t)$. В силу леммы 1.26, $r \leq k - 1$. Предположим, что $D(\mathbf{w}, t) = r <$

$k-1$. Тогда, по лемме 1.26, t является r-разделителем. Следовательно, $t = h_2^r(\mathbf{w}, x)$. Далее, $t \neq h_1^r(\mathbf{w}, x)$, так как $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t)$. Таким образом, $h_1^r(\mathbf{w}, x) \neq h_2^r(\mathbf{w}, x)$. Это означает, что $D(\mathbf{w}, x) \leq r+1 < k$, что противоречит условию. Следовательно, $D(\mathbf{w}, t) = k-1$.

Пусть теперь $k > 1$. Тогда $t \in \mathrm{mul}(\mathbf{w})$. Предположим, что $\ell_2(\mathbf{w}, t) < \ell_2(\mathbf{w}, x)$. Положим $s = h_2^{k-2}(\mathbf{w}, t)$. В силу утверждения (i), имеем $\ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_1(\mathbf{w}, s)$. Теперь, используя рассуждения, аналогичные рассуждениям из предыдущего абзаца, мы можем показать, что $D(\mathbf{w}, s) = k-2$. Тогда, по лемме 1.26, s является $(k-2)$-разделителем слова $\mathbf{w}$. Выбор s гарантирует, что первое вхождение s в $\mathbf{w}$ предшествует второму вхождению t. С другой стороны, второе вхождение t предшествует второму вхождению x. Следовательно, первое вхождение s предшествует второму вхождению x. В то же время, первое вхождение x предшествует первому вхождению s, поскольку $\ell_1(\mathbf{w}, x) < \ell_1(\mathbf{w}, t) < \ell_1(\mathbf{w}, s)$. Следовательно, первое и второе вхождения x в $\mathbf{w}$ лежат в разных $(k-2)$-блоках. Отсюда вытекает, что $D(\mathbf{w}, x) \leq k-1$, что противоречит условию. □

Лемма 1.29. *Пусть* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *— слова, а* ℓ *— натуральное число. Предположим, что выполнено условие* (1.1) *и*

$$h_i^{\ell-1}(\mathbf{u}, x) = h_i^{\ell-1}(\mathbf{v}, x) \text{ для всех } x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}) \text{ и } i = 1, 2. \tag{1.9}$$

Тогда слова $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *имеют одинаковый набор* ℓ*-разделителей.*

Доказательство. Пусть t — произвольный ℓ-разделитель слова $\mathbf{u}$. Если $t \in \mathrm{sim}(\mathbf{u})$, то из условия (1.1) вытекает, что $t \in \mathrm{sim}(\mathbf{v})$. Тогда t является 0-разделителем слова $\mathbf{v}$, а значит, по лемме 1.24(i), и ℓ-разделителем этого слова. Предположим теперь, что $t \in \mathrm{mul}(\mathbf{u})$. Тогда из условия (1.1) вытекает, что $t \in \mathrm{mul}(\mathbf{v})$. Поскольку t — ℓ-разделитель слова $\mathbf{u}$, получаем, что $h_1^{\ell-1}(\mathbf{u}, t) \neq h_2^{\ell-1}(\mathbf{u}, t)$. Тогда, согласно условию (1.9), $h_1^{\ell-1}(\mathbf{v}, t) \neq h_2^{\ell-1}(\mathbf{v}, t)$. Следовательно, t является ℓ-разделителем слова $\mathbf{v}$. Аналогично можно показать, что если некоторая буква является ℓ-разделителем слова $\mathbf{v}$, то она также является ℓ-разделителем слова $\mathbf{u}$. □

Лемма 1.30. *Пусть* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$ *— слова, а* k *— натуральное число. Предположим, что выполнены условия* (1.1) *и* (1.9) *при* $\ell = k$. *Тогда условие* (1.9) *выполняется также при* $\ell = s$ *для любого* $1 \leq s \leq k$.

Доказательство. Если $k = 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $k > 1$. Пусть (1.7) — $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$. Тогда, по лемме 1.27, $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Пусть s — наименьшее число такое, что $s < k$ и не выполняется условие (1.9) при $\ell = s$. Тогда существует такая буква x, что $h_i^{s-1}(\mathbf{u}, x) \neq h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Из определения $(i, s-1)$-ограничителя следует, что $h_i^{s-1}(\mathbf{u}, x)$ и $h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x)$ являются некоторыми $(s-1)$-разделителями слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ соответственно. Из леммы 1.24(i) следует, что $(s-1)$-разделители слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются также $(k-1)$-разделителями этих слов. Тогда $h_i^{s-1}(\mathbf{u}, x) = t_p$ и $h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x) = t_q$ для некоторых $p \neq q$. Без ограничения общности можно считать, что $p < q$. Тогда, согласно условию, $h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x) = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$, откуда следует, что $h_i^{k-1}(\mathbf{u},x) = h_i^{k-1}(\mathbf{v},x) = t_n$ для некоторого n. Ясно, что $n \geq q$, так как $s < k$. Поскольку t_p является $(i, s-1)$-ограничителем буквы x в слове $\mathbf{u}$, не существует $(s-1)$-разделителей слова $\mathbf{u}$ между первым вхождением t_p и i-м вхождением x в $\mathbf{u}$. В частности, это означает, что t_q не является $(s-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Тогда из леммы 1.26 вытекает, что $D(\mathbf{u}, t_q) > s-1 \geq 0$. Следовательно, $t_q \in \mathrm{mul}(\mathbf{u})$. Если $s = 1$, то t_q является 0-разделителем слова $\mathbf{v}$, откуда следует, что t_q — простая в $\mathbf{v}$ буква. Это противоречит условию (1.1). Таким образом, $s > 1$. Это означает, что $h_1^{s-2}(\mathbf{u}, t_q) = h_2^{s-2}(\mathbf{u}, t_q)$. Поскольку условие (1.9) выполнено при $\ell = s-1$, мы имеем, что $h_1^{s-2}(\mathbf{v}, t_q) = h_2^{s-2}(\mathbf{v}, t_q)$. По лемме 1.24(ii), $h_1^{r-2}(\mathbf{v}, t_q) = h_2^{r-2}(\mathbf{v}, t_q)$ для всех $r \leq s$, откуда следует, что $D(\mathbf{v}, t_q) > s-1$. Тогда из леммы 1.26 вытекает, что t_q не является $(s-1)$-разделителем слова $\mathbf{v}$, что противоречит равенству $t_q = h_i^{s-1}(\mathbf{v}, x)$. □

Лемма 1.31. *Пусть $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — слова, а k — натуральное число. Предположим, что выполнены условия* (1.1) *и* (1.9) *при $\ell = k$. Тогда $D(\mathbf{u}, x) = k$ тогда и только тогда, когда $D(\mathbf{v}, x) = k$ для любого $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$.*

Доказательство. Ввиду леммы 1.30, условие (1.9) выполняется при $\ell = s$ для любого $1 \leq s \leq k$. Предположим, что $D(\mathbf{u}, x) = k$. Тогда

$$h_1^{s-1}(\mathbf{v},x) = h_1^{s-1}(\mathbf{u},x) = h_2^{s-1}(\mathbf{u},x) = h_2^{s-1}(\mathbf{v},x)$$

при $1 \leq s < k$, но

$$h_1^{k-1}(\mathbf{v},x) = h_1^{k-1}(\mathbf{u},x) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u},x) = h_2^{k-1}(\mathbf{v},x).$$

Следовательно, $D(\mathbf{v}, x) = k$. В силу симметрии, из равенства $D(\mathbf{v}, x) = k$ вытекает равенство $D(\mathbf{u}, x) = k$. □

Лемма 1.32. *Пусть $\mathbf{w}$ — слово, $r > 1$ — натуральное число, а y — такая буква, что $D(\mathbf{w}, y) = r-2$. Тогда если $\ell_1(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$ для некоторой буквы z, удовлетворяющей неравенству $D(\mathbf{w}, z) \geq r$, то $\ell_2(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$.*

Доказательство. Пусть z — такая буква, что $D(\mathbf{w}, z) \geq r$ и $\ell_1(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$. Из леммы 1.26 следует, что y является $(r-2)$-разделителем слова $\mathbf{w}$. Предположим, что $\ell_1(\mathbf{w}, y) < \ell_2(\mathbf{w}, z)$. Это означает, что $(r-2)$-разделитель y находится между первым и вторым вхождениями z в $\mathbf{w}$, что противоречит равенству $h_1^{r-2}(\mathbf{w}, z) = h_2^{r-2}(\mathbf{w}, z)$. Случай, когда $\ell_1(\mathbf{w}, y) = \ell_2(\mathbf{w}, z)$, очевидно, невозможен. Следовательно, $\ell_2(\mathbf{w}, z) < \ell_1(\mathbf{w}, y)$. □

Ниже, чтобы облегчить понимание наших рассуждений, мы иногда будем писать над буквой в скобках число, равное номеру вхождения этой буквы в данное слово; например, мы можем написать

$$\mathbf{w} = \overset{(1)}{x_1}\,\overset{(1)}{x_2}\,\overset{(2)}{x_1}\,\overset{(1)}{x_3}\,\overset{(2)}{x_2}\,\overset{(3)}{x_1}\ .$$

Лемма 1.33. *Пусть $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ — тождество, а s — натуральное число. Предположим, что выполнены условия* (1.1) *и* (1.9) *при $\ell = s$ и существует такая буква x_s, что $D(\mathbf{u}, x_s) = s$. Тогда найдутся такие буквы*

$x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}$, *что* $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$ *для всех* $0 \le r < s$ *и тождество* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *имеет вид*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{2s+1} \overset{(1)}{x_s} \mathbf{u}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-1} \overset{(2)}{x_s} \mathbf{u}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{u}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{u}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\
&\cdot \mathbf{u}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{u}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{u}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{u}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{u}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{u}_0 \\
\approx\, &\mathbf{v}_{2s+1} \overset{(1)}{x_s} \mathbf{v}_{2s} \overset{(1)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-1} \overset{(2)}{x_s} \mathbf{v}_{2s-2} \overset{(1)}{x_{s-2}} \mathbf{v}_{2s-3} \overset{(2)}{x_{s-1}} \mathbf{v}_{2s-4} \overset{(1)}{x_{s-3}} \\
&\cdot \mathbf{v}_{2s-5} \overset{(2)}{x_{s-2}} \cdots \mathbf{v}_4 \overset{(1)}{x_1} \mathbf{v}_3 \overset{(2)}{x_2} \mathbf{v}_2 \overset{(1)}{x_0} \mathbf{v}_1 \overset{(2)}{x_1} \mathbf{v}_0
\end{aligned} \tag{1.10}$$

для некоторых слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2s+1}$ *и* $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2s+1}$.

Доказательство. В силу леммы 1.30, условие (1.9) выполнено при $\ell = r$ для всех $1 \le r \le s$. Мы будем многократно использовать этот факт ниже без явных ссылок на него.

Положим $x_{s-1} = h_2^{s-1}(\mathbf{u}, x_s)$. Из условия (1.9) при $\ell = s$ следует, что $h_2^{s-1}(\mathbf{v}, x_s) = h_2^{s-1}(\mathbf{u}, x_s) = x_{s-1}$. В силу леммы 1.28, $D(\mathbf{u}, x_{s-1}) = s - 1$ и $\ell_j(\mathbf{u}, x_s) < \ell_j(\mathbf{u}, x_{s-1})$ для любого $j = 1, 2$. Напомним, что $D(\mathbf{u}, x_s) = s$. Тогда, по лемме 1.31, $D(\mathbf{v}, x_s) = s$. Снова применим лемму 1.28 и получим, что $D(\mathbf{v}, x_{s-1}) = s - 1$ и $\ell_j(\mathbf{v}, x_s) < \ell_j(\mathbf{v}, x_{s-1})$ для любого $j = 1, 2$.

Далее, положим $x_{s-2} = h_2^{s-2}(\mathbf{u}, x_{s-1})$. По лемме 1.28, $D(\mathbf{u}, x_{s-2}) = s-2$ и $\ell_j(\mathbf{u}, x_{s-1}) < \ell_j(\mathbf{u}, x_{s-2})$ для любого $j = 1, 2$. Тогда из условия (1.9) при $\ell = s - 1$ вытекает, что $h_2^{s-2}(\mathbf{v}, x_{s-1}) = h_2^{s-2}(\mathbf{u}, x_{s-1}) = x_{s-2}$. Снова применим лемму 1.28 и получим, что $D(\mathbf{v}, x_{s-2}) = s-2$ и $\ell_j(\mathbf{v}, x_{s-1}) < \ell_j(\mathbf{v}, x_{s-2})$ для любого $j = 1, 2$. Поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$, из леммы 1.32 следует, что $\ell_2(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$. Аналогичным образом можно показать, что $\ell_2(\mathbf{v}, x_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{s-2})$.

Продолжая эти рассуждения, мы определим одну за другой буквы $x_r = h_2^r(\mathbf{u}, x_{r+1})$ для всех $r = s-3, s-4, \ldots, 1$ и докажем, что $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$, $\ell_2(\mathbf{u}, x_{r+2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_r)$, $\ell_2(\mathbf{v}, x_{r+2}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_r)$, $\ell_j(\mathbf{u}, x_{r+1}) < \ell_j(\mathbf{u}, x_r)$ и $\ell_j(\mathbf{v}, x_{r+1}) < \ell_j(\mathbf{v}, x_r)$ для любого $j = 1, 2$.

Наконец, положим $x_0 = h_2^0(\mathbf{u}, x_1)$. Ввиду леммы 1.28, $D(\mathbf{u}, x_0) = 0$ и $\ell_1(\mathbf{u}, x_1) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$. Из условия (1.9) при $\ell = 1$ следует, что $h_2^0(\mathbf{v}, x_1) = h_2^0(\mathbf{u}, x_1) = x_0$. Снова применим лемму 1.28 и получим, что $D(\mathbf{v}, x_0) = 0$ и $\ell_1(\mathbf{v}, x_1) < \ell_1(\mathbf{v}, x_0)$. Поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_1) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$, из леммы 1.32 следует, что $\ell_2(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$. Аналогичным образом можно показать, что $\ell_2(\mathbf{v}, x_2) < \ell_1(\mathbf{v}, x_0)$.

Из вышесказанного следует, что тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид (1.10) для некоторых слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2s+1}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2s+1}$. $\square$

Лемма 1.34. *Пусть* $\mathbf{w} = y_1 y_2 \cdots y_n$ *— слово, где буквы* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *не обязательно попарно различны. Предположим, что* $\mathbf{u} = \mathbf{u}'\xi(\mathbf{w})\mathbf{u}''$ *для некоторых (возможно пустых) слов* $\mathbf{u}'$ *и* $\mathbf{u}''$ *и некоторого эндоморфизма* $\xi \in End(F^1)$. *Положим* $\mathbf{w}_i = \xi(y_i)$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Если* $D(\mathbf{w}, y_i) > 0$, *то подслово* $\mathbf{w}_i$ *слова* $\mathbf{u}$ *не содержит никаких* r*-разделителей слова* $\mathbf{u}$ *для всех* $r < D(\mathbf{w}, y_i)$.

Доказательство. Пусть $1 \le i \le n$ и $D(\mathbf{w}, y_i) > 0$. Тогда $y_i \in \mathrm{mul}(\mathbf{w})$, откуда вытекает, что $\mathrm{con}(\mathbf{w}_i) \subseteq \mathrm{mul}(\xi(\mathbf{w})) \subseteq \mathrm{mul}(\mathbf{u})$. Следовательно, подслово

$\mathbf{w}_i$ не содержит никаких 0-разделителей слова $\mathbf{u}$. Пусть теперь $r > 0$ — наименьшее число, для которого найдется такое i, что $D(\mathbf{w}, y_i) > r$, но подслово $\mathbf{w}_i$ содержит некоторый r-разделитель t слова $\mathbf{u}$. Из выбора r и леммы 1.26 следует, что $D(\mathbf{u}, t) = r$. Ясно, что $t \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2 \cdots \mathbf{w}_{i-1})$, откуда, в частности, следует, что буква y_i не совпадает ни с одной из букв $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$. Поскольку $y_i \in \mathrm{mul}(\mathbf{w})$, существует такое $j \geq i$, что $\mathbf{w}_j$ содержит второе вхождение буквы t в $\mathbf{u}$. Положим $x = h_2^{r-1}(\mathbf{u}, t)$. В силу леммы 1.28(i), $\ell_1(\mathbf{u}, t) < \ell_1(\mathbf{u}, x)$. Тогда найдется такое $i \leq \ell \leq j$, что $\mathbf{w}_\ell$ содержит $(r-1)$-разделитель x слова $\mathbf{u}$. Ввиду выбора числа r, мы имеем, что $D(\mathbf{w}, y_\ell) \leq r - 1$. Следовательно, что $y_i \neq y_\ell$, откуда получаем, что $\ell_1(\mathbf{w}, y_i) < \ell_1(\mathbf{w}, y_\ell)$. Далее, поскольку $y_i \in \mathrm{mul}(\mathbf{w})$, существует $p \geq j$ такое, что $y_i = y_p$. Заметим, что $\ell < p$, поскольку $y_p = y_i \neq y_\ell$. Таким образом, мы получаем, что $\ell_1(\mathbf{w}, y_i) < \ell_1(\mathbf{w}, y_\ell) < \ell_2(\mathbf{w}, y_i)$. Заметим, что из леммы 1.26 следует, что y_ℓ является $(r-1)$-разделителем слова $\mathbf{w}$. Это означает, что $h_1^{r-1}(\mathbf{w}, y_i) \neq h_2^{r-1}(\mathbf{w}, y_i)$. Получаем противоречие с леммой 1.26 и неравенством $D(\mathbf{w}, y_i) > r$. $\square$

§ 2. Отсутствие нетривиальных тождеств

Первым основным результатом диссертации является

Теорема 2.1. *Решетка* $\mathbb{OC}$ *надкоммутативных многообразий моноидов не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.*

Очевидно, что из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.2. *Решетка* $\mathbb{MON}$ *не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.* $\square$

Для того, чтобы доказать теорему 2.1, нам понадобятся некоторые определения, обозначения и один вспомогательный результат.

Как обычно, главный идеал решетки L, порожденный элементом $a \in L$, обозначим через $(a]_L$, а решетку разбиений множества X — через $\mathrm{Part}(X)$. Через $L_{\mathrm{FIC}}(F^1)$ обозначим решетку всех вполне инвариантных конгруэнций на F^1, а через $\mathrm{FIC}(\mathbf{V})$ — вполне инвариантную конгруэнцию на F^1, отвечающую многообразию моноидов $\mathbf{V}$. Общеизвестно, что отображение FIC из $\mathbb{MON}$ в $L_{\mathrm{FIC}}(F^1)$, ставящее в соответствие многообразию $\mathbf{V}$ вполне инвариантную конгруэнцию $\mathrm{FIC}(\mathbf{V})$, является антиизоморфизмом решеток. Для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$ положим $\mathbf{u} \le \mathbf{v}$, если $\mathbf{v} = \mathbf{a}\xi(\mathbf{u})\mathbf{b}$ для некоторых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^1$ и некоторого $\xi \in \mathrm{End}(F)$. Определенное таким образом отношение $\le$ является отношением квазипорядка на F. Для произвольной антицепи $A \subseteq F$ рассмотрим множество L_A всех многообразий моноидов $\mathbf{V}$, для которых A является объединением $\mathrm{FIC}(\mathbf{V})$-классов. Определим отображение $\varphi_A \colon \mathrm{L}_A \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$ правилом $\varphi_A(\mathbf{V}) = \mathrm{FIC}(\mathbf{V})|_A$ для любого $\mathbf{V} \in \mathrm{L}_A$.

Ключевую роль в доказательстве теоремы 2.1 играет следующая лемма, доказательство которой во многом аналогично доказательству леммы 3 работы [17].

Лемма 2.3. *Пусть A — произвольная антицепь в F и для любых двух слов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A$ и любого непустого множества $X \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{u})$ выполнены равенства* $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v})$ *и* $\mathbf{u}_X = \mathbf{v}_X$. *Тогда:*

(i) *множество* L_A *является подрешеткой решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) *отображение* φ_A *является антигомоморфизмом решетки* L_A *на решетку* $\mathrm{Part}(A)$*;*

(iii) *для любого разбиения* $\beta \in \mathrm{Part}(A)$ *существует надкоммутативное многообразие моноидов* $\mathbf{V} \in \mathrm{L}_A$ *такое, что* $\varphi_A(\mathbf{V}) = \beta$.

Доказательство. (i) Рассмотрим разбиение α моноида F^1 на два класса: A и $F^1 \setminus A$. Его главный идеал $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F^1)}$ состоит из всех разбиений β таких, что A является объединением β-классов. Из этого наблюдения и определения множества L_A следует, что L_A является прообразом подрешетки $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F^1)} \cap L_{\mathrm{FIC}}(F^1)$ решетки $L_{\mathrm{FIC}}(F^1)$ при антиизоморфизме FIC. Следовательно, L_A — подрешетка в $\mathbb{MON}$.

(ii) Рассмотрим отображение $\psi_A \colon (\alpha]_{\mathrm{Part}(F^1)} \longrightarrow \mathrm{Part}(A)$, определенное по правилу $\psi_A(\beta) = \beta|_A$ для любого $\beta \in (\alpha]_{\mathrm{Part}(F^1)}$. Из хорошо известного описания главных идеалов решеток разбиений (см. [28, лемма 403(v)]) вытекает, что решетка $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F^1)}$ разложима в прямое произведение решеток $\mathrm{Part}(A)$ и $\mathrm{Part}(F^1 \setminus A)$, причем отображение ψ_A есть проекция на первый сомножитель. Следовательно, ψ_A — гомоморфизм решеток. Отображение φ_A по определению является композицией антиизоморфизма FIC, ограниченного на L_A, и гомоморфизма ψ_A, ограниченного на $(\alpha]_{\mathrm{Part}(F^1)} \cap L_{\mathrm{FIC}}(F^1)$, а потому является антигомоморфизмом. Остается доказать сюръективность φ_A. Возьмем произвольное разбиение $\beta \in \mathrm{Part}(A)$ и обозначим через β^* отношение эквивалентности на A, соответствующее β. Рассмотрим многообразие $\mathbf{V}$, для которого β^* (рассматриваемое как множество пар слов) является базисом тождеств, и убедимся, что $\mathbf{V} \in \mathrm{L}_A$ и $\varphi_A(\mathbf{V}) = \beta$. Это так, если каждый β^*-класс является $\mathrm{FIC}(\mathbf{V})$-классом. Таким образом, нужно показать, что если тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в $\mathbf{V}$ и $\mathbf{u} \in A$, то $\mathbf{u}\,\beta^*\,\mathbf{v}$. Лемма 1.2 по индукции сводит проверку к случаю, когда $\mathbf{u} = \mathbf{a}\xi(\mathbf{u}')\mathbf{b}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{a}\xi(\mathbf{v}')\mathbf{b}$ для некоторых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^1$, некоторого $\xi \in \mathrm{End}(F^1)$ и слов $\mathbf{u}'$, $\mathbf{v}'$ таких, что $\mathbf{u}'\,\beta^*\,\mathbf{v}'$. Предположим сначала, что $\xi(x) = \lambda$ для некоторой буквы $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}')$. Тогда $\xi(\mathbf{u}') = \xi(\mathbf{v}')$, поскольку, согласно условию, $\mathbf{u}'_X = \mathbf{v}'_X$ для любого непустого множества $X \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{u}')$. В этом случае получаем, что $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, откуда $\mathbf{u}\,\beta^*\,\mathbf{v}$. Предположим теперь, что эндоморфизм ξ переводит все буквы из $\mathrm{con}(\mathbf{u}')$ в непустые слова. Тогда существует эндоморфизм $\zeta \in \mathrm{End}(F)$ такой, что $\xi|_{\mathrm{con}(\mathbf{u}')} = \zeta|_{\mathrm{con}(\mathbf{u}')}$. Отсюда $\mathbf{u} = \mathbf{a}\zeta(\mathbf{u}')\mathbf{b}$. Это означает, что $\mathbf{u}' \le \mathbf{u}$. Поскольку $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in A$ и A — антицепь, получаем, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \lambda$ и ξ действует тождественно на всех буквах слов $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{v}'$. Следовательно, $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Итак, $\mathbf{u} = \mathbf{u}'\,\beta^*\,\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, и потому $\mathbf{u}\,\beta^*\,\mathbf{v}$.

(iii) В ходе доказательства утверждения (ii) мы показали, что если $\beta \in \mathrm{Part}(A)$ и $\mathbf{V}$ — многообразие моноидов, для которого β^* является базисом тождеств, то $\mathbf{V} \in \mathrm{L}_A$ и $\varphi_A(\mathbf{V}) = \beta$. Если мы покажем, что $\mathbf{V}$ надкоммутативно, то утверждение (iii) будет доказано. Пусть $\mathbf{u}\,\beta^*\,\mathbf{v}$, а $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$. Положим $X = \mathrm{con}(\mathbf{u}) \setminus \{x\}$. Согласно условию, $\mathbf{u}_X = \mathbf{v}_X$, откуда $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) = \mathrm{occ}_x(\mathbf{v})$. Принимая во внимание равенство $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v})$, получаем, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) = \mathrm{occ}_x(\mathbf{v})$ для любой буквы x. Хорошо известно, что это влечет надкоммутативность многообразия $\mathbf{V}$. □

Доказательство теоремы 2.1. Пусть n — произвольное натуральное число. Покажем, что множество слов

$$A_n = \{x^{n-i}yx^i \mid 0 \le i \le n\}$$

является антицепью. Предположим противное. Тогда существуют различные i, j такие, что $x^{n-i}yx^i = \mathbf{a}\xi(x^{n-j}yx^j)\mathbf{b}$ для некоторых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in F^1$ и некоторого $\xi \in \mathrm{End}(F)$. Заметим, что длины слов $x^{n-i}yx^i$ и $x^{n-j}yx^j$ равны $n+1$, в то время как слово $\xi(x^{n-j}yx^j)$ имеет длину $\ge n+1$. Отсюда следует, что $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \lambda$ и эндоморфизм ξ переводит буквы в буквы. В этом случае нетрудно видеть, что $x^{n-i}yx^i$ не может совпадать с $\xi(x^{n-j}yx^j)$, каким бы ни был эндоморфизм ξ. Итак, мы показали, что множество слов A_n является антицепью. Кроме того, очевидно, что $\mathbf{u}_x = \mathbf{v}_x = x^n$, $\mathbf{u}_y = \mathbf{v}_y = y$ и $\mathbf{u}_{\{x,y\}} = \mathbf{v}_{\{x,y\}} = \lambda$ для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in A_n$. Применяя пп. (i) и (ii) леммы 2.3, получаем, что отображение φ_{A_n} является антигомоморфизмом решетки L_{A_n}

на решетку $\mathrm{Part}(A_n)$. Из леммы 2.3(iii) следует, что ограничение антигомоморфизма φ_{A_n} на решетку $\mathrm{L}_{A_n} \cap \mathbb{OC}$ является антигомоморфизмом этой решетки на $\mathrm{Part}(A_n)$.

Итак, решетка разбиений произвольного конечного множества является антигомоморфным образом некоторой подрешетки решетки $\mathbb{OC}$. Предположим, что последняя решетка удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству ε. Тогда тождество, двойственное к ε, выполнено в $\mathrm{Part}(A_n)$ для любого n. Но, как хорошо известно (см., например, [8, следствие IV.4.6]), класс всех решеток разбиений конечных множеств не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству. Это завершает доказательство теоремы 2.1. $\square$

§ 3. Цепные многообразия

В этом параграфе будут полностью описаны негрупповые цепные многообразия моноидов. Параграф делится на 5 разделов. В разделе 3.1 приводится формулировка основного результата параграфа, разделы 3.2–3.4 посвящены его доказательству, а в разделе 3.5 собраны следствия из основного результата.

3.1. Формулировка основного результата

Зафиксируем обозначения для следующих двух многообразий:

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \operatorname{var}\{xyx \approx xyx^2,\, x^2y^2 \approx y^2x^2,\, x^2y \approx x^2yx\},\\ \mathbf{N} &= \operatorname{var}\{x^2y \approx yx^2,\, x^2yz \approx xyxzx,\, \sigma_2,\, \gamma_1\}.\end{aligned}$$

Чтобы определить еще одно многообразие, нам понадобятся некоторые дополнительные обозначения. Для каждого натурального n обозначим через S_n симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Для любых подстановок $\pi, \tau \in S_n$ определим слова

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_n(\pi,\tau) &= \Bigl(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\Bigr) x \Bigl(\prod_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\Bigr) x \Bigl(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\Bigr),\\ \mathbf{w}'_n(\pi,\tau) &= \Bigl(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\Bigr) x^2 \Bigl(\prod_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\Bigr) \Bigl(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\Bigr).\end{aligned}$$

Заметим, что слова $\mathbf{w}_n(\pi,\tau)$ и $\mathbf{w}'_n(\pi,\tau)$ с тривиальными подстановками π и τ встречались раннее в [31, доказательство предложения 5.5]. Положим

$$\begin{aligned}\mathbf{L} = \operatorname{var}\{&x^2y \approx yx^2,\, xyxzx \approx x^2yz,\, \sigma_1,\, \sigma_2,\\ &\mathbf{w}_n(\pi,\tau) \approx \mathbf{w}'_n(\pi,\tau) \mid n \in \mathbb{N},\ \pi,\tau \in S_n\}.\end{aligned}$$

Через $\overleftarrow{\mathbf{X}}$ обозначается многообразие моноидов, *двойственное* к многообразию $\mathbf{X}$ (т.е. состоящее из моноидов, антиизоморфных моноидам из $\mathbf{X}$).

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.1. *Негрупповое многообразие моноидов является цепным тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из многообразий* $\mathbf{C}_n$ *для некоторого* $n \ge 2$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$, $\overleftarrow{\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{LRB}$, $\mathbf{N}$, $\overleftarrow{\mathbf{N}}$ *и* $\mathbf{RRB}$.

Отметим, что полный список всех негрупповых цепных многообразий моноидов будет приведен в разделе 3.5 в следствии 3.34.

3.2. Доказательство необходимости

На протяжении данного раздела через $\mathbf{V}$ обозначается фиксированное негрупповое цепное многообразие моноидов. Цель раздела — проверить, что $\mathbf{V}$ содержится в одном из многообразий, перечисленных в формулировке теоремы 3.1. Доказательство этого факта разбивается на три этапа, которым соответствуют три подраздела данного раздела.

3.2.1. Редукция к случаю, когда $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$

Из леммы 1.3 вытекает, что $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{V}$. Если $\mathbf{V}$ содержит нетривиальную группу, то многообразие, порожденное этой группой, несравнимо с $\mathbf{SL}$. Это противоречит тому, что $\mathbf{V}$ является цепным. Следовательно, многообразие $\mathbf{V}$ комбинаторно. Тогда оно удовлетворяет тождеству $x^n \approx x^{n+1}$ для некоторого n. Если $\mathbf{V}$ коммутативно, то $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{SL} \subseteq \mathbf{C}_2$ при $n = 1$ и $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_n$ в противном случае.

Далее, если $\mathbf{V}$ является многообразием идемпотентных моноидов, то из леммы 1.13 и наблюдения, что $\mathbf{V}$ не может одновременно содержать многообразия $\mathbf{LRB}$ и $\mathbf{RRB}$, следует, что $\mathbf{V}$ содержится в одном из этих двух многообразий.

Предположим теперь, что $\mathbf{V}$ некоммутативно и не является многообразием идемпотентных моноидов. Тогда $\mathbf{V}$ не вполне регулярно, так как каждое комбинаторное вполне регулярное многообразие состоит из идемпотентных моноидов. В этом случае из лемммы 1.18 вытекает, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$. Для того, чтобы продолжить наши рассуждения, нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов, содержащее многообразие $\mathbf{D}_1$. Тогда либо $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству вида*

$$x^s y x^t \approx y x^r, \tag{3.1}$$

где $s \geq 1$, $t \geq 0$, $s + t \geq 2$ и $r \geq 2$, либо для любого тождества $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненного в $\mathbf{X}$, выполняется условие

$$h_1^0(\mathbf{u}, x) = h_1^0(\mathbf{v}, x) \text{ для всех } x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}). \tag{3.2}$$

Доказательство. Предположим, что многообразие $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Из включения $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$ и предложения 1.17 следует, что выполняются условия (1.1) и (1.2). Из этих двух условий вытекает, что если (1.7) является 0-разложением слова $\mathbf{u}$, то 0-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Предположим, что условие (3.2) не выполняется. Тогда существует такая буква $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{u})$, что $h_1^0(\mathbf{u}, x) \neq h_1^0(\mathbf{v}, x)$. Из условия (1.1) вытекает, что $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{v})$. Далее, без ограничения общности можно предположить, что существуют такие $i < j$, что $t_i = h_1^0(\mathbf{u}, x)$ и $t_j = h_1^0(\mathbf{v}, x)$. Подставим y вместо t_j, а 1 вместо всех букв, входящих в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, кроме x и t_j. Мы получим, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству вида (3.1), где $s \geq 1$, $t \geq 0$, $s + t \geq 2$ и $r \geq 2$. □

Будем говорить, что мы выполняем подстановку

$$(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mapsto (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k)$$

в некоторое тождество, если мы одновременно для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ подставляем слово $\mathbf{u}_i$ вместо буквы x_i в это тождество.

Предложение 3.3. *Нетривиальное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в многообразии $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.1) *и* (3.2).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что многообразие $\mathbf{E}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Из включения $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{E}$ и предложения 1.17 следует, что это тождество удовлетворяет условию (1.1). Предположим, что условие (3.2) не выполняется. Тогда из леммы 3.2 вытекает, что $\mathbf{E}$ удовлетворяет тождеству вида (3.1), где $s \geq 1$, $t \geq 0$, $s+t \geq 2$ и $r \geq 2$. Рассмотрим полугруппу

$$P = \langle e, a \mid e^2 = e,\, ae = a,\, ea = 0 \rangle = \{e, a, 0\}.$$

Заметим, что $\mathbf{E}$ содержит моноид P^1 (т.е. полугруппу P с внешнеприсоединенной единицей). Выполним подстановку $(x, y) \mapsto (e, a)$ в тождество (3.1). Мы получим неверное равенство $0 = a$. Следовательно, P^1, и потому $\mathbf{E}$, не удовлетворяет тождеству (3.1).

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (1.1) и (3.2). Пусть (1.7) — 0-разложение слова $\mathbf{u}$. Ввиду леммы 1.27, 0-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Проверим, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в $\mathbf{E}$. Напомним, что многообразие $\mathbf{E}$ задается системой тождеств

$$\{x^2 \approx x^3,\, x^2y \approx xyx,\, x^2y^2 \approx y^2x^2\}. \tag{3.3}$$

Положим $X = \mathrm{con}(\mathbf{u}_0) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Ясно, что любой блок произвольного слова не содержит простых букв этого слова. Поэтому, учитывая систему тождеств (3.3), можно считать, что $\mathbf{u}_0 = x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$.

Докажем индукцией по m, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в $\mathbf{E}$.

База индукции. Пусть $m = 0$. Из условия (1.1) вытекает, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_0) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_0)$. Поскольку многообразие $\mathbf{E}$ удовлетворяет тождеству

$$x^2y^2 \approx y^2x^2, \tag{3.4}$$

оно также удовлетворяет и тождеству $\mathbf{v}_0 \approx x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$. Следовательно, в $\mathbf{E}$ выполнены тождества

$$\mathbf{u} = t_0\mathbf{u}_0 = t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 \approx t_0\mathbf{v}_0 = \mathbf{v},$$

что и требовалось доказать.

Шаг индукции. Пусть теперь $m > 0$. Из системы тождеств (3.3) вытекает тождество

$$\mathbf{u} \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1 (\mathbf{u}_1)_X \cdots t_m (\mathbf{u}_m)_X.$$

Согласно условию (3.2), $\mathrm{con}(\mathbf{u}_0) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_0)$, откуда следует, что система тождеств (3.3) влечет тождество

$$\mathbf{v} \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1 (\mathbf{v}_1)_X \cdots t_m (\mathbf{v}_m)_X.$$

Положим $\mathbf{u}' = (\mathbf{u}_1)_X \cdots t_m (\mathbf{u}_m)_X$ и $\mathbf{v}' = (\mathbf{v}_1)_X \cdots t_m (\mathbf{v}_m)_X$. Легко проверить, что тождество $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ удовлетворяет условиям (1.1) и (3.2). По предположению индукции, тождество $\mathbf{u}' \approx \mathbf{v}'$ выполнено в многообразии $\mathbf{E}$, откуда следует, что это многообразие удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1 \mathbf{u}' \approx t_0 x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2 t_1 \mathbf{v}' \approx \mathbf{v}.$$

Таким образом, $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в $\mathbf{E}$. □

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbf{X}$ *— многообразие моноидов, не являющееся вполне регулярным. Если* $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{X}$ *и* $\mathbf{X}$ *удовлетворяет тождеству*

$$x^2 \approx x^3, \tag{3.5}$$

то в $\mathbf{X}$ *выполнено тождество*

$$yx^2 \approx x^2yx^2. \tag{3.6}$$

Доказательство. Если многообразие $\mathbf{X}$ коммутативно, то оно удовлетворяет тождествам $yx^2 \approx yx^4 \approx x^2yx^2$. Предположим теперь, что $\mathbf{X}$ не является коммутативным. Тогда из леммы 1.18 следует, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$. Поскольку $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{X}$, существует тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{E}$. Тогда из включений $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$ и предложения 3.3 следует, что условие (1.1) выполнено, а условие (3.2) — нет. Теперь из леммы 3.2 вытекает, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству вида (3.1), где $s \geq 1$, $t \geq 0$, $s+t \geq 2$ и $r \geq 2$. Подставим x^2 вместо x в это тождество и применим необходимое число раз тождество (3.5). Мы получим, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству (3.6). □

Вернемся к цепному многообразию $\mathbf{V}$. Напомним, что мы свели наши рассмотрения к случаю, когда $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$. Поскольку многообразия $\mathbf{C}_3$ и $\mathbf{D}_1$ несравнимы, $\mathbf{C}_3 \nsubseteq \mathbf{V}$. Тогда из леммы 1.9 и комбинаторности многообразия $\mathbf{V}$ следует, что оно удовлетворяет тождеству (3.5). Предположим, что $\mathbf{D}_2 \nsubseteq \mathbf{V}$. Очевидно, что $\mathbf{V}$ не содержит по крайней мере одно из несравнимых многообразий $\mathbf{E}$ или $\overleftarrow{\mathbf{E}}$. Предположим без ограничения общности, что $\overleftarrow{\mathbf{E}} \nsubseteq \mathbf{V}$. Тогда из леммы, двойственной к лемме 3.4, следует, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$x^2y \approx x^2yx^2. \tag{3.7}$$

Согласно лемме 1.19, в $\mathbf{V}$ выполнено также тождество

$$xyx \approx x^qyx^r, \tag{3.8}$$

в котором либо $q > 1$, либо $r > 1$.

Если $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — слова, а ε — тождество, то запись $\mathbf{u} \stackrel{\varepsilon}{\approx} \mathbf{v}$ означает, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ следует из ε. Если $q > 1$, то $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам

$$xyx \stackrel{(3.8)}{\approx} x^qyx^r \stackrel{(3.7)}{\approx} x^qyx^{r+2} \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.7)}{\approx} x^2y.$$

Напомним, что в $\mathbf{V}$ также выполнено тождество (3.5). Тогда из леммы 1.14(i) следует, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{LRB} \vee \mathbf{C}_2$. Поскольку $\mathbf{V}$ — цепное многообразие, не состоящее из идемпотентных моноидов, из леммы 1.14(ii) вытекает, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{E}$. Следовательно, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$.

Предположим теперь, что $q \leq 1$. Тогда $r > 1$. Если $q = 0$, то, поскольку $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству (3.5), из утверждения, двойственного к лемме 1.14, следует, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{D}$.

Предположим наконец, что $q = 1$. Тогда многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$xyx \approx xyx^2, \tag{3.9}$$

поскольку в этом многообразии выполнено тождество (3.5). Следовательно, в $\mathbf{V}$ выполняются тождества $x^2yx \stackrel{(3.9)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.7)}{\approx} x^2y$. Таким образом, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$x^2y \approx x^2yx. \tag{3.10}$$

Из того, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$, вытекает $\mathbf{LRB} \nsubseteq \mathbf{V}$. Следовательно, существует тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{V}$, но не выполненное в $\mathbf{LRB}$. *Словом первых вхождений* слова $\mathbf{w}$ называют слово, которое получается из $\mathbf{w}$ удалением всех, кроме первого, вхождений всех букв. Это слово обозначается через $\mathrm{ini}(\mathbf{w})$. Очевидно, что тождество $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ выполнено в многообразии $\mathbf{LRB}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{ini}(\mathbf{a}) = \mathrm{ini}(\mathbf{b})$. Отсюда следует, что $\mathrm{ini}(\mathbf{u}) \neq \mathrm{ini}(\mathbf{v})$. Из предложения 1.6 вытекает, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v})$. Поэтому мы можем считать, что существуют такие буквы $x, y \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$, что $\mathbf{u}(x,y) = x^sy\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{v}(x,y) = y^tx\mathbf{w}_2$, где $s,t > 0$ и $\mathrm{con}(\mathbf{w}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{w}_2) = \{x,y\}$. Если $s = 1$, то подставим x^2 вместо x в тождество $\mathbf{u}(x,y) \approx \mathbf{v}(x,y)$. Мы получим тождество $x^{2s}y\mathbf{w}_1' \approx y^tx^2\mathbf{w}_2'$. Следовательно, мы можем считать, что $s \geq 2$. В силу симметрии, мы можем предполагать, что $t \geq 2$. Более того, тождество (3.5) позволяет считать, что $s = t = 2$. Теперь мы можем применить тождество (3.10) к тождеству $x^sy\mathbf{w}_1 \approx y^tx\mathbf{w}_2$ и вывести тождество $x^2y^k \approx y^2x^m$ для некоторых $k,m > 1$. Тогда $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам

$$x^2y^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2y^k \approx y^2x^m \stackrel{(3.5)}{\approx} y^2x^2,$$

а значит, и тождеству (3.4). Отсюда вытекает, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$.

Таким образом, нам осталось рассмотреть случай, когда $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$.

3.2.2. Редукция к случаю, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

Здесь нам потребуются некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть n и m — произвольные неотрицательные целые числа такие, что $n + m > 0$. Для любой подстановки $\theta \in S_{n+m}$ положим

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_it_i\right)x\left(\prod_{i=1}^{n+m} z_{\theta(i)}\right)x\left(\prod_{i=n+1}^{n+m} t_iz_i\right),$$
$$\mathbf{w}'_{n,m}(\theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_it_i\right)x^2\left(\prod_{i=1}^{n+m} z_{\theta(i)}\right)\left(\prod_{i=n+1}^{n+m} t_iz_i\right).$$

Отметим, что слова $\mathbf{w}_n(\pi,\tau)$ и $\mathbf{w}'_n(\pi,\tau)$, введенные в разделе 3.1, являются словами вида $\mathbf{w}_{n,n}(\theta)$ и $\mathbf{w}'_{n,n}(\theta)$ соответственно для подходящей подстановки $\theta \in S_{2n}$.

Лемма 3.5. *Многообразие* $\mathbf{L}$ *удовлетворяет тождествам вида*

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \approx \mathbf{w}'_{n,m}(\theta) \tag{3.11}$$

для всех n, m *и* $\theta \in S_{n+m}$.

Доказательство. Проверим, что каждое тождество вида (3.11) следует из некоторого тождества вида

$$\mathbf{w}_n(\pi,\tau) \approx \mathbf{w}'_n(\pi,\tau). \tag{3.12}$$

Для этого зафиксируем тождество вида (3.11). Оно имеет вид

$$\mathbf{p}_0 x \mathbf{q}_0 x \mathbf{r}_0 \approx \mathbf{p}_0 x^2 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0,$$

где $\mathbf{p}_0 = z_1 t_1 \cdots z_n t_n$, $\mathbf{q}_0 = z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)}$ и $\mathbf{r}_0 = t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{n+m} z_{n+m}$. Заметим, что слово $\mathbf{q}_0$ может быть единственным образом представлено в виде

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{u}_k \mathbf{v}_k,$$

где $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_k) = \{z_1, \dots, z_n\}$ и $\mathrm{con}(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k) = \{z_{n+1}, \dots, z_{n+m}\}$ (мы полагаем, что $\mathbf{u}_1 = \lambda$, если $\theta(1) > n$, и $\mathbf{v}_k = \lambda$, если $\theta(n+m) \le n$). Каждое из слов $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ (кроме $\mathbf{u}_1$, когда $\mathbf{u}_1 = \lambda$) имеет вид $z_{j_1} \cdots z_{j_s}$, где $j_1, \dots, j_s \le n$, в то время как каждое из слов $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ (кроме $\mathbf{v}_k$, когда $\mathbf{v}_k = \lambda$) имеет вид $z_{j_1} \cdots z_{j_s}$, где $j_1, \dots, j_s > n$.

Предположим сначала, что $\mathbf{u}_1 = \lambda$. Пусть z и t — буквы, не входящие в запись слова $\mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0 x$. Положим $\mathbf{p}' = zt\mathbf{p}_0$, $\mathbf{q}' = z\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0$. Тождество $\mathbf{p}' x \mathbf{q}' x \mathbf{r}' \approx \mathbf{p}' x^2 \mathbf{q}' \mathbf{r}'$, очевидно, следует из тождества (3.11). Ясно, что с точностью до переименования букв тождество $\mathbf{p}' x \mathbf{q}' x \mathbf{r}' \approx \mathbf{p}' x^2 \mathbf{q}' \mathbf{r}'$ имеет вид, указанный в предыдущем абзаце. Однако в данном случае слово $\mathbf{u}_1$ не может быть пустым. Таким образом, мы можем считать, что $\mathbf{u}_1 \ne \lambda$. Аналогичные рассуждения позволяют предположить, что $\mathbf{v}_k \ne \lambda$.

Предположим теперь, что $\mathbf{u}_1 = z_{j_1} \cdots z_{j_s}$, где $j_1, \dots, j_s \le n$, а z'_{j_1}, t'_{j_1}, $\dots$, $z'_{j_{s-1}}$, $t'_{j_{s-1}}$ — буквы, не входящие в запись слова $\mathbf{p}_0 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0 x$. Положим $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0$. Обозначим через $\mathbf{q}_1$ слово, полученное из $\mathbf{q}_0$ заменой слова $\mathbf{u}_1$ на слово $z_{j_1} z'_{j_1} \cdots z_{j_{s-1}} z'_{j_{s-1}} z_{j_s}$. Положим также слово $\mathbf{r}_1$ равным $\mathbf{r}_0 t'_{j_1} z'_{j_1} \cdots t'_{j_{s-1}} z'_{j_{s-1}}$. Заметим, что тождество $\mathbf{p}_0 x \mathbf{q}_0 x \mathbf{r}_0 \approx \mathbf{p}_0 x^2 \mathbf{q}_0 \mathbf{r}_0$ следует из тождества $\mathbf{p}_1 x \mathbf{q}_1 x \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{p}_1 x^2 \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1$, поскольку первое тождество можно получить из второго подстановкой 1 вместо букв $z'_{j_1}, t'_{j_1}, \dots, z'_{j_{s-1}}, t'_{j_{s-1}}$.

Пусть $\mathbf{v}_1 = z_{j_1} \cdots z_{j_s}$, где $j_1, \dots, j_s > n$, а $z'_{j_1}, t'_{j_1}, \dots, z'_{j_{s-1}}, t'_{j_{s-1}}$ — буквы, не входящие в запись слова $\mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1 x$. Положим $\mathbf{p}_2 = z'_{j_1} t'_{j_1} \cdots z'_{j_{s-1}} t'_{j_{s-1}} \mathbf{p}_1$. Через $\mathbf{q}_2$ обозначим слово, полученное из $\mathbf{q}_1$ заменой слова $\mathbf{v}_1$ на слово $z_{j_1} z'_{j_1} \cdots z_{j_{s-1}} z'_{j_{s-1}} z_{j_s}$. Положим также $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$. Тождество $\mathbf{p}_1 x \mathbf{q}_1 x \mathbf{r}_1 \approx \mathbf{p}_1 x^2 \mathbf{q}_1 \mathbf{r}_1$ следует из тождества $\mathbf{p}_2 x \mathbf{q}_2 x \mathbf{r}_2 \approx \mathbf{p}_2 x^2 \mathbf{q}_2 \mathbf{r}_2$, поскольку первое тождество можно получить из второго подстановкой 1 вместо букв z'_{j_1}, t'_{j_1}, $\dots$, $z'_{j_{s-1}}$, $t'_{j_{s-1}}$.

Продолжая данный процесс, модифицируем слова $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k$. В результате мы получим тождество

$$\mathbf{p}_{2k} x \mathbf{q}_{2k} x \mathbf{r}_{2k} \approx \mathbf{p}_{2k} x^2 \mathbf{q}_{2k} \mathbf{r}_{2k}, \tag{3.13}$$

из которого следует тождество (3.11), зафиксированное в начале доказательства. Мы можем очевидным образом переименовать буквы в полученном тождестве. Это позволяет нам считать, что $\mathbf{p}_{2k} = z_1 t_1 \cdots z_p t_p$, $\mathbf{q}_{2k} = z_{\xi(1)} \cdots z_{\xi(p+q)}$ и $\mathbf{r}_{2k} = t_{p+1} z_{p+1} \cdots t_{p+q} z_{p+q}$ для некоторых натуральных p, q

и такой подстановки $\xi \in S_{p+q}$, что $\xi(i) \le p$ для всех нечетных i, и $\xi(i) > p$ для всех четных i. Нам остается проверить, что $p = q$. Для всех $i = 1, \dots, k$ мы будем обозначать длину слова $\mathbf{u}_i$ через n_i, а длину слова $\mathbf{v}_i$ через m_i. Тогда $n_1 + \cdots + n_k = n$ и $m_1 + \cdots + m_k = m$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} p &= n + (m_1 - 1) + \cdots + (m_k - 1) = n + m - k \\ &= m + n - k = m + (n_1 - 1) + \cdots + (n_k - 1) = q. \end{aligned}$$

Таким образом, тождество (3.13) имеет вид (3.12) и влечет тождество (3.11), что и требовалось доказать. □

Лемма 3.6. *Пусть в многообразии моноидов* $\mathbf{X}$ *выполнены тождества*

$$xyxzx \approx x^2yz, \tag{3.14}$$

$$x^2y \approx yx^2 \tag{3.15}$$

и (3.11) *для всех* n, m *и* $\theta \in S_{n+m}$, $\mathbf{u}$ *— слово, а* x *— кратная в слове* $\mathbf{u}$ *буква. Тогда если* $\mathbf{u}(x, y) \ne xyx$ *ни для какой буквы* y, *то* $\mathbf{X}$ *удовлетворяет тождеству*

$$\mathbf{u} \approx x^2\mathbf{u}_x. \tag{3.16}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) > 2$. Тогда существует такое $n > 2$, что $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_nx\mathbf{u}_{n+1}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1}$, не содержащих букву x. Тогда многообразие $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_nx\mathbf{u}_{n+1} \stackrel{(3.14)}{\approx} \mathbf{u}_1x^2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_3 \cdots \mathbf{u}_{n+1} \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{n+1} = x^2\mathbf{u}_x,$$

откуда следует, что в этом многообразии выполнено тождество (3.16).

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) = 2$. В этом случае $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, не содержащих букву x. Если $\mathbf{u}_2 = \lambda$, то в $\mathbf{X}$ выполнены тождества $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1x^2\mathbf{u}_3 \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_3 = x^2\mathbf{u}_x$, что и требуется доказать.

Пусть теперь $\mathbf{u}_2 \ne \lambda$. Тогда $\mathrm{con}(\mathbf{u}_2)$ содержит некоторую букву y. Если $y \in \mathrm{sim}(\mathbf{u})$, то $\mathbf{u}(x, y) = xyx$, что противоречит условию. Следовательно, $y \in \mathrm{mul}(\mathbf{u})$ для любой буквы $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_2)$. Предположим, что $\mathrm{occ}_y(\mathbf{u}) > 2$. Тогда, используя те же рассуждения, что и в первом абзаце доказательства, мы получим, что многообразие $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx y^2\mathbf{u}_y$. Это тождество можно переписать в виде $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_1'x\mathbf{u}_2'x\mathbf{u}_3'$, где $\mathbf{u}_1' = y^2\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2' = (\mathbf{u}_2)_y$ и $\mathbf{u}_3' = (\mathbf{u}_3)_y$. Таким образом, мы можем удалить из $\mathbf{u}_2$ все буквы, входящие в слово $\mathbf{u}$ более двух раз. Иными словами, можно предположить, что либо $\mathbf{u}_2 = \lambda$, либо $\mathrm{occ}_y(\mathbf{u}) = 2$ для любой буквы $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_2)$. Первый случай уже рассмотрен в предыдущем абзаце. Рассмотрим второй случай.

Напомним, что слово $\mathbf{w}$ называют *линейным*, если $\mathrm{occ}_x(\mathbf{w}) \le 1$ для любой буквы x. Предположим, что слово $\mathbf{u}_2$ является линейным, т.е. $\mathbf{u}_2 = y_1y_2 \cdots y_k$ для некоторых попарно различных букв $y_1, y_2, \dots, y_k$. Тогда либо $y_i \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_1) \setminus \mathrm{con}(\mathbf{u}_3)$, либо $y_i \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_3) \setminus \mathrm{con}(\mathbf{u}_1)$ для любого $1 \le i \le k$. Переименованием букв $y_1, y_2, \dots, y_k$, если это необходимо, мы можем добиться того, что $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_1) \setminus \mathrm{con}(\mathbf{u}_3)$ и $y_{n+1}, \ldots, y_{n+m} \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_3) \setminus \mathrm{con}(\mathbf{u}_1)$ для некоторых n и m таких, что $n + m = k$. Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 x y_{\theta(1)} y_{\theta(2)} \cdots y_{\theta(n+m)} x \mathbf{u}_3$$

для некоторой подходящей подстановки $\theta \in S_{n+m}$ такой, что

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{w}_0 y_1 \mathbf{w}_1 y_2 \mathbf{w}_2 \cdots y_n \mathbf{w}_n, \ \mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_{n+1} y_{n+1} \mathbf{w}_{n+2} y_{n+2} \cdots \mathbf{w}_{n+m} y_{n+m} \mathbf{w}_{n+m+1}$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{n+m+1}$. Тогда $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{w}_0 \Bigl(\prod_{i=1}^{n} y_i \mathbf{w}_i\Bigr) x \Bigl(\prod_{i=1}^{n+m} y_{\theta(i)}\Bigr) x \Bigl(\prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{w}_i y_i\Bigr) \mathbf{w}_{n+m+1} \\
&\stackrel{(3.11)}{\approx} \mathbf{w}_0 \Bigl(\prod_{i=1}^{n} y_i \mathbf{w}_i\Bigr) x^2 \Bigl(\prod_{i=1}^{n+m} y_{\theta(i)}\Bigr) \Bigl(\prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{w}_i y_i\Bigr) \mathbf{w}_{n+m+1} \\
&\stackrel{(3.15)}{\approx} x^2 \mathbf{w}_0 \Bigl(\prod_{i=1}^{n} y_i \mathbf{w}_i\Bigr) \Bigl(\prod_{i=1}^{n+m} y_{\theta(i)}\Bigr) \Bigl(\prod_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{w}_i y_i\Bigr) \mathbf{w}_{n+m+1} \\
&= x^2 \mathbf{u}_x.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы снова получаем, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству (3.16).

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда слово $\mathbf{u}_2$ не является линейным. В этом случае найдется такая буква $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_2)$, что $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3$, где $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$ — слова, $y \notin \mathrm{con}(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3)$, а слово $\mathbf{v}_2$ является либо пустым, либо линейным. Если $\mathbf{v}_2$ линейно, то используя те же рассуждения, что и в предыдущем абзаце, мы можем показать, что в $\mathbf{X}$ выполнены тождества

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 y \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 \approx y^2 \mathbf{u}_y = y^2 \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1' x \mathbf{u}_2' x \mathbf{u}_3,$$

где $\mathbf{u}_1' = y^2 \mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_3$. Если же $\mathbf{v}_2 = \lambda$, то $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 y^2 \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 \stackrel{(3.15)}{\approx} y^2 \mathbf{u}_1 x \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3 x \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1' x \mathbf{u}_2' x \mathbf{u}_3,$$

где $\mathbf{u}_1' = y^2 \mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2' = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3$. В любом из этих случаев $y \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}_2')$. Иными словами, мы можем удалить букву y из слова $\mathbf{u}_2$. Мы будем повторять аналогичные рассуждения до тех пор, пока слово $\mathbf{u}_2$ не станет либо пустым, либо линейным. Оба эти случая уже были рассмотрены выше. Следовательно, мы доказали, что многообразие $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству (3.16). □

Лемма 3.7. $\mathbf{L} = \mathrm{var}\, S(xzxyty)$.

Доказательство. Положим $\mathbf{Z} = \mathrm{var}\, S(xzxyty)$. Доказательство леммы разбивается на две части, в первой из которых проверяется включение $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{L}$, а во второй — противоположное включение.

Включение $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{L}$. Ввиду леммы 1.7, достаточно проверить, что слово $xzxyty$ является изотермом для $\mathbf{L}$. Положим

$$\begin{aligned}
\Psi = \{&x^2 y \approx y x^2,\ xyxzx \approx x^2 yz,\ \sigma_1,\ \sigma_2, \\
&\mathbf{w}_n(\pi, \tau) \approx \mathbf{w}_n'(\pi, \tau) \mid n \in \mathbb{N},\ \pi, \tau \in S_n\}.
\end{aligned}$$

Напомним, что $\mathbf{L} = \operatorname{var}\Psi$. Если $\mathbf{L}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству $xzxyty \approx \mathbf{w}$ для некоторого слова $\mathbf{w}$, то, согласно лемме 1.2, существует вывод тождества $xzxyty \approx \mathbf{w}$ из системы тождеств Ψ, т.е. такая последовательность слов

$$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \tag{3.17}$$

что $\mathbf{v}_0 = xzxyty$, $\mathbf{v}_m = \mathbf{w}$, и для любого $0 \le i < m$ существуют слова $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, тождество $\mathbf{s}_i \approx \mathbf{t}_i \in \Psi$ и эндоморфизм $\xi_i \in \operatorname{End}(F^1)$ такие, что либо $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{s}_i)\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{t}_i)\mathbf{b}_i$, либо $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{t}_i)\mathbf{b}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i\xi_i(\mathbf{s}_i)\mathbf{b}_i$. Без ограничения общности можно считать, что последовательность (3.17) является кратчайшим выводом тождества $xzxyty \approx \mathbf{w}$ из системы тождеств Ψ. В частности, это означает, что $xzxyty \ne \mathbf{v}_1$. Заметим, что если $\xi_0(x) = \lambda$, то $\xi_0(\mathbf{s}_0) = \xi_0(\mathbf{t}_0)$ для любого тождества $\mathbf{s}_0 \approx \mathbf{t}_0 \in \Psi$. Нетрудно видеть, что последнее равенство противоречит тому, что $xzxyty \ne \mathbf{v}_1$. Таким образом, мы можем считать, что $\xi_0(x) \ne \lambda$.

Предположим, что $xzxyty = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0\xi_0(\mathbf{s}_0)\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0\xi_0(\mathbf{t}_0)\mathbf{b}_0$. Случай, когда $\mathbf{s}_0 = x^2y$, невозможен, так как слово $\xi_0(\mathbf{s}_0)$ содержит квадрат непустого слова, в то время как слово $xzxyty$ является бесквадратным. Случай, когда $\mathbf{s}_0 = xyxzx$, также не может иметь места, потому что в этом случае слово $\xi_0(\mathbf{s}_0)$ обязано содержать букву, встречающуюся в нем по крайней мере три раза, в то время как каждая буква слова $xzxyty$ входит в это слово не более двух раз. Наконец, случай, когда $\mathbf{s}_0 = \mathbf{w}_n(\pi, \tau)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $\pi, \tau \in S_n$, невозможен потому, что существует такая кратная в слове $\xi_0(\mathbf{s}_0)$ буква $c \in \xi_0(x)$, что всякая буква, расположенная между первым и вторым вхождениями c в $\xi_0(\mathbf{s}_0)$, является кратной, в то время как в слове $xzxyty$ между первым и вторым вхождениями любой кратной буквы обязательно найдется простая буква. Таким образом, тождество $\mathbf{s}_0 \approx \mathbf{t}_0$ совпадает либо с σ_1, либо с σ_2. В силу симметрии, нам достаточно рассмотреть только первый случай $\mathbf{s}_0 = xyzxty$ и $\mathbf{t}_0 = yxzxty$. Поскольку $\xi_0(x) \ne \lambda$, множество $\operatorname{con}(\xi_0(x))$ не пусто и, следовательно, содержит некоторую букву a. Очевидно, a является кратной в слове $\xi_0(\mathbf{s}_0)$, откуда $a \in \{x, y\}$. Предположим, что $a = x$. Тогда $\xi_0(y) = \lambda$, поскольку

$$xzxyty = \mathbf{a}_0\xi_0(\mathbf{s}_0)\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0\xi_0(x)\xi_0(y)\xi_0(z)\xi_0(x)\xi_0(t)\xi_0(y)\mathbf{b}_0.$$

Следовательно, $\xi_0(\mathbf{t}_0) = \xi_0(x)\xi_0(z)\xi_0(x)\xi_0(t) = \xi_0(\mathbf{s}_0)$. Тогда

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0\xi_0(\mathbf{t}_0)\mathbf{b}_0 = \mathbf{a}_0\xi_0(\mathbf{s}_0)\mathbf{b}_0 = xzxyty,$$

что невозможно, так как последовательность (3.17) является кратчайшим выводом тождества $xzxyty \approx \mathbf{w}$ из системы тождеств Ψ. Случай, когда $a = y$ рассматривается аналогично.

Предположим теперь, что $xzxyty = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0\xi_0(\mathbf{t}_0)\mathbf{b}_0$. Случай, когда

$$\mathbf{t}_0 \in \{yx^2,\ x^2yz,\ \mathbf{w}'_n(\pi, \tau) \mid n \in \mathbb{N},\ \pi, \tau \in S_n\}$$

невозможен, потому что в этом случае слово $\xi_0(\mathbf{t}_0)$ содержит квадрат непустого слова, в то время как слово $xzxyty$ является бесквадратным. Следовательно, тождество $\mathbf{s}_0 \approx \mathbf{t}_0$ совпадает либо с σ_1, либо σ_2. Рассуждая как в предыдущем абзаце, мы можем получить противоречие с тем, что слова $xzxyty$ и $\mathbf{v}_1$ различны.

Мы проверили, что $xzxyty$ является изотермом для $\mathbf{L}$, откуда $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{L}$.

Включение $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{Z}$. Предположим, что $\mathbf{Z}$ удовлетворяет некоторому тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Докажем, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в $\mathbf{L}$. Лемма 3.5 позволяет нам ссылаться на лемму 3.6. Пусть x — такая кратная в слове $\mathbf{u}$ буква, что $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$ для любой буквы y. По лемме 3.6, многообразие $\mathbf{L}$ удовлетворяет тождеству (3.16). Очевидно, что $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{Z}$, откуда, учитывая предложение 1.6, получаем, что $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{v})$. Поскольку $xzxyty$ является изотермом для $\mathbf{Z}$, слово xyx также обладает этим свойством. Следовательно, $\mathbf{v}(x, y) \neq xyx$ для любой буквы y. Применим снова лемму 3.6 и получим, что в $\mathbf{L}$ выполнено тождество $\mathbf{v} \approx x^2\mathbf{v}_x$. Таким образом, если тождество $\mathbf{u}_x \approx \mathbf{v}_x$ выполняется в многообразии $\mathbf{L}$, то это многообразие удовлетворяет также тождествам $\mathbf{u} \approx x^2\mathbf{u}_x \approx x^2\mathbf{v}_x \approx \mathbf{v}$. Следовательно, мы можем удалить из тождества $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ все такие кратные буквы x, что $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$ для любого y. Иными словами, без ограничения общности можно считать, что для любой буквы $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{u})$ найдется такая буква y, что $\mathbf{u}(x, y) = xyx = \mathbf{v}(x, y)$. В частности, это означает, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}), \mathrm{occ}_x(\mathbf{v}) \leq 2$ для любой буквы x.

Далее, в силу леммы 1.3, $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v})$. Очевидно, что для любых букв $a, b \notin \mathrm{con}(\mathbf{u})$, тождества $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ и $a\mathbf{u}b \approx a\mathbf{v}b$ эквивалентны в классе моноидов. Поэтому без ограничения общности можно считать, что первая и последняя буквы в каждом из слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются простыми в этих словах. Пусть $\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \mathrm{sim}(\mathbf{v}) = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$. Мы можем полагать, что $\mathbf{v}(t_1, t_2, \ldots, t_m) = t_1t_2 \cdots t_m$. Ввиду леммы 1.11, $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{Z}$. Тогда из предложения 1.17 следует, что

$$\mathbf{u} = t_0\mathbf{a}_1t_1\mathbf{a}_2t_2 \cdots t_{m-1}\mathbf{a}_mt_m \text{ и } \mathbf{v} = t_0\mathbf{b}_1t_1\mathbf{b}_2t_2 \cdots t_{m-1}\mathbf{b}_mt_m$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$.

Пусть $0 \leq i \leq m-1$. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1t_i\mathbf{a}_{i+1}t_{i+1}\mathbf{w}_2$, где

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \begin{cases} t_0\mathbf{a}_1t_1 \cdots t_{i-1}\mathbf{a}_i, & \text{если } 0 < i \leq m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = 0, \end{cases} \\
\mathbf{w}_2 &= \begin{cases} \mathbf{a}_{i+2}t_{i+2} \cdots \mathbf{a}_mt_m, & \text{если } 0 \leq i < m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = m-1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Проверим, что

$$\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1'\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2' \cdots \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k' \tag{3.19}$$

и, следовательно, $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1t_i\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1'\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2' \cdots \mathbf{u}_k\mathbf{u}_k't_{i+1}\mathbf{w}_2$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_k'$ и непустых слов $\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2', \ldots, \mathbf{u}_k$ таких, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_j) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$ и $\mathrm{con}(\mathbf{u}_j') \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_2)$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Если $\mathbf{a}_{i+1} = \lambda$, то равенство (3.19) выполняется при $k = 1$ и $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1' = \lambda$. Предположим теперь, что $\mathbf{a}_{i+1} \neq \lambda$. Пусть $x \in \mathrm{con}(\mathbf{a}_{i+1})$. Ясно, что буква x является кратной в $\mathbf{u}$, поскольку $\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$. Как мы доказали выше, в слове $\mathbf{u}$ существует простая буква y такая, что $\mathbf{u}(x, y) = xyx$. Отсюда, очевидно, следует, что x является простой в слове $\mathbf{a}_{i+1}$. Тогда $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2)$.

Итак, мы доказали, что каждая буква из $\mathrm{con}(\mathbf{a}_{i+1})$ является простой в $\mathbf{a}_{i+1}$ и встречается либо в $\mathbf{w}_1$, либо в $\mathbf{w}_2$. Пусть $\mathbf{u}_1$ — максимальный префикс слова $\mathbf{a}_{i+1}$ такой, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$ (если первая буква слова $\mathbf{a}_{i+1}$ не входит в $\mathbf{w}_1$, то считаем, что $\mathbf{u}_1 = \lambda$). Тогда $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_1\mathbf{b}$ для некоторого (возможно пустого) слова $\mathbf{b}$. Если $\mathbf{b} = \lambda$, то равенство (3.19) выполняется при $k = 1$ и $\mathbf{u}_1' = \lambda$. В противном случае пусть $\mathbf{u}_1'$ — такой максимальный префикс слова $\mathbf{b}$, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1') \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_2)$. Тогда $\mathbf{a}_{i+1} = \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1'\mathbf{c}$ для некоторого (возможно пустого) слова $\mathbf{c}$. Если $\mathbf{c} = \lambda$, то равенство (3.19) выполняется при $k = 1$. В противном случае обозначим через $\mathbf{u}_2$ такой максимальный префикс слова $\mathbf{c}$, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_2) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Продолжая этот процесс, мы получим равенство (3.19).

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1' &= \begin{cases} t_0\mathbf{b}_1t_1\cdots t_{i-1}\mathbf{b}_i, & \text{если } 0 < i \le m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = 0, \end{cases} \\ \mathbf{w}_2' &= \begin{cases} \mathbf{b}_{i+2}t_{i+2}\cdots \mathbf{b}_mt_m, & \text{если } 0 \le i < m-1, \\ \lambda, & \text{если } i = m-1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.20}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце, показывают, что $\mathbf{b}_{i+1} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2'\cdots\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k'$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_k'$ и непустых слов $\mathbf{v}_1', \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2', \dots, \mathbf{v}_k$ таких, что $\mathrm{con}(\mathbf{v}_j) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1')$ и $\mathrm{con}(\mathbf{v}_j') \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_2')$ для всех $j = 1, \dots, k$. Следовательно,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_1't_i\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2\mathbf{v}_2'\cdots\mathbf{v}_r\mathbf{v}_r't_{i+1}\mathbf{w}_2'.$$

Далее, без ограничения общности можно считать, что $k \ge r$. Проверим, что $k = r$, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_j) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_j)$ и $\mathrm{con}(\mathbf{u}_j') = \mathrm{con}(\mathbf{v}_j')$ для всех $j = 1, \dots, k$.

Возьмем x из $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1)$. Как мы показали выше, $\mathbf{u}(x, t_i) = xt_ix$. Следовательно, $\mathbf{v}(x, t_i) = xt_ix$, откуда $\mathrm{occ}_x(\mathbf{w}_1') = 1$. Заметим, что $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) \ne xt_{i+1}x$, поскольку $\mathbf{u}(x, t_{i+1}) = x^2t_{i+1}$. Таким образом, $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}_2')$, откуда следует, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\cdots\mathbf{v}_r)$. Если $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{v}_1)$, то $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_p)$ для некоторого $p > 1$. Тогда в $\mathrm{con}(\mathbf{v}_{p-1}')$ существует некоторая буква, скажем y. Заметим, что $\mathbf{u}(y, t_{i+1}) = \mathbf{v}(y, t_{i+1}) = yt_{i+1}y$. Следовательно, $y \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_2)$, откуда $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_j')$ для некоторого $1 \le j \le k$. Тогда $\mathbf{u}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_ixyt_{i+1}y$, а $\mathbf{v}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_iyxt_{i+1}y$. Это противоречит тому, что слово $xt_ixyt_{i+1}y$ является изотермом для $\mathbf{Z}$. Следовательно, $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_1)$, откуда следует, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{v}_1)$. Аналогичным образом можно проверить, что $\mathrm{con}(\mathbf{v}_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{u}_1)$. Таким образом, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_1)$.

Возьмем теперь x из $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1')$. Как мы показали выше, $\mathbf{u}(x, t_{i+1}) = xt_{i+1}x$. Следовательно, $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) = xt_{i+1}x$, откуда $\mathrm{occ}_x(\mathbf{w}_2') = 1$. Заметим, что $\mathbf{v}(x, t_i) \ne xt_ix$, поскольку $\mathbf{u}(x, t_i) = t_ix^2$. Таким образом, $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}_1')$, откуда $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_1'\mathbf{v}_2'\cdots\mathbf{v}_r')$. Если $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{v}_1')$, то $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_p')$ для некоторого $p > 1$. Тогда в $\mathrm{con}(\mathbf{v}_p)$ существует некоторая буква, скажем y. Заметим, что $\mathbf{u}(y, t_i) = \mathbf{v}(y, t_i) = yt_iy$. Следовательно, $y \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$, откуда следует, что $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_j)$ для некоторого $1 \le j \le k$. Заметим также, что $y \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}_1)$. Действительно, если $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_1)$, то $y \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_1)$, поскольку $\mathrm{con}(\mathbf{u}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_1)$. Отсюда вытекает, что $\mathrm{occ}_y(\mathbf{v}) \ge \mathrm{occ}_y(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_p\mathbf{w}_2') \ge 3$, что невозможно. Таким образом, $y \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_j)$ для некоторого $2 \le j \le k$. Тогда $\mathbf{u}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_ixyt_{i+1}y$, а $\mathbf{v}(x, y, t_i, t_{i+1}) = xt_iyxt_{i+1}y$. Это противоречит тому, что слово $xt_ixyt_{i+1}y$ является изотермом для $\mathbf{Z}$. Следовательно, $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}'_1)$, откуда следует, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}'_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{v}'_1)$. Аналогичным образом можно проверить, что $\mathrm{con}(\mathbf{v}'_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{u}'_1)$. Итак, мы доказали, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}'_1) = \mathrm{con}(\mathbf{v}'_1)$.

Повторяя с очевидными изменениями рассуждения из предыдущих двух абзацев, мы можем проверить, что $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_i)$ и $\mathrm{con}(\mathbf{u}'_i) = \mathrm{con}(\mathbf{v}'_i)$ для $i = 2, \dots, r$.

Если $k > r$, то $\mathrm{con}(\mathbf{u}_{r+1})$ содержит некоторую букву, скажем x. Как мы показали выше, $\mathbf{u}(x, t_i) = xt_ix$. Следовательно, $\mathbf{v}(x, t_i) = xt_ix$, откуда $\mathrm{occ}_x(\mathbf{w}'_1) = 1$. Заметим также, что $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) = \mathbf{u}(x, t_{i+1}) = x^2t_{i+1}$. В частности, $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) \ne xt_{i+1}x$. Следовательно, $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}'_2)$, откуда $x \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_r)$. Тогда $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_r)$, так как $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_i)$ для всех $i = 1, 2, \dots, r$. Таким образом, $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) \ge \mathrm{occ}_x(\mathbf{w}_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_{r+1}) \ge 3$, что невозможно. Следовательно, $k = r$.

Итак, мы доказали, что $k = r$, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i) = \mathrm{con}(\mathbf{v}_i)$ и $\mathrm{con}(\mathbf{u}'_i) = \mathrm{con}(\mathbf{v}'_i)$ для всех $i = 1, \dots, k$. Зафиксируем индекс $s \in \{1, 2, \dots, k\}$. Слова $\mathbf{u}_s$ и $\mathbf{v}_s$ линейны и зависят от одних и тех же букв. То же самое верно и для слов $\mathbf{u}'_s$ и $\mathbf{v}'_s$. Тождество σ_1 [соответственно σ_2] позволяет нам поменять местами первые [вторые] вхождения двух кратных букв, если эти вхождения смежны друг с другом. Следовательно, тождества σ_1 и σ_2 позволяют изменять произвольным образом порядок букв в словах $\mathbf{u}'_s$ и $\mathbf{u}_s$ соответственно. Таким образом, если мы заменим $\mathbf{u}_s$ на $\mathbf{v}_s$, а $\mathbf{u}'_s$ на $\mathbf{v}'_s$ в слове $\mathbf{u}$, то полученное нами слово будет равно $\mathbf{u}$ в многообразии $\mathbf{L}$. Это верно для всех $s = 1, \dots, k$. Следовательно, $\mathbf{L}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = \mathbf{w}_1t_i\mathbf{a}_{i+1}t_{i+1}\mathbf{w}_2 &= \mathbf{w}_1t_i\mathbf{u}_1\mathbf{u}'_1\mathbf{u}_2\mathbf{u}'_2 \cdots \mathbf{u}_k\mathbf{u}'_kt_{i+1}\mathbf{w}_2\\ &\approx \mathbf{w}_1t_i\mathbf{v}_1\mathbf{v}'_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}'_2 \cdots \mathbf{v}_k\mathbf{v}'_kt_{i+1}\mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1t_i\mathbf{b}_{i+1}t_{i+1}\mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

Таким образом, если мы заменим $\mathbf{a}_{i+1}$ на $\mathbf{b}_{i+1}$ в слове $\mathbf{u}$ для всех $i = 0, \dots, m-1$, то полученное слово будет равно $\mathbf{u}$ в многообразии $\mathbf{L}$. Следовательно, $\mathbf{L}$ удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = t_0\mathbf{a}_1t_1\mathbf{a}_2t_2 \cdots t_{m-1}\mathbf{a}_mt_m \approx t_0\mathbf{b}_1t_1\mathbf{b}_2t_2 \cdots t_{m-1}\mathbf{b}_mt_m = \mathbf{v}.$$

Лемма доказана. $\square$

Отметим одно интересное следствие из леммы 3.7. Бесконечно базируемое многообразие, все собственные подмногообразия которого конечно базируемы, называется *предельным*. Многообразие $\mathrm{var}\, S(xzxyty)$ является предельным [31, предложение 5.1]. Таким образом, из леммы 3.7 вытекает

Следствие 3.8. *Многообразие $\mathbf{L}$ является предельным. В частности, оно не имеет конечного базиса тождеств.* $\square$

Из упомянутого во введении результата работы [37] следует, что существует континуум многообразий периодических групп с 3-элементной решеткой подмногообразий. Обозначим через $\mathcal{G}$ класс всех таких многообразий. Поскольку класс конечно базируемых многообразий групп счетен, класс $\mathcal{G}$ содержит бесконечно базируемые многообразия. Как хорошо известно, многообразиями групп с двухэлементной решеткой подмногообразий являются многообразия абелевых групп простой экспоненты и только они. Поскольку они конечно базируемы, все бесконечно базируемые многообразия из класса $\mathcal{G}$ являются предельными однако явные примеры предельных многообразий групп до сих пор не известны.

Обозначим через $\mathbf{M}$ подмногообразие многообразия $\mathbf{N}$, задаваемое внутри $\mathbf{N}$ следующим тождеством:

$$\alpha_1: \; x_1y_1x_0x_1y_1 \approx y_1x_1x_0x_1y_1.$$

Заметим, что α_1 принадлежит счетной серии тождеств α_k, которую мы определим в подразделе 3.4.1.

Лемма 3.9. *Пусть $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов и $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{X}$.*

(i) *Если $\mathbf{L} \nsubseteq \mathbf{X}$, то $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству γ_1.*

(ii) *Если $\mathbf{M} \nsubseteq \mathbf{X}$, то $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству σ_1.*

Доказательство. (i) Согласно леммам 1.7 и 3.7, многообразие $\mathbf{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $xzxyty \approx \mathbf{w}$. Заметим, что, в силу лемм 1.7 и 1.11, слово xyx является изотермом для $\mathbf{X}$. Тогда из факта 3.1(i) работы [51] следует, что $\mathbf{w} = xzyxty$. Следовательно, $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству γ_1.

(ii) Из утверждения, двойственного к предложению 1 из исправления к статье [31], следует, что многообразие $\mathbf{M}$ порождается моноидом $S(xyzxty)$. Тогда $S(xyzxty) \notin \mathbf{X}$. Теперь из леммы 1.7 следует, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $xyzxty \approx \mathbf{w}$. Учитывая тот факт, что, согласно леммам 1.7 и 1.11, слово xyx является изотермом для $\mathbf{X}$, применим факт 3.1(ii) работы [51] и получим, что $\mathbf{w} = yxzxty$. Таким образом, тождество σ_1 выполнено в $\mathbf{X}$. $\square$

Вернемся к цепному многообразию $\mathbf{V}$. В подразделе 3.2.1 мы свели наши рассмотрения к случаю, когда $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{V}$. Ясно, что тогда $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{V}$, поскольку многообразия $\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{E}$ несравнимы. По лемме 3.4, многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству (3.6). Аналогичным образом, из того, что $\overleftarrow{\mathbf{E}}, \nsubseteq \mathbf{V}$ и утверждения, двойственного к лемме 3.4, следует, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству (3.7). Отсюда вытекает, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество (3.15). Если $\mathbf{V}$ не содержит $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\overleftarrow{\mathbf{M}}$, то из леммы 3.9 и утверждения, двойственного к утверждению (ii) этой леммы, следует, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам σ_1, σ_2 и γ_1, откуда $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}$.

Таким образом, нам остается рассмотреть ситуацию, когда $\mathbf{V}$ содержит одно из многообразий $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ или $\overleftarrow{\mathbf{M}}$. В этом случае $\mathbf{V}$ не содержит многообразие $\mathbf{D}_3$, поскольку $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\overleftarrow{\mathbf{M}}$ несравнимы с этим многообразием. Из леммы 1.19 и того факта, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству (3.15), следует, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество (3.14).

Предположим, что $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$. Тогда $\mathbf{V}$ не содержит $\mathbf{L}$ и $\overleftarrow{\mathbf{M}}$. Из леммы 3.9(i) и утверждения, двойственного к лемме 3.9(ii), следует, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}$. Двойственные рассуждения показывают, что если $\overleftarrow{\mathbf{M}} \subseteq \mathbf{V}$, то $\mathbf{V} \subseteq \overleftarrow{\mathbf{N}}$.

Таким образом, мы свели наши рассмотрения к случаю, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$.

3.2.3. Случай, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$

Как мы показали выше, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам (3.14) и (3.15) и не содержит многообразия $\mathbf{M}$ и $\overleftarrow{\mathbf{M}}$. Тогда из леммы 3.9(ii) и двойственной к ней следует, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам σ_1 и σ_2. Следовательно, $\mathbf{V}$ содержится в многообразии

$$\mathbf{O} = \operatorname{var}\{x^2y \approx yx^2,\, xyxzx \approx x^2yz,\, \sigma_1,\, \sigma_2\}.$$

Чтобы завершить доказательство необходимости в теореме 3.1, достаточно проверить, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{L}$. Для этого нам нужно установить, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет всем тождествам вида (3.12).

Нам потребуются одно новое обозначение и несколько вспомогательных утверждений. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $0 \le k \le \ell \le n$ и $\pi, \tau \in S_n$. Положим

$$\mathbf{w}_n^{k,\ell}(\pi,\tau) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\right)\left(\prod_{i=1}^{k} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\right) x \left(\prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\right) x \\ \cdot \left(\prod_{i=\ell+1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\right)\left(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\right).$$

Заметим, что $\mathbf{w}_n^{0,n}(\pi,\tau) = \mathbf{w}_n(\pi,\tau)$ и $\mathbf{w}_n^{0,0}(\pi,\tau) = \mathbf{w}'_n(\pi,\tau)$.

Лемма 3.10. *Пусть n — натуральное число, $\pi, \tau \in S_n$, а $\mathbf{X}$ — такое многообразие моноидов, что $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$. Если $S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big) \notin \mathbf{X}$, то $\mathbf{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида*

$$\mathbf{w}_n(\pi,\tau) \approx \mathbf{w}_n^{k,\ell}(\pi,\tau) \tag{3.21}$$

для некоторых $0 \le k \le \ell \le n$.

Доказательство. Предположим, что $S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big) \notin \mathbf{X}$. Тогда по лемме 1.7, $\mathbf{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида

$$\mathbf{w}_n(\pi,\tau) = \left(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\right) x \left(\prod_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\right) x \left(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\right) \approx \mathbf{w}. \tag{3.22}$$

Положим $\mathbf{a} = z_{\pi(1)}$, $\mathbf{b} = t_{\pi(1)} z_{\pi(1)+1} t_{\pi(1)+1} \cdots z_n t_n x$, $\mathbf{c} = z_{n+\tau(1)}$ и

$$\mathbf{d} = z_{\pi(2)} z_{n+\tau(2)} \cdots z_{\pi(n)} z_{n+\tau(n)} x t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{n+\tau(1)-1} z_{n+\tau(1)-1} t_{n+\tau(1)}.$$

Слово $\mathbf{w}_n(\pi,\tau)$ содержит подслово $\mathbf{abacdc}$. Поэтому подмоноид моноида $S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big)$, порожденный элементами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, изоморфен $S(xzxyty)$. В силу лемм 1.7 и 3.7, слово $xzxyty$ является изотермом для $\mathbf{X}$. Проверим, что

$$\begin{gathered} \ell_2(\mathbf{w}, z_i) < \ell_1(\mathbf{w}, z_{n+j}) \text{ тогда и только тогда, когда} \\ \ell_2\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau), z_i\big) < \ell_1\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau), z_{n+j}\big) \end{gathered} \tag{3.23}$$

для любых $1 \le i, j \le n$. Действительно, пусть $1 \le i, j \le n$. Слово xyx является изотермом для многообразия $\mathbf{X}$. Тогда, поскольку $\big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_i,t_i) = z_it_iz_i$, $\big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_{n+j},t_{n+j}) = z_{n+j}t_{n+j}z_{n+j}$ и тождество (3.22) выполнено в $\mathbf{X}$, мы имеем $\mathbf{w}(z_i,t_i) = z_it_iz_i$ и $\mathbf{w}(z_{n+j},t_{n+j}) = z_{n+j}t_{n+j}z_{n+j}$. Поскольку $\mathbf{X}$ не коммутативно, $\ell_1(\mathbf{w},t_i) < \ell_1(\mathbf{w},t_{n+j})$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(z_i,t_{n+j}) &= \big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_i,t_{n+j}) = z_i^2t_{n+j},\\
\mathbf{w}(z_{n+j},t_i) &= \big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_{n+j},t_i) = t_iz_{n+j}^2.
\end{aligned}$$

Подводя итог сказанному выше, получаем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}(z_i,t_i,t_{n+j}) &= \big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_i,t_i,t_{n+j}) = z_it_iz_it_{n+j},\\
\mathbf{w}(z_{n+j},t_i,t_{n+j}) &= \big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_{n+j},t_i,t_{n+j}) = t_iz_{n+j}t_{n+j}z_{n+j}.
\end{aligned}$$

Предположим, что $\ell_2(\mathbf{w},z_i) < \ell_1(\mathbf{w},z_{n+j})$. Тогда из сказанного в предыдущем абзаце следует, что

$$\mathbf{w}(z_i,z_{n+j},t_i,t_{n+j}) = z_it_iz_iz_{n+j}t_{n+j}z_{n+j}.$$

Поскольку слово $xzxyty$ является изотермом для $\mathbf{X}$,

$$\big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_i,z_{n+j},t_i,t_{n+j}) = z_it_iz_iz_{n+j}t_{n+j}z_{n+j} = \mathbf{w}(z_i,z_{n+j},t_i,t_{n+j}),$$

откуда следует, что $\ell_2(\mathbf{w}_n(\pi,\tau),z_i) < \ell_1(\mathbf{w}_n(\pi,\tau),z_{n+j})$.

Предположим теперь, что $\ell_2\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau),z_i\big) < \ell_1\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau),z_{n+j}\big)$. Тогда

$$\big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_i,z_{n+j},t_i,t_{n+j}) = z_it_iz_iz_{n+j}t_{n+j}z_{n+j}.$$

Снова учитывая тот факт, что $xzxyty$ является изотермом для $\mathbf{X}$, получаем, что

$$\mathbf{w}(z_i,z_{n+j},t_i,t_{n+j}) = \big[\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big](z_i,z_{n+j},t_i,t_{n+j}) = z_it_iz_iz_{n+j}t_{n+j}z_{n+j},$$

откуда следует, что $\ell_2(\mathbf{w},z_i) < \ell_1(\mathbf{w},z_{n+j})$.

Итак, утверждение (3.23) доказано. Тогда

$$\mathbf{w}_x = \Big(\prod_{i=1}^n z_it_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^n z_{\pi(i)}z_{n+\tau(i)}\Big)\Big(\prod_{i=n+1}^{2n} t_iz_i\Big).$$

Поскольку $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$, в $\mathbf{X}$ выполняются тождества $xyxzx \approx x^2yz \approx yzx^2$. Поэтому можно считать, что $\operatorname{occ}_x(\mathbf{w}) = 2$. Таким образом, слово $\mathbf{w}$ имеет вид

$$\Big(\prod_{i=1}^n \mathbf{p}_{2i-1}z_i\mathbf{p}_{2i}t_i\Big)\mathbf{q}_0\Big(\prod_{i=1}^n z_{\pi(i)}\mathbf{q}_{2i-1}z_{n+\tau(i)}\mathbf{q}_{2i}\Big)\Big(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i\mathbf{r}_{2i-2n-1}z_i\mathbf{r}_{2i-2n}\Big),$$

где

$$\Big(\prod_{i=1}^{2n}\mathbf{p}_i\Big)\Big(\prod_{i=0}^{2n}\mathbf{q}_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{2n}\mathbf{r}_i\Big) = x^2.$$

Предположим сначала, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{p}_{2j-1}\mathbf{p}_{2j})$ для некоторого $1 \le j \le n$ и j является наименьшим числом с таким свойством. Если $\mathbf{p}_{2j-1}\mathbf{p}_{2j} = x$, то

$$\Big(\prod_{i=2j+1}^{2n} \mathbf{p}_i\Big)\Big(\prod_{i=0}^{2n} \mathbf{q}_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{2n} \mathbf{r}_i\Big) = x.$$

В этом случае подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество (3.22), кроме x и t_j. Мы получим тождество $t_j x^2 \approx x t_j x$, что невозможно, поскольку слово xzx является изотермом для $\mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{p}_{2j-1}\mathbf{p}_{2j} = x^2$, т.е. либо $\mathbf{p}_{2j-1} = \mathbf{p}_{2j} = x$, либо $\mathbf{p}_{2j-1} = x^2$, либо $\mathbf{p}_{2j} = x^2$. Если $\mathbf{p}_{2j-1} = \mathbf{p}_{2j} = x$, то $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_n(\pi,\tau) \approx \mathbf{w} = {} & \Big(\prod_{i=1}^{j-1} z_i t_i\Big) x z_j x t_j \Big(\prod_{i=j+1}^{n} z_i t_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\Big)\Big(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\Big) \\
\stackrel{\sigma_1}{\approx} {} & \Big(\prod_{i=1}^{j-1} z_i t_i\Big) z_j x^2 t_j \Big(\prod_{i=j+1}^{n} z_i t_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\Big)\Big(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\Big) \\
\stackrel{(3.15)}{\approx} {} & \Big(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\Big) x^2 \Big(\prod_{i=1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\Big)\Big(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\Big) \\
= {} & \mathbf{w}'_n(\pi,\tau) = \mathbf{w}_n^{0,0}(\pi,\tau),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Если $\mathbf{p}_{2j-1} = x^2$ или $\mathbf{p}_{2j} = x^2$, то мы легко получим необходимое заключение, применив тождество (3.15). Итак, мы можем считать, что $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_{2n} = \lambda$.

Случай, когда $x \in \mathrm{con}(\mathbf{r}_{2j-1}\mathbf{r}_{2j})$ для некоторого $1 \le j \le n$, рассматривается аналогично предыдущему, только вместо тождества σ_1 используется тождество σ_2.

Пусть, наконец, $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots\mathbf{p}_{2n}\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\cdots\mathbf{r}_{2n})$. Тогда

$$\mathbf{q}_0\mathbf{q}_1\cdots\mathbf{q}_{2n} = x^2.$$

Заметим, что либо $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{q}_0)$, либо $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{q}_{2n})$, поскольку в противном случае тождество (3.22) становится тривиальным. Предположим без ограничения общности, что $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{q}_0)$. Тогда $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\cdots\mathbf{q}_{2n} = x^2$. Пусть k — наименьшее натуральное число такое, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{q}_k)$. Если $\mathbf{q}_k = x^2$, то, применив тождество (3.15), мы легко получим необходимое заключение. Предположим теперь, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{q}_{\ell+1})$ для некоторого $k \le \ell \le 2n-1$.

Каждое вхождение x в слово $\mathbf{w}$ лежит либо в подслове вида $z_{\pi(i)} x z_{n+\tau(i)}$, либо в подслове вида $z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)} x z_{\pi(i+1)} z_{n+\tau(i+1)}$. Нам нужно проверить, что $\mathbf{w}$ равно в $\mathbf{X}$ некоторому слову, имеющему ту же структуру, что и $\mathbf{w}$, но содержащему вхождения буквы x только второго типа. Если оба вхождения буквы x в $\mathbf{w}$ являются вхождениями второго типа, то доказывать нечего. Предположим, что оба эти вхождения являются вхождениями первого типа.

Тогда многообразие $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_n(\pi,\tau) \approx \mathbf{w} &= \biggl(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\biggr)\biggl(\prod_{i=1}^{k-1} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr) z_{\pi(k)} x z_{n+\tau(k)} \biggl(\prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr)\\
&\quad\cdot \underline{z_{\pi(\ell+1)} x}\, z_{n+\tau(\ell+1)} \biggl(\prod_{i=\ell+2}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr)\biggl(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\biggr)\\
&\stackrel{\sigma_2}{\approx} \biggl(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\biggr)\biggl(\prod_{i=1}^{k-1} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr) z_{\pi(k)}\, \underline{x z_{n+\tau(k)}} \biggl(\prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr)\\
&\quad\cdot x \biggl(\prod_{i=\ell+1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr)\biggl(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\biggr)\\
&\stackrel{\sigma_1}{\approx} \biggl(\prod_{i=1}^{n} z_i t_i\biggr)\biggl(\prod_{i=1}^{k} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr) x \biggl(\prod_{i=k+1}^{\ell} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr) x\\
&\quad\cdot \biggl(\prod_{i=\ell+1}^{n} z_{\pi(i)} z_{n+\tau(i)}\biggr)\biggl(\prod_{i=n+1}^{2n} t_i z_i\biggr)\\
&= \mathbf{w}_n^{k,\ell}(\pi,\tau)
\end{aligned}$$

(для удобства читателя, в данной цепочке тождеств мы подчеркиваем две смежные буквы, которые мы переставляем местами, применеяя одно из тождеств σ_1 и σ_2). Наконец, если вхождения x в $\mathbf{w}$ имеют различные типы, то наши рассуждения будут аналогичны предыдущим, но более просты. А именно, если вхождение первого типа лежит в $\mathbf{q}_k$ [в $\mathbf{q}_{\ell+1}$], то достаточно применить только тождество σ_1 [соответственно σ_2]. Таким образом, мы доказали, что тождество вида (3.21) в любом случае выполнено в многообразии $\mathbf{X}$. ☐

Лемма 3.11. *Пусть m — натуральное число, $0 \le k < \ell < m$, $q = \ell - k$ и $\pi, \tau \in S_m$. Тогда найдутся такие подстановки $\rho, \sigma \in S_q$, что тождество $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi,\tau) \approx \mathbf{w}_m^{k,k}(\pi,\tau)$ следует из тождества $\mathbf{w}_q(\rho,\sigma) \approx \mathbf{w}'_q(\rho,\sigma)$.*

Доказательство. Положим

$$\begin{aligned}
\{z_{\pi(k+1)}, z_{\pi(k+2)}, \dots, z_{\pi(\ell)}\} &= \{z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_q}\},\\
\{z_{m+\tau(k+1)}, z_{m+\tau(k+2)}, \dots, z_{m+\tau(\ell)}\} &= \{z_{r_1}, z_{r_2}, \dots, z_{r_q}\},
\end{aligned}$$

где $1 \le p_1 < p_2 < \dots < p_q \le m < r_1 < r_2 < \dots < r_q \le 2m$. Тогда слово $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi,\tau)$ имеет вид

$$\mathbf{u}_0 z_{p_1} \mathbf{u}_1 \cdots z_{p_q} \mathbf{u}_q x z_{\pi(k+1)} z_{m+\tau(k+1)} \cdots z_{\pi(\ell)} z_{m+\tau(\ell)} x \mathbf{u}_{q+1} z_{r_1} \cdots \mathbf{u}_{2q} z_{r_q} \mathbf{u}_{2q+1},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_0 &= \prod_{i=1}^{p_1-1} z_i t_i,\\
\mathbf{u}_s &= t_{p_s}\biggl(\prod_{i=p_s+1}^{p_{s+1}-1} z_i t_i\biggr) \text{ для всех } 1 \le s < q,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_q &= t_{p_q}\Big(\prod_{i=p_q+1}^{m} z_i t_i\Big)\Big(\prod_{i=1}^{k} z_{\pi(i)} z_{m+\tau(i)}\Big),\\
\mathbf{u}_{q+1} &= \Big(\prod_{i=\ell+1}^{m} z_{\pi(i)} z_{m+\tau(i)}\Big)\Big(\prod_{i=m+1}^{r_1-1} t_i z_i\Big) t_{r_1},\\
\mathbf{u}_{q+1+s} &= \Big(\prod_{i=r_{s-1}+1}^{r_s-1} t_i z_i\Big) t_{r_s} \text{ для всех } 1 \le s < q,\\
\mathbf{u}_{2q+1} &= \prod_{i=r_q+1}^{2m} t_i z_i.
\end{aligned}
$$

Переименуем все буквы в слове $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi,\tau)$, кроме буквы x. Начнем с букв из множества

$$
\operatorname{con}\big(\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi,\tau)\big) \setminus \{x, z_{p_1}, z_{p_2}\dots, z_{p_q}, z_{r_1}, z_{r_2}, \dots, z_{r_q}\}.
$$

Заменим их некоторыми попарно различными буквами, не входящими в запись слова $\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi,\tau)$. Затем выполним подстановку

$$
(z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_q}, z_{r_1}, z_{r_2}, \dots, z_{r_q}) \mapsto (z_1, z_2, \dots, z_q, z_{q+1}, z_{q+2}, \dots, z_{2q}).
$$

В результате мы получим слово

$$
\mathbf{u}' = \mathbf{u}_0' z_1 \mathbf{u}_1' \cdots z_q \mathbf{u}_q' x z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} x \mathbf{u}_{q+1}' z_{q+1} \cdots \mathbf{u}_{2q}' z_{2q} \mathbf{u}_{2q+1}'
$$

для подходящих подстановок $\rho, \sigma \in S_q$ и некоторых слов $\mathbf{u}_0', \mathbf{u}_1', \dots, \mathbf{u}_{2q+1}'$.

Затем выполним подстановку $(t_1, t_2, \dots, t_{2q}) \mapsto (\mathbf{u}_1', \mathbf{u}_2', \dots, \mathbf{u}_{2q}')$ в тождество $\mathbf{w}_q(\rho,\sigma) \approx \mathbf{w}_q'(\rho,\sigma)$ и получим тождество

$$
\begin{aligned}
&z_1 \mathbf{u}_1' \cdots z_q \mathbf{u}_q' x z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} x \mathbf{u}_{q+1}' z_{q+1} \cdots \mathbf{u}_{2q}' z_{2q}\\
&\approx z_1 \mathbf{u}_1' \cdots z_q \mathbf{u}_q' x^2 z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} \mathbf{u}_{q+1}' z_{q+1} \cdots \mathbf{u}_{2q}' z_{2q}.
\end{aligned}
$$

Далее, применив последнее тождество к слову $\mathbf{u}'$, выводим тождество

$$
\mathbf{u}' \approx \mathbf{u}_0' z_1 \mathbf{u}_1' \cdots z_q \mathbf{u}_q' x^2 z_{\rho(1)} z_{q+\sigma(1)} \cdots z_{\rho(q)} z_{q+\sigma(q)} \mathbf{u}_{q+1}' z_{q+1} \cdots \mathbf{u}_{2q}' z_{2q} \mathbf{u}_{2q+1}'.
$$

Наконец, проведем переименование букв в этом тождестве, обратное к сделанному выше. Мы получим тождество

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w}_m^{k,\ell}(\pi,\tau) &\approx \mathbf{u}_0 z_{p_1} \mathbf{u}_1 \cdots z_{p_q} \mathbf{u}_q x^2 z_{\pi(k+1)} z_{m+\tau(k+1)} \cdots z_{\pi(\ell)} z_{m+\tau(\ell)} x\\
&\cdot \mathbf{u}_{q+1} z_{r_1} \cdots \mathbf{u}_{2q} z_{r_q} \mathbf{u}_{2q+1} = \mathbf{w}_m^{k,k}(\pi,\tau).
\end{aligned}
$$

Лемма доказана. □

Теперь мы можем завершить доказательство необходимости в теореме 3.1. Напомним, что мы свели наши рассмотрения к случаю, когда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{O}$. Обозначим через $\mathcal{K}$ класс всех многообразий вида $\operatorname{var} S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big)$, где $n \in \mathbb{N}$, а $\pi, \tau \in S_n$. Ясно, что если $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$, то $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{X}$. Ниже мы неоднократно будем использовать этот факт, не ссылаясь на него явно. Пусть $\mathbf{X} \in \mathcal{K}$. Проверим, что в этом случае $\mathbf{X}$ содержит по крайней мере два несравнимых подмногообразия из класса $\mathcal{K}$.

Для произвольной подстановки $\xi \in S_n$ определим другие две подстановки из S_{n+2}:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \xi(1)+2 & 1 & 2 & \xi(2)+2 & \xi(3)+2 & \dots & \xi(n)+2 \end{pmatrix},$$
$$\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \xi(1)+2 & 2 & 1 & \xi(2)+2 & \xi(3)+2 & \dots & \xi(n)+2 \end{pmatrix}.$$

Если $\mathbf{X} = \operatorname{var} S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big)$ для некоторых n, π и τ, то положим $T_1 = S\big(\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1,\tau_1)\big)$ и $T_2 = S_{n+2}\big(\mathbf{w}_{n+2}(\pi_2,\tau_1)\big)$. Если $T_1 \notin \mathbf{X}$, то, по лемме 3.10, $\mathbf{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1,\tau_1) \approx \mathbf{w}_{n+2}^{k,\ell}(\pi_1,\tau_1)$ для некоторых $1 \le k \le \ell \le n+2$. Подставим

- 1 вместо z_1, z_2, z_{n+3}, z_{n+4}, t_1, t_2, t_{n+3} и t_{n+4},
- z_{i-2} вместо z_i при $3 \le i \le n+2$, и z_{i-4} вместо z_i при $n+5 \le i \le 2n+4$,
- t_{i-2} вместо t_i при $3 \le i \le n+2$, и t_{i-4} вместо t_i при $n+5 \le i \le 2n+4$

в тождество $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1,\tau_1) \approx \mathbf{w}_{n+2}^{k,\ell}(\pi_1,\tau_1)$. Мы получим, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{w}_n(\pi,\tau) \approx \mathbf{w}_n^{s,t}(\pi,\tau)$, где

$$s = \begin{cases} 1, & \text{если } k \le 3, \\ k-2, & \text{если } k > 3, \end{cases} \quad \text{а} \quad t = \begin{cases} 1, & \text{если } \ell \le 3, \\ \ell-2, & \text{если } \ell > 3. \end{cases}$$

Поскольку $s \ge 1$, полученное тождество нетривиально. Следовательно, мы получили противоречие с тем, что $\mathbf{X} = \operatorname{var} S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big)$ и леммой 1.7. Таким образом, мы доказали, что $T_1 \in \mathbf{X}$. Аналогичным образом можно показать, что $T_2 \in \mathbf{X}$.

Предположим, что $T_1 \in \operatorname{var} T_2$. По лемме 1.7, слово $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1,\tau_1)$ является изотермом для многообразия $\operatorname{var} T_2$. В то же время, легко проверить, что $\operatorname{var} T_2$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{w}_{n+2}(\pi_1,\tau_1) \approx \mathbf{w}'_{n+2}(\pi_1,\tau_1)$. Следовательно, $\operatorname{var} T_1 \nsubseteq \operatorname{var} T_2$. Аналогично, $\operatorname{var} T_2 \nsubseteq \operatorname{var} T_1$. Мы видим, что многообразия $\operatorname{var} T_1$ и $\operatorname{var} T_2$ несравнимы. Кроме того, очевидно, что они оба лежат в $\mathcal{K}$.

Таким образом, мы показали, что если $\mathbf{X} = \operatorname{var} S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big)$ для некоторых n, π и τ, то многообразие $\mathbf{X}$ не является цепным. Следовательно, $S\big(\mathbf{w}_n(\pi,\tau)\big) \notin \mathbf{V}$ для всех n, π и τ. Для произвольного n обозначим тривиальную подстановку из S_n через ε. По лемме 3.10, $\mathbf{V}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $\mathbf{w}_1(\varepsilon,\varepsilon) \approx \mathbf{w}_1^{k,\ell}(\varepsilon,\varepsilon)$ для некоторых $0 \le k \le \ell \le 1$. Поскольку $\mathbf{w}_1^{0,0}(\varepsilon,\varepsilon) = \mathbf{w}'_1(\varepsilon,\varepsilon)$, $\mathbf{w}_1^{0,1}(\varepsilon,\varepsilon) = \mathbf{w}_1(\varepsilon,\varepsilon)$ и тождество $\mathbf{w}_1(\varepsilon,\varepsilon) \approx \mathbf{w}_1^{k,\ell}(\varepsilon,\varepsilon)$ нетривиально, мы видим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет одному из тождеств $\mathbf{w}_1(\varepsilon,\varepsilon) \approx \mathbf{w}'_1(\varepsilon,\varepsilon)$ и $\mathbf{w}_1(\varepsilon,\varepsilon) \approx \mathbf{w}_1^{1,1}(\varepsilon,\varepsilon)$. Ясно, что второе тождество вместе с тождеством (3.15) влечет первое. Следовательно, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{w}_1(\varepsilon,\varepsilon) \approx \mathbf{w}'_1(\varepsilon,\varepsilon)$.

Таким образом, найдется такое число n, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам вида (3.12) для всех $\pi,\tau \in S_n$ (например, $n = 1$). Проверим, что любое n обладает этим свойством. Предположим, что утверждение верно для

$n = 1, 2, \dots, r$. Проверим, что оно верно для $n = r + 1$. Возьмем произвольные $\pi_1, \tau_1 \in S_{r+1}$. Поскольку $S\bigl(\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1)\bigr) \notin \mathbf{V}$, из леммы 3.10 следует, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{r+1}^{k,\ell}(\pi_1, \tau_1)$ для некоторых $0 \le k \le \ell < r+1$. Если $k < \ell$, то применим лемму 3.11 при $m = r+1$, $\pi = \pi_1$ и $\tau = \tau_1$ и получим, что существуют такие подстановки $\rho, \sigma \in S_{\ell-k}$, что тождество $\mathbf{w}_{\ell-k}(\rho, \sigma) \approx \mathbf{w}'_{\ell-k}(\rho, \sigma)$ влечет тождество $\mathbf{w}_{r+1}^{k,\ell}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{r+1}^{k,k}(\pi_1, \tau_1)$. Первое из этих тождеств выполнено в $\mathbf{V}$, так как $\ell - k \le r$. Следовательно, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}_{r+1}^{k,k}(\pi_1, \tau_1)$ при любых $0 \le k \le \ell < r + 1$. Заметим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет также тождеству $\mathbf{w}_{r+1}^{k,k}(\pi_1, \tau_1) \overset{(3.15)}{\approx} \mathbf{w}_{r+1}^{0,0}(\pi_1, \tau_1) = \mathbf{w}'_{r+1}(\pi_1, \tau_1)$. Таким образом, в $\mathbf{V}$ выполнено тождество $\mathbf{w}_{r+1}(\pi_1, \tau_1) \approx \mathbf{w}'_{r+1}(\pi_1, \tau_1)$ для любых $\pi_1, \tau_1 \in S_{r+1}$. Следовательно, $\mathbf{V} = \mathbf{L}$.

Мы завершили доказательство необходимости в теореме 3.1.

3.3. Доказательство достаточности: все многообразия, кроме K

В этом и следующем разделах мы докажем, что если $\mathbf{X}$ — подмногообразие одного из многообразий, перечисленных в теореме 3.1, то $\mathbf{X}$ является цепным. Поскольку свойство быть цепным многообразием наследуется подмногообразиями, можно считать, что $\mathbf{X}$ совпадает с одним из многообразий, перечисленных в теореме 3.1. В силу симметрии, мы можем исключить из рассмотрения многообразия $\overleftarrow{\mathbf{K}}$ и $\overleftarrow{\mathbf{N}}$. Таким образом, нам достаточно проверить, что многообразия $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{LRB}$, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{RRB}$ являются цепными. В данном разделе мы рассмотрим все перечисленные многообразия, кроме многообразия $\mathbf{K}$, которому будет посвящен раздел 3.4.

Из лемм 1.12 и 1.13(ii) следует, что многообразия $\mathbf{D}$, $\mathbf{LRB}$ и $\mathbf{RRB}$ являются цепными. Остается рассмотреть многообразия $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$.

Предложение 3.12. *Решетка $L(\mathbf{C}_n)$ является цепью*

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{C}_3 \subset \cdots \subset \mathbf{C}_n.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{V}$ произвольное подмногообразие многообразия $\mathbf{C}_n$. Ясно, что $\mathbf{V}$ коммутативно и комбинаторно. Если $\mathbf{C}_2 \nsubseteq \mathbf{V}$, то, согласно следствию 1.10, $\mathbf{V}$ вполне регулярно. В этом случае $\mathbf{V}$ совпадает либо с $\mathbf{T}$, либо с $\mathbf{SL}$. Следовательно, нам остается доказать, что если $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_n$, то $\mathbf{V} = \mathbf{C}_s$ для некоторого $2 \le s \le n$. Будем доказывать это индукцией по n. Если $n = 2$, то требуемое утверждение очевидно. Пусть теперь $n > 2$. Предположим, что $\mathbf{V} \ne \mathbf{C}_n$. Тогда из леммы 1.9 следует, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $x^{n-1} \approx x^n$. Это означает, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_{n-1}$. Тогда, согласно предположению индукции, $\mathbf{V} = \mathbf{C}_s$ для некоторого $2 \le s \le n-1$. $\square$

Из леммы 3.7 и [31, лемма 5.10] следует, что любое собственное подмногообразие многообразия $\mathbf{L}$ содержится в $\operatorname{var} S(xyx)$. Теперь из лемм 1.11 и 1.12 вытекает

Предложение 3.13. *Решетка $L(\mathbf{L})$ является цепью* $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{L}$. $\square$

Предложение 3.14. *Решетка $L(\mathbf{N})$ является цепью*

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}_2 \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{N}.$$

Доказательство. Проверим сначала, что $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождеству вида (3.11) для всех n, m и $\theta \in S_{n+m}$. Положим

$$\mathbf{p} = z_1 t_1 \cdots z_n t_n, \mathbf{q} = z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)} \text{ и } \mathbf{r} = t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{n+m} z_{n+m}.$$

Тогда $\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = \mathbf{p}x\mathbf{q}x\mathbf{r}$. Предположим сначала, что $\theta(n+m) \le n$. Тогда

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = z_1 t_1 \cdots \overset{(1)}{z_{\theta(n+m)}}\, t_{\theta(n+m)} \cdots z_n t_n \overset{(1)}{x}\, z_{\theta(1)} \cdots \overset{(2)}{z_{\theta(n+m)}} \overset{(2)}{x}\, \mathbf{r}.$$

Мы видим, что вторые вхождения букв $z_{\theta(n+m)}$ и x в $\mathbf{w}_{n,m}(\theta)$ смежны друг с другом. Тождество σ_2 позволяет нам переставить местами эти вхождения. Иными словами, $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \overset{\sigma_2}{\approx} \mathbf{p}x z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m-1)} x z_{\theta(n+m)} \mathbf{r}.$$

Предположим теперь, что $\theta(n+m) > n$. Тогда

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) = \mathbf{p} \overset{(1)}{x}\, z_{\theta(1)} \cdots \overset{(1)}{z_{\theta(n+m)}} \overset{(2)}{x}\, t_{n+1} z_{n+1} \cdots t_{\theta(n+m)} \overset{(2)}{z_{\theta(n+m)}} \cdots t_{n+m} z_{n+m}.$$

Мы видим, что первое вхождение буквы $z_{\theta(n+m)}$ и второе вхождение буквы x в $\mathbf{w}_{n,m}(\theta)$ смежны друг с другом. Тождество γ_1 позволяет нам переставить местами эти вхождения. Иными словами, $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \overset{\gamma_1}{\approx} \mathbf{p}x z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m-1)} x z_{\theta(n+m)} \mathbf{r}.$$

Таким образом, в любом случае тождество

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \approx \mathbf{p}x z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m-1)} x z_{\theta(n+m)} \mathbf{r}$$

выполнено в $\mathbf{N}$. Аналогичным образом мы можем последовательно переставить второе вхождение x с буквами $z_{\theta(n+m-1)}$, $z_{\theta(n+m-2)}$, $\ldots$, $z_{\theta(1)}$ и получить, что $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{w}_{n,m}(\theta) \approx \mathbf{p}x^2 z_{\theta(1)} \cdots z_{\theta(n+m)} \mathbf{r} = \mathbf{p}x^2\mathbf{q}\mathbf{r} = \mathbf{w}'_{n,m}(\theta).$$

Это позволяет нам применять ниже лемму 3.6.

Предположим, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{N}$. Если $\mathbf{M} \nsubseteq \mathbf{V}$, то, по лемме 3.9(ii), $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}$, откуда следует, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{D}_2$. Поэтому, в силу леммы 1.12, достаточно рассмотреть случай, когда $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$. Проверим, что $\mathbf{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{M}$ или $\mathbf{N}$. Пусть $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ — произвольное тождество, выполненное в $\mathbf{V}$. Проверим, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ либо влечет тождество α_1, либо выполнено в многообразии $\mathbf{N}$. Из предложения 1.6 следует, что $\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \mathrm{sim}(\mathbf{v})$. Пусть $\mathrm{sim}(\mathbf{u}) = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$. Как и в доказательстве леммы 3.7, мы можем считать, что

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{a}_1 t_1 \mathbf{a}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{a}_m t_m \text{ и } \mathbf{v} = t_0 \mathbf{b}_1 t_1 \mathbf{b}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{b}_m t_m$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$.

Пусть x — такая кратная в слове $\mathbf{u}$ буква, что $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$ для любой буквы y. По лемме 3.6, многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству (3.16). В силу предложения 1.6, $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{v})$. Поскольку $\mathbf{D}_2 \subseteq \mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$, из лемм 1.7 и 1.11 следует, что слово xyx является изотермом для $\mathbf{V}$. Следовательно, $\mathbf{v}(x, y) \neq xyx$ для любой буквы y. Снова применим лемму 3.6 и получим, что тождество $\mathbf{v} \approx x^2\mathbf{v}_x$ выполнено в $\mathbf{V}$. Следовательно, тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ является следствием всех тождеств вида (3.16) вместе с тождествами $\mathbf{v} \approx x^2\mathbf{v}_x$ и $\mathbf{u}_x \approx \mathbf{v}_x$. Таким образом, мы можем удалить из тождества $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ все такие кратные буквы x, что $\mathbf{u}(x, y) \neq xyx$ для любого y. Иными словами, можно считать, что для любой буквы $x \in \mathrm{mul}(\mathbf{u})$ существует такая буква y, что $\mathbf{u}(x, y) = xyx = \mathbf{v}(x, y)$. В частности, $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}), \mathrm{occ}_x(\mathbf{v}) \leq 2$ для любой буквы x.

Пусть $0 \leq i \leq m - 1$. Тогда $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{a}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2$, где выполняются равенства (3.18). Аналогично, $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1' t_i \mathbf{b}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2'$, где справедливы равенства (3.20). Предположим, что слово $\mathbf{a}_{i+1}$ содержит подслово $\mathbf{d} = x_i x_j$, где $x_i \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$, а $x_j \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_2)$. Тогда вхождение буквы x_i в слово $\mathbf{d}$ является вторым вхождением x_i в $\mathbf{u}$, а вхождение буквы x_j в слово $\mathbf{d}$ — первым вхождением этой буквы в $\mathbf{u}$. Тождество γ_1 позволяет переставить эти два вхождения местами. Следовательно, многообразие $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2$, где $\mathrm{con}(\mathbf{p}_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_2)$ и $\mathrm{con}(\mathbf{q}_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Аналогичным образом мы можем показать, что $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{v} \approx \mathbf{w}_1' t_i \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2 t_{i+1} \mathbf{w}_2'$, где $\mathrm{con}(\mathbf{p}_2) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_2')$ и $\mathrm{con}(\mathbf{q}_2) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1')$.

Проверим, что $\mathrm{con}(\mathbf{p}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{p}_2)$ и $\mathrm{con}(\mathbf{q}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{q}_2)$. Возьмем $x \in \mathrm{con}(\mathbf{p}_1)$. Тогда $\mathbf{u}(x, t_{i+1}) = xt_{i+1}x$. Поэтому $\mathbf{v}(x, t_{i+1}) = xt_{i+1}x$. Это означает, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1'\mathbf{p}_2\mathbf{q}_2)$ и $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_2')$. Если $x \in \mathrm{con}(\mathbf{q}_2)$, то $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1')$, откуда вытекает, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{v}) \geq 3$. Следовательно, $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{q}_2)$. Заметим, что $\mathbf{u}(x, t_i) = t_i x^2$. Тогда $\mathbf{v}(x, t_i) \neq xt_ix$, откуда $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}_1')$. Следовательно, $x \in \mathrm{con}(\mathbf{p}_2)$. Таким образом, мы доказали, что $\mathrm{con}(\mathbf{p}_1) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{p}_2)$. В силу симметрии, $\mathrm{con}(\mathbf{p}_2) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{p}_1)$, и потому $\mathrm{con}(\mathbf{p}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{p}_2)$. Аналогичные рассуждения показывают, что $\mathrm{con}(\mathbf{q}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{q}_2)$.

Таким образом, $\mathbf{p}_1 = x_1 x_2 \cdots x_k$ и $\mathbf{p}_2 = x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)}$ для некоторых букв $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_2) \cap \mathrm{con}(\mathbf{w}_2')$ и некоторой подстановки $\pi \in S_k$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \text{ и } \mathbf{v} \approx \mathbf{w}_1' t_i x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)} \mathbf{q}_2 t_{i+1} \mathbf{w}_2'.$$

Тогда в $\mathbf{N}$ выполнено тождество

$$\mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1' t_i x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} \cdots x_{\pi(k)} t_{i+1} \mathbf{q}_2 \mathbf{w}_2'. \tag{3.24}$$

Предположим, что подстановка π не является тривиальной. Тогда существуют такие j и ℓ, что $j < \ell$, но $\pi(j) > \pi(\ell)$. Подставляя 1 вместо всех букв, входящих в тождество (3.24), кроме x_j, x_ℓ и t_{i+1}, мы получим тождество $x_j x_\ell t_{i+1} \mathbf{s} \approx x_\ell x_j t_{i+1} \mathbf{s}'$, где $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \{x_j x_\ell, x_\ell x_j\}$. Теперь применим тождество σ_2 и получим тождество $x_j x_\ell t_{i+1} x_j x_\ell \approx x_\ell x_j t_{i+1} x_j x_\ell$. Переименованием букв из последнего тождества можно получить тождество α_1. Итак, если подстановка π нетривиальна, то $\mathbf{V}$ удовлетворяет α_1. Это означает, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{M}$, откуда $\mathbf{V} = \mathbf{M}$. Иными словами, если $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{p}_2$, то $\mathbf{V} = \mathbf{M}$.

Пусть теперь $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2$. Слова $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ линейны и $\mathrm{con}(\mathbf{q}_1) = \mathrm{con}(\mathbf{q}_2) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1) \cap \mathrm{con}(\mathbf{w}_1')$. Поэтому если x_i входит в $\mathrm{con}(\mathbf{q}_1)$, то это вхождение является вторым вхождением x_i в слово $\mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2$. Тождество σ_2 позволяет нам изменить произвольным образом порядок букв в подслове $\mathbf{q}_1$. Поэтому если мы заменим $\mathbf{q}_1$ на $\mathbf{q}_2$ в слове $\mathbf{w}_1 t_i x_1 x_2 \cdots x_k \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2$, то полученное слово будет равно $\mathbf{u}$ в многообразии $\mathbf{N}$. Следовательно, $\mathbf{N}$ удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{a}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{p}_1 \mathbf{q}_1 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{p}_2 \mathbf{q}_2 t_{i+1} \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 t_i \mathbf{b}_{i+1} t_{i+1} \mathbf{w}_2.$$

Это верно для $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Следовательно, в $\mathbf{N}$ выполнено тождество

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{a}_1 t_1 \mathbf{a}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{a}_m t_m \approx t_0 \mathbf{b}_1 t_1 \mathbf{b}_2 t_2 \cdots t_{m-1} \mathbf{b}_m t_m = \mathbf{v},$$

что и требовалось доказать. $\square$

3.4. Доказательство достаточности: многообразие K

В данном разделе мы проверим, что многообразие $\mathbf{K}$ является цепным. Этот случай намного сложнее, чем все рассмотренные в предыдущем разделе вместе взятые. Для удобства читателя, этот раздел делится на четыре подраздела.

3.4.1. Редукция к интервалу $[\mathbf{E}, \mathbf{K}]$

Положим

$$\Phi = \{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx\}.$$

Заметим, что $\mathbf{K} = \mathrm{var}\,\Phi$. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $1 \le m \le k$ положим

$$\mathbf{b}_{k,m} = x_{k-1} x_k x_{k-2} x_{k-1} \cdots x_{m-1} x_m$$

и $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{k,1}$; будем полагать также, что $\mathbf{b}_0 = \lambda$. Введем обозначения для следующих четырех счетных серий тождеств:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &: \ x_k y_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1} \approx y_k x_k x_{k-1} x_k y_k \mathbf{b}_{k-1},\\
\beta_k &: \ x x_k x \mathbf{b}_k \approx x_k x^2 \mathbf{b}_k,\\
\gamma_k &: \ y_1 y_0 x_k y_1 \mathbf{b}_k \approx y_1 y_0 y_1 x_k \mathbf{b}_k,\\
\delta_k^m &: \ y_{m+1} y_m x_k y_{m+1} \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1} \approx y_{m+1} y_m y_{m+1} x_k \mathbf{b}_{k,m} y_m \mathbf{b}_{m-1},
\end{aligned}$$

где $k \in \mathbb{N}$ и $1 \le m \le k$. Заметим, что тождества α_1 и γ_1 уже появлялись выше. Определим следующие четыре счетные серии многообразий:

$$\mathbf{F}_k = \mathrm{var}\{\Phi, \alpha_k\},\ \mathbf{H}_k = \mathrm{var}\{\Phi, \beta_k\},\ \mathbf{I}_k = \mathrm{var}\{\Phi, \gamma_k\},\ \mathbf{J}_k^m = \mathrm{var}\{\Phi, \delta_k^m\}.$$

Следующее утверждение описывает строение решетки $L(\mathbf{K})$. Его доказательству и посвящен весь раздел 3.4.

Предложение 3.15. 1) *Решетка $L(\mathbf{K})$ является теоретико-множественным объединением решетки $L(\mathbf{E})$ и интервала $[\mathbf{E}, \mathbf{K}]$.*

2) *Решетка* $L(\mathbf{E})$ *является цепью* $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{E}$.

3) *Если* $\mathbf{X}$ — *такое многообразие моноидов, что* $\mathbf{E} \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{K}$, *то* $\mathbf{X}$ *принадлежит интервалу* $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ *для некоторого* k.

4) *Интервал* $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ *является цепью*

$$\mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1 \subset \mathbf{J}_k^2 \subset \cdots \subset \mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{F}_{k+1}. \tag{3.25}$$

Из предложения 3.15 следует, что решетка $L(\mathbf{K})$ является цепью

$$\begin{aligned}\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subset \mathbf{E} &\subset \mathbf{F}_1 \subset \mathbf{H}_1 \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{J}_1^1\\ &\subset \mathbf{F}_2 \subset \mathbf{H}_2 \subset \mathbf{I}_2 \subset \mathbf{J}_2^1 \subset \mathbf{J}_2^2\\ &\vdots\\ &\subset \mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1 \subset \mathbf{J}_k^2 \subset \cdots \subset \mathbf{J}_k^k\\ &\vdots\\ &\subset \mathbf{K}.\end{aligned}$$

В оставшейся части данного подраздела мы проверим утверждение 1) предложения 3.15. Утверждение 2) следует из леммы 1.14(ii). Утверждения 3) и 4) доказываются в подразделах 3.4.3 и 3.4.4 соответственно, а подраздел 3.4.2 содержит некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $\mathbf{X}$ — подмногообразие многообразия $\mathbf{K}$. Проверим, что либо $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, либо $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$. Подставляя 1 вместо буквы y в тождество (3.9), мы получим, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству (3.5). Если $\mathbf{X}$ коммутативно, то $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{E}$, что и требовалось доказать. Следовательно, мы можем предположить, что $\mathbf{X}$ не является коммутативным. Ясно, что многообразие $\mathbf{X}$ является комбинаторным, поскольку оно удовлетворяет тождеству (3.5). Предположим, что $\mathbf{X}$ вполне регулярно. Всякое комбинаторное вполне регулярное многообразие является многообразием идемпотентных моноидов, а каждый идемпотентный моноид, удовлетворяющий тождеству (3.4), коммутативен. Следовательно, $\mathbf{X}$ не может быть вполне регулярным. Тогда, по лемме 1.18, $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{X}$.

Предположим, что $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда из леммы 3.4 вытекает, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству (3.6). Кроме того, в $\mathbf{X}$ выполнено тождество (3.10), поскольку $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{K}$. Отсюда следует, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождествам

$$x^2y \stackrel{(3.10)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} yx^2.$$

Мы видим, что в $\mathbf{X}$ выполняется тождество (3.15), а также тождества

$$xyx \stackrel{(3.9)}{\approx} xyx^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} x^3yx^2 \stackrel{(3.5)}{\approx} x^2yx^2 \stackrel{(3.6)}{\approx} yx^2 \stackrel{(3.15)}{\approx} x^2y.$$

Следовательно, в $\mathbf{X}$ выполнено тождество

$$xyx \approx x^2y. \tag{3.26}$$

Из тождеств (3.15) и (3.26), очевидно, вытекают тождества σ_1, σ_2 и γ_1. Следовательно, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{E}$. Таким образом, мы показали, что если $\mathbf{E} \nsubseteq \mathbf{X}$, то $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$. Утверждение 1) предложения 3.15 доказано.

3.4.2. Несколько вспомогательных результатов

В этом подразделе мы докажем несколько полезных для дальнейшего утверждений.

Лемма 3.16. *Многообразие* $\mathbf{K}$ *удовлетворяет:*

(i) *тождеству* σ_2*;*

(ii) *тождеству*
$$xyxzx \approx xyxz; \tag{3.27}$$

(iii) *любому такому тождеству* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$*, что* $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v})$ *и* $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u})$, $\mathrm{occ}_x(\mathbf{v}) \geq 2$ *для любого* $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$.

Доказательство. (i) Достаточно заметить, что многообразие $\mathbf{K}$ удовлетворяет тождествам $xzytxy \stackrel{(3.9)}{\approx} xzytx^2y^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} xzyty^2x^2 \stackrel{(3.9)}{\approx} xzytyx$.

(ii) В этом случае достаточно заметить, что в $\mathbf{K}$ выполнены тождества
$$xyxzx \stackrel{(3.9)}{\approx} xyx^2zx \stackrel{(3.10)}{\approx} xyx^2z \stackrel{(3.9)}{\approx} xyxz.$$

(iii) Из утверждения (ii) следует, что $\mathbf{K}$ удовлетворяет тождеству (3.27). Этот факт позволяет нам считать, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) = \mathrm{occ}_x(\mathbf{v}) = 2$ для любой буквы $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$. Пусть $\mathrm{con}(\mathbf{u}) = \mathrm{con}(\mathbf{v}) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Проверим, что в $\mathbf{K}$ выполнено тождество $\mathbf{u} \approx x_1^2x_2^2 \cdots x_k^2$. Докажем это индукцией по k.

База индукции. Если $k = 1$, то тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид $x_1^2 \approx x_1^2$. Очевидно, что оно выполняется в $\mathbf{K}$.

Шаг индукции. Пусть теперь $k > 1$. Без ограничения общности можно считать, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_i) < \ell_1(\mathbf{u}, x_k)$ для любого $1 \leq i < k$. Тогда
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' x_k x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_s} x_k x_{j_{s+1}} x_{j_{s+2}} \cdots x_{j_{s+t}},$$
где $x_{j_r} \in \mathrm{con}(\mathbf{u}')$ для всех $1 \leq r \leq s+t$. Тогда в $\mathbf{K}$ выполнены тождества
$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{u}' x_k x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 \cdots x_{j_s}^2 x_k^2 x_{j_{s+1}}^2 x_{j_{s+2}}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} \mathbf{u}' x_k^3 x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 \\ &\stackrel{(3.5)}{\approx} \mathbf{u}' x_k^2 x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 \stackrel{(3.4)}{\approx} \mathbf{u}' x_{j_1}^2 x_{j_2}^2 \cdots x_{j_{s+t}}^2 x_k^2 \stackrel{(3.27)}{\approx} \mathbf{u}' x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{s+t}} x_k^2 \\ &= \mathbf{u}_{x_k} x_k^2.\end{aligned}$$

Слово $\mathbf{u}_{x_k}$ содержит в точности $k-1$ букву. Согласно предположению индукции, тождество $\mathbf{u}_{x_k} \approx x_1^2 x_2^2 \cdots x_{k-1}^2$ выполнено в многообразии $\mathbf{K}$, откуда следует, что это многообразие удовлетворяет тождествам $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_{x_k} x_k^2 \approx x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$. Аналогичным образом можно доказать, что в $\mathbf{K}$ выполнено тождество $\mathbf{v} \approx x_1^2 x_2^2 \cdots x_k^2$. Отсюда следует, что $\mathbf{K}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. □

Лемма 3.17. *Система тождеств* Φ *вместе с тождеством*
$$xx_kx\mathbf{b}_k \approx x^2x_k\mathbf{b}_k \tag{3.28}$$
образует базис тождеств многообразия $\mathbf{J}_k^k$.

Доказательство. Отметим сначала, что в многообразии $\mathbf{J}_k^k$ выполнено тождество (3.28). Чтобы убедиться в этом, достаточно выполнить подстановку $(y_k, y_{k+1}) \mapsto (1, x)$ в тождество δ_k^k и воспользоваться равенством $\mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}$. Таким образом, нам остается проверить, что тождество δ_k^k является следствием системы тождеств Φ и тождества (3.28). Ввиду леммы 3.16, мы можем использовать тождества σ_2 и (3.27). Вот требуемый вывод (буквы в правом столбце отсылают к комментариям после вывода):

$$\begin{aligned}
y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}\mathbf{b}_{k,k}y_k\mathbf{b}_{k-1} &= y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{(a)}\\
&\approx y_{k+1}y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}y_kx_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{(b)}\\
&\approx y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}y_kx_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{(c)}\\
&\approx y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{(d)}\\
&= y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2} && \text{(e)}\\
&\approx y_{k+1}^2y_kx_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_kx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-2} && \text{(f)}\\
&\approx y_{k+1}y_ky_{k+1}x_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_kx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-2} && \text{(g)}\\
&\approx y_{k+1}y_ky_{k+1}x_kx_{k-1}x_ky_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2} && \text{(h)}\\
&= y_{k+1}y_ky_{k+1}x_k\mathbf{b}_{k,k}y_k\mathbf{b}_{k-1}. && \text{(i)}
\end{aligned}$$

(a) Здесь мы используем равенство $\mathbf{b}_{k,k} = x_{k-1}x_k$.

(b) Здесь мы изменяем слово $y_kx_ky_{k+1}x_{k-1}x_ky_k$, используя тождество, полученное из σ_2 подстановкой $(x, t, y, z) \mapsto (y_k, 1, x_k, y_{k+1}x_{k-1})$.

(c) Здесь мы пользуемся тождеством, полученным из (3.28) подстановкой $(x, x_k) \mapsto (y_{k+1}, y_kx_k)$, и равенством $\mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}$.

(d) Здесь мы изменяем подслово $y_kx_kx_{k-1}y_kx_k$, используя тождество, полученное из σ_2 подстановкой $(x, t, y, z) \mapsto (y_k, 1, x_k, x_{k-1})$.

(e) Здесь мы используем равенство $\mathbf{b}_{k-1} = x_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}$.

(f) Здесь мы добавляем два новых вхождения буквы x_k после второго вхождения этой буквы в слово $y_{k+1}^2y_k \overset{(1)}{x_k} x_{k-1} \overset{(2)}{x_k} y_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}$, используя тождество (3.27).

(g) Здесь мы пользуемся тождеством, полученным из (3.28) подстановкой $(x, x_k, x_{k-1}) \mapsto (y_{k+1}, y_k, x_kx_{k-1}x_k)$, и равенством

$$\mathbf{b}_k = x_{k-1}x_kx_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}.$$

(h) Здесь мы удаляем третье и четвертое вхождения буквы x_k в слово $y_{k+1}y_ky_{k+1} \overset{(1)}{x_k} x_{k-1} \overset{(2)}{x_k} y_kx_{k-2} \overset{(3)}{x_k} x_{k-1} \overset{(4)}{x_k} \mathbf{b}_{k-2}$, используя тождество (3.27).

(i) Здесь используем равенства $\mathbf{b}_{k-1}=x_{k-2}x_{k-1}\mathbf{b}_{k-2}$ и $\mathbf{b}_{k,k}=x_{k-1}x_k$. □

Лемма 3.18. *Справедливы включения*

$$\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{J}_k^1 \subseteq \mathbf{J}_k^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{J}_k^k \subseteq \mathbf{F}_{k+1}. \tag{3.29}$$

Доказательство. Поскольку все многообразия, встречающиеся в цепочке (3.29), содержатся в $\mathbf{K}$, мы можем использовать лемму 3.16. В частности, эта лемма позволяет нам применять тождества σ_2 и (3.27).

1°. *Включение* $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{H}_k$. Нам нужно проверить, что β_k следует из Φ и α_k. Вот соответствующий вывод:

$$\begin{aligned}
xx_kx\mathbf{b}_k &= xx_kxx_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{поскольку } \mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}\\
&\approx xx_kxx_{k-1}x_kx^2\mathbf{b}_{k-1} && \text{в силу (3.27)}\\
&\approx x_kx^2x_{k-1}x_kx^2\mathbf{b}_{k-1} && \text{выполняем подстановку}\\
& && (x_k, y_k) \mapsto (x_kx, x) \text{ в } \alpha_k\\
&\approx x_kx^2x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1} && \text{в силу (3.27)}\\
&= x_kx^2\mathbf{b}_k && \text{поскольку } \mathbf{b}_k = x_{k-1}x_k\mathbf{b}_{k-1}.
\end{aligned}$$

2°. *Включение* $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{I}_k$. В этом случае нужно проверить, что γ_k вытекает из Φ и β_k. Действительно,

$$\begin{aligned}
y_1y_0x_ky_1\mathbf{b}_k &\approx y_1y_0x_ky_1^2\mathbf{b}_k && \text{в силу (3.27)}\\
&\approx y_1y_0y_1x_ky_1\mathbf{b}_k && \text{изменяем подслово } x_ky_1^2\mathbf{b}_k\text{, используя}\\
& && \text{тождество, полученное из } \beta_k\\
& && \text{подстановкой } y_1 \text{ вместо } x\\
&\approx y_1y_0y_1x_k\mathbf{b}_k && \text{в силу (3.27).}
\end{aligned}$$

3°. *Включение* $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{J}_k^1$. Нам достаточно установить, что δ_k^1 вытекает из γ_k. Поскольку $\mathbf{b}_{k,1} = \mathbf{b}_k$ и $\mathbf{b}_0 = \lambda$, тождество δ_k^1 имеет вид

$$y_2y_1x_ky_2\mathbf{b}_ky_1 \approx y_2y_1y_2x_k\mathbf{b}_ky_1.$$

Чтобы вывести это тождество из γ_k, достаточно изменить слово $y_2y_1x_ky_2\mathbf{b}_k$, используя тождество, получающееся из γ_k подстановкой $(y_0, y_1) \mapsto (y_1, y_2)$.

4°. *Включение* $\mathbf{J}_k^m \subseteq \mathbf{J}_k^{m+1}$, *где* $1 \le m < k$. Нам достаточно доказать, что δ_k^{m+1} следует из δ_k^m. Действительно, если мы сначала умножим δ_k^m слева на слово $x_{-1}x_0$, а затем увеличим на 1 индекс каждой буквы в полученном тождестве, то в результате мы получим δ_k^{m+1}.

5°. *Включение* $\mathbf{J}_k^k \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$. Ввиду леммы 3.17, нам достаточно установить, что α_{k+1} следует из Φ и (3.28). Вот соответствующий вывод:

$$\begin{aligned}
x_{k+1}y_{k+1}x_kx_{k+1}y_{k+1}\mathbf{b}_k &\approx (x_{k+1}y_{k+1})^2x_k\mathbf{b}_k && \text{(a)}\\
&\approx (y_{k+1}x_{k+1})^2x_k\mathbf{b}_k && \text{(b)}\\
&\approx y_{k+1}x_{k+1}x_ky_{k+1}x_{k+1}\mathbf{b}_k && \text{(c)}\\
&\approx y_{k+1}x_{k+1}x_kx_{k+1}y_{k+1}\mathbf{b}_k. && \text{(d)}
\end{aligned}$$

(a) Здесь мы используем тождество, получающееся из тождества (3.28) подстановкой x_ky_k вместо x.

(b) Здесь мы применяем тождество $(xy)^2 \approx (yx)^2$, которое выполнено в многообразии $\mathbf{K}$ в силу леммы 3.16(iii).

(c) Здесь мы используем тождество, получающееся из тождества (3.28) подстановкой y_kx_k вместо x.

(d) Здесь мы используем тождество, получающееся из тождества σ_2 подстановкой $(x, t, y, z) \mapsto (y_{k+1}, 1, x_{k+1}, x_k)$. □

Мы будем часто использовать включения (3.29) без ссылок на лемму 3.18. Отметим, что на самом деле справедливы строгие включения (3.25), которые мы докажем в конце раздела 3.4.

Лемма 3.19. *Пусть* $\mathbf{u}$ — *левая или правая часть одного из тождеств* α_k, β_k, γ_k *и* δ_k^m. *Тогда:*

1) *Если* $x_i, y_j \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$, *то* $D(\mathbf{u}, x_i) = i$ *и* $D(\mathbf{u}, y_j) = j$. *Глубина буквы* x *в левой [правой] части тождества* β_k *равна* $k+1$ *[соответственно* ∞*].*

2) k*-разложение слова* $\mathbf{u}$ *имеет вид, указанный в табл. 2.*

Таблица 2: k-разложения некоторых слов

	k-разложение	
	левая часть	правая часть
α_k	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot y_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k y_k}$ $\cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k y_k}$ $\cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$
β_k	$\lambda \cdot \underline{x} \cdot x_k \cdot \underline{x} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2}$ $\cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{x^2} \cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2}$ $\cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$
γ_k	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_1 \cdot \underline{\lambda} \cdot y_0 \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{y_1} \cdot x_{k-1}$ $\cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_1 \cdot \underline{\lambda} \cdot y_0 \cdot \underline{y_1} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1}$ $\cdot \underline{x_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$
δ_k^m, $m < k$	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_{m+1} \cdot \underline{\lambda} \cdot y_m \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{y_{m+1}}$ $\cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdots x_{m-1} \cdot \underline{x_m y_m} \cdot x_{m-2}$ $\cdot \underline{x_{m-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$	$\lambda \cdot \underline{\lambda} \cdot y_{m+1} \cdot \underline{\lambda} \cdot y_m \cdot \underline{y_{m+1}} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda}$ $\cdot x_{k-1} \cdot \underline{x_k} \cdots x_{m-1} \cdot \underline{x_m y_m} \cdot x_{m-2}$ $\cdot \underline{x_{m-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0 \cdot \underline{x_1}$
δ_k^k	$\lambda \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot y_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_k \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot x_{k-1}$ $\cdot \underline{x_k y_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0$ $\cdot \underline{x_1}$	$\lambda \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot y_k \cdot \underline{y_{k+1}} \cdot x_k \cdot \underline{\lambda} \cdot x_{k-1}$ $\cdot \underline{x_k y_k} \cdot x_{k-2} \cdot \underline{x_{k-1}} \cdots x_1 \cdot \underline{x_2} \cdot x_0$ $\cdot \underline{x_1}$

Доказательство. Как и в примере 1.22, в табл. 2 мы подчеркиваем k-блоки слов, чтобы отличать их от k-разделителей.

Мы позволим себе проверить оба утверждения леммы только для левой части тождества α_k. Во всех остальных случаях доказательство аналогично. Обозначим левую часть тождества α_k через $\mathbf{u}_k$. Тогда

$$\mathbf{u}_k = x_k y_k x_{k-1} x_k y_k x_{k-2} x_{k-1} x_{k-3} x_{k-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1.$$

1) Буква x_0 является простой в $\mathbf{u}_k$, откуда $D(\mathbf{u}_k, x_0) = 0$. Все остальные буквы из $\mathrm{con}(\mathbf{u}_k)$ входят в $\mathbf{u}_k$ ровно два раза. В частности, они являются кратными в $\mathbf{u}_k$. Поэтому они имеют ненулевую глубину в $\mathbf{u}_k$. Первое вхождение x_1 в $\mathbf{u}_k$ не предшествует никакой простой букве. Следовательно, $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_1) = \lambda$. Второму же вхождению x_1 в $\mathbf{u}_k$ предшествует единственная простая в $\mathbf{u}_k$ буква, а именно буква x_0. Следовательно, $h_2^0(\mathbf{u}_k, x_1) = x_0$. Мы видим, что $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_1) \neq h_2^0(\mathbf{u}_k, x_1)$, откуда следует, что $D(\mathbf{u}_k, x_1) = 1$.

Как первому, так и второму вхождению буквы x_2 в слово $\mathbf{u}_k$ не предшествует никакая простая в этом слове буква. Это означает, что $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_2) = h_2^0(\mathbf{u}_k, x_2) = \lambda$. Следовательно, $D(\mathbf{u}_k, x_2) > 1$. Второму вхождению x_2 в $\mathbf{u}_k$ предшествует первое вхождение x_1, и между этими вхождениями букв x_1 и x_2 нет никаких других букв. Кроме того, $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_1) \neq h_2^0(\mathbf{u}_k, x_1)$. Следовательно, $h_2^1(\mathbf{u}_k, x_2) = x_1$. С другой стороны, $h_1^1(\mathbf{u}_k, x_2) \neq x_1$, поскольку первое вхождение x_2 в слово $\mathbf{u}_k$ предшествует всем вхождениям x_1 в это слово. Таким образом, $h_1^1(\mathbf{u}_k, x_2) \neq h_2^1(\mathbf{u}_k, x_2)$, откуда $D(\mathbf{u}_k, x_2) = 2$.

Для упрощения дальнейших рассуждений нам потребуется новое обозначение. Для произвольной буквы $a \in \mathrm{mul}(\mathbf{u}_k)$ обозначим через $\mathbf{u}_k[a; 1, 2]$ подслово слова $\mathbf{u}_k$, расположенное между первым и вторым вхождениями a в $\mathbf{u}_k$. Например, $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2] = y_k x_{k-1}$, $\mathbf{u}_k[y_k; 1, 2] = x_{k-1} x_k$, а $\mathbf{u}_k[x_1; 1, 2] = x_2 x_0$. Пусть теперь $2 < r < k$. Предположим, что мы доказали равенство $D(\mathbf{u}_k, x_i) = i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, r-1$. Проверим, что $D(\mathbf{u}_k, x_r) = r$. Предположим, что $D(\mathbf{u}_k, x_r) = s < r$. Тогда $h_1^{s-1}(\mathbf{u}_k, x_r) \neq h_2^{s-1}(\mathbf{u}_k, x_r)$. Следовательно, найдется такая буква z, что $h_1^{s-2}(\mathbf{u}_k, z) \neq h_2^{s-2}(\mathbf{u}_k, z)$ и ее первое вхождение в $\mathbf{u}_k$ лежит в $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2]$. Однако $\mathbf{u}_k[x_{k-1}; 1, 2] = x_k y_k x_{k-2}$ и если $r < k-1$, то $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2] = x_{r+1} x_{r-1}$. Мы видим, что в любом случае единственной буквой, чье первое вхождение в слово $\mathbf{u}_k$ лежит в подслове $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2]$, является буква x_{r-1}. В силу нашего предположения, $D(\mathbf{u}_k, x_{r-1}) = r-1$. Поскольку $s-2 < r-2$, из последнего равенства следует, что $h_1^{s-2}(\mathbf{u}_k, x_{r-1}) = h_2^{s-2}(\mathbf{u}_k, x_{r-1})$. Итак, мы доказали, что буквы z с указанными свойствами не существует. Поэтому $D(\mathbf{u}_k, x_r) \geq r$. Предположим, что $D(\mathbf{u}_k, x_r) = t > r$. Тогда $h_1^{r-1}(\mathbf{u}_k, x_r) = h_2^{r-1}(\mathbf{u}_k, x_r)$. Следовательно, не существует буквы z глубины $r-1$, первое вхождение которой в слово $\mathbf{u}_k$ лежит в подслове $\mathbf{u}_k[x_r; 1, 2]$. Но из нашего предположения следует, что буква x_{r-1} обладает этими свойствами. Следовательно, $D(\mathbf{u}_k, x_r) = r$.

Используя рассуждения, совершенно аналогичные рассуждениям из предыдущего абзаца, можно установить, что $D(\mathbf{u}_k, y_k) = k$. Нужно только принять во внимание доказанное выше равенство $D(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) = k-1$ и тот факт, что единственной буквой, чье первое вхождение в слово $\mathbf{u}_k$ лежит в подслове $\mathbf{u}[y_k; 1, 2]$, является буква x_{k-1}.

Нам осталось проверить равенство $D(\mathbf{u}_k, x_k) = k$. Заметим, что как первому, так и второму вхождению x_k в $\mathbf{u}_k$ не предшествует никакая простая буква, откуда $h_1^0(\mathbf{u}_k, x_k) = h_2^0(\mathbf{u}_k, x_k) = \lambda$. Предположим, что $h_1^i(\mathbf{u}_k, x_k) \neq h_2^i(\mathbf{u}_k, x_k)$ для некоторго $0 < i < k-1$. Тогда существует буква z такая, что $h_1^{i-1}(\mathbf{u}_k, z) \neq h_2^{i-1}(\mathbf{u}_k, z)$ и первое вхождение z в $\mathbf{u}_k$ лежит в $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2]$. В частности, $D(\mathbf{u}_k, z) \leq i < k-1$. Ясно, что $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2] = y_k x_{k-1}$ и вхождения букв y_k и x_{k-1} в подслово $\mathbf{u}_k[x_k; 1, 2]$ являются первыми вхождениями этих букв в слово $\mathbf{u}_k$. Как мы показали выше, $D(\mathbf{u}_k, y_k), D(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) \geq k-1$, что противоречит выбору буквы z. Следовательно, $h_1^i(\mathbf{u}_k, x_k) = h_2^i(\mathbf{u}_k, x_k)$ для всех $0 \leq i < k-1$. Теперь проверим, что $h_1^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k)$. Выше мы показали, что $D(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) = k-1$ и $D(\mathbf{u}_k, y_k) = k$. Поэтому $h_1^{k-2}(\mathbf{u}_k, x_{k-1}) \neq h_2^{k-2}(\mathbf{u}_k, x_{k-1})$ и $h_1^{k-2}(\mathbf{u}_k, y_k) = h_2^{k-2}(\mathbf{u}_k, y_k)$. Следовательно, $h_2^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k) = x_{k-1}$. С другой стороны, первому вхождению x_k в $\mathbf{u}_k$ не предшествует никакая буква, откуда $h_1^{k-1}(\mathbf{u}_k, x_k) = \lambda$. Мы видим, что $h_1^k(\mathbf{u}_k, x_k) \neq h_2^k(\mathbf{u}_k, x_k)$. Таким образом, $D(\mathbf{u}_k, x_k) = k$.

2) По лемме 1.26, k-разделителями слова $\mathbf{w}$ являются в точности первые вхождения всех букв $x \in \operatorname{con}(\mathbf{w})$ глубины $\le k$ и пустое слово в начале слова $\mathbf{w}$. Как мы доказали выше, $D(\mathbf{u}_k, x) \le k$ для любой буквы $x \in \operatorname{con}(\mathbf{u}_k)$. Следовательно, k-разделителями слова $\mathbf{u}_k$ являются в точности первые вхождения всех букв из $\operatorname{con}(\mathbf{u}_k)$ и пустое слово в начале слова $\mathbf{u}_k$. Все подслова слова $\mathbf{u}_k$ между этими k-разделителями и только они являются k-блоками слова $\mathbf{u}_k$. Следовательно, k-разложение слова $\mathbf{u}_k$ имеет вид, указанный в табл. 2. $\square$

Заметим, что утверждение 1) леммы 3.19 объясняет выбор индексов букв в тождествах α_k, β_k, γ_k и δ_k^m.

Следующее утверждение, доказательству которого посвящена вся оставшаяся часть данного подраздела, можно назвать «ядром» доказательства теоремы 3.1. Суть этой леммы состоит в том, что, при выполнении некоторых дополнительных ограничений, многообразия $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{I}_k$ и $\mathbf{J}_k^m$ удовлетворяют всякому тождеству, правая часть которого получена из левой перестановкой местами двух соседних букв, входящих в один и тот же $(k-1)$-блок.

Лемма 3.20. *Пусть $\mathbf{V}$ — такое многообразие моноидов, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$, $\mathbf{u}$ — слово, а k — натуральное число. Пусть, кроме того, $\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{u}''$, где $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{u}''$ — (возможно пустые) слова, а ab — подслово некоторого $(k-1)$-блока слова $\mathbf{u}$. Предположим, что выполнено одно из следующих утверждений:*

(i) *$\mathbf{V}$ удовлетворяет δ_k^m, $a \in \operatorname{con}(\mathbf{u}')$ и $D(\mathbf{u}, a) > m$;*

(ii) *$\mathbf{V}$ удовлетворяет γ_k и $a \in \operatorname{con}(\mathbf{u}')$;*

(iii) *$\mathbf{V}$ удовлетворяет β_k и $D(\mathbf{u}, a) \ne D(\mathbf{u}, b)$;*

(iv) *$\mathbf{V}$ удовлетворяет α_k.*

Тогда $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Доказательство. Мы будем доказывать пп. (i)–(iv) одновременно. Предположим, что многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию одного из этих четырех утверждений. В этом случае $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству δ_k^k. Пусть (1.7) — $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$, а ab — подслово слова $\mathbf{u}_i$ для некоторого $0 \le i \le m$. Тогда $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i'ab\mathbf{u}_i''$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_i'$ и $\mathbf{u}_i''$. Ясно, что $\mathbf{u}' = t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1 \cdots t_i\mathbf{u}_i'$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{u}_i''t_{i+1}\mathbf{u}_{i+1} \cdots t_m\mathbf{u}_m$.

Если $a, b \in \operatorname{con}(\mathbf{u}')$, то

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' \stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{u}'a^2b^2\mathbf{u}'' \stackrel{(3.4)}{\approx} \mathbf{u}'b^2a^2\mathbf{u}'' \stackrel{(3.9)}{\approx} \mathbf{u}'ba\mathbf{u}'',$$

что и требовалось доказать. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что

$$b \notin \operatorname{con}(\mathbf{u}'). \tag{3.30}$$

Если $D(\mathbf{u}, b) \le k-1$, то, по лемме 1.26, b является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Но это невозможно, поскольку первое вхождение b в $\mathbf{u}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$. Следовательно, $D(\mathbf{u}, b) \ge k$. Далее, если $a \in \operatorname{mul}(\mathbf{u}')$, то из леммы 3.16(ii) следует, что в $\mathbf{V}$ выполнены тождества $\mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'b\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$. Таким образом, мы можем считать, что

$$\text{если } a \in \operatorname{con}(\mathbf{u}'), \text{ то } a \in \operatorname{sim}(\mathbf{u}'). \tag{3.31}$$

Дальнейшие рассуждения делятся на три случая в зависимости от глубины буквы b в слове $\mathbf{u}$: $D(\mathbf{u}, b) = k$, $k < D(\mathbf{u}, b) < \infty$ и $D(\mathbf{u}, b) = \infty$. Каждый из этих случаев делится на подслучаи, соответствующие утверждениям (i)–(iv). Таким образом, доказательство каждого из утверждений (i)–(iv) будет завершено после рассмотрения соответствующего подслучая случая 3.

Случай 1: $D(\mathbf{u}, b) = k$. Это случай является наиболее сложным с технической точки зрения. При рассмотрении двух других случаев, мы будем неоднократно ссылаться на свойства, проверенные здесь. Пусть $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ — одно из тождеств α_k, β_k, γ_k или δ_k^m. В некотором смысле тождество $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ «выглядит» как тождество $\mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$. Мы имеем в виду, что слова $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ начинаются с одного и того же префикса (который является пустым у тождеств α_k и β_k) и заканчиваются одним и тем же суффиксом, а подслово между этим префиксом и этим суффиксом в $\mathbf{p}$ является произведением двух букв, а в $\mathbf{q}$ — произведением этих же букв в обратном порядке. Это, в принципе, позволяет применять тождество $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$ к одной из сторон тождества $\mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$, чтобы получить другую его сторону. Для того, чтобы мы получили такую возможность, нам нужно, используя тождества, выполненные в $\mathbf{K}$, привести, скажем, правую сторону тождества $\mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$ к такому виду, к которому может быть применено тождество $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$. Для этого нам сначала нужно найти «внутри» слова $\mathbf{u}$ буквы $x_0, x_1, \dots, x_k$, которые встречались бы в этом слове в том же порядке, что и в правой части тождества $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$.

Положим $x_k = b$. Пусть X_{k-1} — множество всех $(k-1)$-разделителей z слова $\mathbf{u}$ таких, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_k)$. Из того, что $D(\mathbf{u}, x_k) = k$ следует, что $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, x_k) \ne h_2^{k-1}(\mathbf{u}, x_k)$, откуда вытекает, что $h_2^{k-1}(\mathbf{u}, x_k) \in X_{k-1}$. Таким образом, множество X_{k-1} не пусто. Применим лемму 1.28(ii) и получим, что $D(\mathbf{u}, z) = k-1$ и $\ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$ для любого $z \in X_{k-1}$. Обозначим теперь через x_{k-1} такую букву из X_{k-1}, что $\ell_2(\mathbf{u}, z) \le \ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1})$ для любого $z \in X_{k-1}$.

Пусть X_{k-2} — множество всех таких $(k-2)$-разделителей z слова $\mathbf{u}$, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1})$. Из того, что $D(\mathbf{u}, x_{k-1}) = k-1$ вытекает, что $h_1^{k-2}(\mathbf{u}, x_{k-1}) \ne h_2^{k-2}(\mathbf{u}, x_{k-1})$, откуда следует, что $h_2^{k-2}(\mathbf{u}, x_{k-1}) \in X_{k-2}$. Таким образом, множество X_{k-2} не пусто. Применим лемму 1.28(ii) и получим, что $D(\mathbf{u}, z) = k-2$ и $\ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$ для любого $z \in X_{k-2}$. Обозначим теперь через x_{k-2} такую букву из X_{k-2}, что $\ell_2(\mathbf{u}, z) \le \ell_2(\mathbf{u}, x_{k-2})$ для любого $z \in X_{k-2}$. Поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-2})$, из леммы 1.32 вытекает, что $\ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-2})$.

Далее, для всех $s = k-3, k-4, \dots, 1$ определим последовательно множество X_s и букву x_s следующим образом: X_s — множество всех таких s-разделителей z слова $\mathbf{u}$, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_{s+1}) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s+1})$, а x_s — такая буква из X_s, что $\ell_2(\mathbf{u}, z) \le \ell_2(\mathbf{u}, x_s)$ для любого $z \in X_s$. Как и в предыдущем абзаце мы можем проверить, что множество X_s не пусто, $D(\mathbf{u}, x_s) = s$, $\ell_j(\mathbf{u}, x_{s+1}) < \ell_j(\mathbf{u}, x_s)$ для любого $j = 1, 2$ и $\ell_2(\mathbf{u}, x_{s+2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$.

Наконец, положим $x_0 = h_2^0(\mathbf{u}, x_1)$. Ввиду леммы 1.28, $D(\mathbf{u}, x_0) = 0$ и $\ell_1(\mathbf{u}, x_1) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$. Поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_1)$, из леммы 1.32 следует, что $\ell_2(\mathbf{u}, x_2) < \ell_1(\mathbf{u}, x_0)$. Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 \qquad (3.32)$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}$. Проверим, что если $2 \le s \le k$, то

$$\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-1}) \text{ для любого } z \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1}). \qquad (3.33)$$

Положим

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{u}' ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_{2s+2}x_s\mathbf{v}_{2s+1}x_{s+1}.$$

Слово $\mathbf{w}_s$ является префиксом слова $\mathbf{u}$, непосредственно предшествующим слову $\mathbf{v}_{2s}$, а слово $\mathbf{v}_{2s-1}$ предшествует второму вхождению x_{s-1} в $\mathbf{u}$. Из сказанного вытекает требуемое заключение в случае, когда $z \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_s)$. Предположим теперь, что $z \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}_s)$. Тогда $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_s)$. Если z является $(s-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$, то $z \in X_{s-1}$, откуда, в силу выбора буквы x_{s-1}, имеем, что $\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-1})$. В противном случае из леммы 1.26 следует, что $D(\mathbf{u}, z) > s-1$. Поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$, из леммы 1.32 вытекает, что $\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$. Тогда $\ell_2(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{s-1})$.

Дальнейшая реализация плана, изложенного в начале случая 1, зависит от вида тождества $\mathbf{p} \approx \mathbf{q}$. Поэтому наши рассуждения делятся на четыре подслучая.

Подслучай 1.1: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (i), т.е. δ_k^m выполнено в $\mathbf{V}$, $a \in \mathrm{con}(\mathbf{u}')$ и $D(\mathbf{u}, a) > m$. В силу утверждения (3.31), $a \in \mathrm{sim}(\mathbf{u}')$. Тогда $\mathbf{u}' = \mathbf{w}a\mathbf{v}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$. Из этого следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = {} & \mathbf{w}a\mathbf{v}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots \\ & \cdot\, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.\end{aligned} \qquad (3.34)$$

Положим $D(\mathbf{u}, a) = r$. Дальнейшие рассуждения делятся на две части, соответствующие случаям $r \le k+1$ и $r > k+1$.

A) $r \le k+1$. Здесь нам нужно определить еще две буквы, а именно y_{r-1} и y_{r-2}, а также уточнить расположение этих букв внутри слова $\mathbf{u}$. Пусть Y_{r-1} — множество всех $(r-1)$-разделителей z слова $\mathbf{u}$ таких, что $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, z) < \ell_2(\mathbf{u}, a)$. Из того, что $D(\mathbf{u}, a) = r$ следует, что $h_1^{r-1}(\mathbf{u}, a) \ne h_2^{r-1}(\mathbf{u}, a)$, откуда $h_2^{r-1}(\mathbf{u}, a) \in Y_{r-1}$. Следовательно, множество Y_{r-1} не пусто. Из леммы 1.28(ii) вытекает, что $D(\mathbf{u}, z) = r-1$ и $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$ для любого $z \in Y_{r-1}$. Тогда $\ell_1(\mathbf{u}, b) < \ell_2(\mathbf{u}, z)$ для любого $z \in Y_{r-1}$. Обозначим теперь через y_{r-1} такую букву из Y_{r-1}, что $\ell_2(\mathbf{u}, z) \le \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$ для любого $z \in Y_{r-1}$.

Докажем некоторые дополнительные свойства буквы x_r, которые выполняются при определенных ограничениях на r. Предположим, что $r < k+1$. Докажем, что

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_r) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}). \qquad (3.35)$$

Положим $y_{r-2} = h_2^{r-2}(\mathbf{u}, y_{r-1})$. Поскольку $D(\mathbf{u}, y_{r-1}) = r-1$, из леммы 1.28 следует, что $D(\mathbf{u}, y_{r-2}) = r-2$ и $\ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Напомним, что $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1})$, откуда $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Поскольку $D(\mathbf{u}, a) = r$, мы можем применить лемму 1.32 и получить, что $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Второе вхождение a в $\mathbf{u}$ непосредственно предшествует первому вхождению $b = x_k$, откуда $\ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Тогда из леммы 1.32 следует, что $\ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Из сказанного вытекает, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Если $k-1 \geq r$, то, по лемме 1.32, $\ell_2(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим, что $\ell_2(\mathbf{u}, x_r) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-2})$. В силу выбора буквы y_{r-2}, первое вхождение этой буквы в $\mathbf{u}$ предшествует второму вхождению y_{r-1}. Поэтому $\ell_2(\mathbf{u}, x_r) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$. Итак, мы доказали, что если $r < k+1$, то выполняется утверждение (3.35).

Пусть теперь $r > 2$. Заметим, что

$$\ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b) = \ell_1(\mathbf{u}, x_k) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \cdots < \ell_1(\mathbf{u}, x_{r-3}).$$

Если $\ell_1(\mathbf{u}, x_{r-3}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$, то буква x_{r-3} лежит между первым и вторым вхождениями y_{r-1} в $\mathbf{u}$. Поскольку x_{r-3} является $(r-3)$-разделителем слова $\mathbf{u}$, мы получаем противоречие с равенством $D(\mathbf{u}, y_{r-1}) = r-1$. Следовательно, если $r > 2$, то

$$\ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{r-3}). \tag{3.36}$$

Вернемся к произвольному $r \leq k+1$. Это ограничение на r гарантирует, что буквы x_{r-2} и x_{r-1} определены. Существует три возможности для второго вхождения y_{r-1} в $\mathbf{u}$:

$$\ell_1(\mathbf{u}, x_{r-2}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{r-1}); \tag{3.37}$$

$$\ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{r-2}); \tag{3.38}$$

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1}). \tag{3.39}$$

Равенство (3.34) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \quad & \mathbf{w}a\mathbf{v}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_{2r}\overset{(1)}{x_{r-1}} \\ & \cdot\mathbf{v}_{2r-1}\overset{(2)}{x_r}\mathbf{v}_{2r-2}\overset{(1)}{x_{r-2}}\mathbf{v}_{2r-3}\overset{(2)}{x_{r-1}}\mathbf{v}_{2r-4}\overset{(1)}{x_{r-3}}\mathbf{v}_{2r-5}\overset{(2)}{x_{r-2}}\cdots \\ & \cdot\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Предположим, что выполнено утверждение (3.37). Тогда второе вхождение y_{r-1} в $\mathbf{u}$ принадлежит слову $\mathbf{v}_{2r-3}$, откуда $\mathbf{v}_{2r-3} = \mathbf{v}'_{2r-3}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-3}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}'_{2r-3}$ и $\mathbf{v}''_{2r-3}$. Далее, поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{r-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, a)$, первое вхождение y_{r-1} принадлежит $\mathbf{v}$. Следовательно, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}_{2k+2}$ и $\mathbf{v}_{2k+1}$.

Объединив сказанное выше, мы можем прояснить представление (3.34) слова $\mathbf{u}$ и записать это слово в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = {} & \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots \\ & \cdot\mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}'_{2r-3}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\cdots \\ & \cdot\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbf{u}' = \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$ и

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'' = {} & \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\\ & \cdot\mathbf{v}'_{2r-3}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Как и в доказательстве неравенства (3.33), можно проверить, что если $z \in \mathrm{con}(\mathbf{v}_{2k+2}\mathbf{v}_{2k+1})$, то $\ell_2(\mathbf{u}, z) \le \ell_2(\mathbf{u}, y_{r-1})$.

Теперь мы готовы начать процесс изменения слова $\mathbf{u}$, чтобы получить слово $\mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$. Но сначала мы укажем общую схему дальнейших рассуждений. Тождество (3.27), которое, согласно лемме 3.16(ii), выполнено в многообразии $\mathbf{K}$, позволяет нам добавить любую кратную в слове букву в любое место после второго вхождения этой буквы. Используя это, мы добавим разные буквы или даже слова в различных местах слова $\mathbf{u}$ (или слова, равного $\mathbf{u}$ в $\mathbf{V}$), чтобы дать возможность применить к этому слову тождество, которое выполняется в $\mathbf{V}$ в настоящий момент (сейчас таким тождеством является δ_k^m). После применения этого тождества мы запустим «обратный процесс», т.е., используя тождество (3.27), удалим лишние слова и буквы из полученного слова, чтобы получить слово $\mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Начнем реализацию приведенного только что плана. Сначала применим тождество (3.27) к слову $\mathbf{u}$ и вставим букву y_{r-1} после второго вхождения x_{r-1} в $\mathbf{u}$. Мы получим тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \approx {} & \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\\ & \cdot\mathbf{v}_{2r}\overset{(1)}{x_{r-1}}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}\overset{(2)}{x_{r-1}}y_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}\\ & \cdot x_{r-2}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Далее, применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.41) и заменим там третье вхождение y_{r-1} на $\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$, а второе вхождение x_{s-1} на $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ для всех $2 \le s \le k$. Мы получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{p}\mathbf{v}_0, \tag{3.42}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = {} & \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\mathbf{v}_{2k-4}\cdots\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}\\ & \cdot\mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}\mathbf{v}_{2r-6}\cdots\\ & \cdot\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Согласно условию, $r = D(\mathbf{u}, a) > m$. Тогда из леммы 3.18 следует, что тождество δ_k^{r-1} выполнено в $\mathbf{V}$. Выполним подстановку

$$(x_0, \dots, x_{k-1}, x_k, y_{r-1}, y_r) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, \mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}, a)$$

в это тождество и получим тождество

$$a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{p} \approx a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ba\mathbf{p}.$$

Данное тождество вместе с тождеством (3.42) влечет тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ba\mathbf{p}\mathbf{v}_0.$$

Применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении» и заменим подслово $\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}$ на y_{r-1}, а подслово $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ на x_{s-1} для любого $2 \le s \le k$. В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \approx{}& \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\\ &\cdot \mathbf{v}_{2r-3}x_{r-1}y_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-6}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Наконец, применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества и удалим третье вхождение буквы y_{r-1}. Мы получим тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \approx{}& \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\\ &\cdot \mathbf{v}'_{2r-3}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-6}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0\\ ={}& \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''.\end{aligned}$$

Предположим теперь, что выполняется одно из условий (3.38) или (3.39). Проверим, что в любом случае выполняется тождество (3.41). Этого достаточно, потому что тогда мы сможем завершить доказательство теми же рассуждениями, что и выше. Если выполнено условие (3.38), то из (3.35) и (3.40) следует, что слово $\mathbf{u}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{u} ={}& \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}y_{r-1}\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\\ &\cdot \mathbf{v}_{2r}\,\overset{(1)}{x}_{r-1}\,\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}'_{2r-2}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}\,\overset{(2)}{x}_{r-1}\,\mathbf{v}_{2r-4}x_{r-3}\mathbf{v}_{2r-5}\\ &\cdot x_{r-2}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0\end{aligned}$$

для некоторых слов $\mathbf{v}'_{2r-2}, \mathbf{v}''_{2r-2}$ таких, что $\mathbf{v}_{2r-2} = \mathbf{v}'_{2r-2}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-2}$. Тогда мы добавим еще одно вхождение буквы y_{r-1} сразу после второго вхождения x_{r-1}. В результате получим тождество (3.41). Наконец, если выполнено условие (3.39), то мы воспользуемся неравенством (3.36). Слово $\mathbf{u}$ в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{u} ={}& \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}\,\overset{(1)}{y}_{r-1}\,\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\\ &\cdot \mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}'_{2r-4}\,\overset{(2)}{y}_{r-1}\,\mathbf{v}''_{2r-4}\,\overset{(1)}{x}_{r-3}\,\mathbf{v}_{2r-5}x_{r-2}\cdots\\ &\cdot \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0\end{aligned}$$

для некоторых слов $\mathbf{v}'_{2r-4}, \mathbf{v}''_{2r-4}$ таких, что $\mathbf{v}_{2r-4} = \mathbf{v}'_{2r-4}y_{r-1}\mathbf{v}''_{2r-4}$. Тогда мы можем добавить третье вхождение буквы x_{r-1} непосредственно перед вторым вхождением y_{r-1} и получить тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \approx{}& \mathbf{w}a\mathbf{v}_{2k+2}\,\overset{(1)}{y}_{r-1}\,\mathbf{v}_{2k+1}ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\\ &\cdot \mathbf{v}_{2r}x_{r-1}\mathbf{v}_{2r-1}x_r\mathbf{v}_{2r-2}x_{r-2}\mathbf{v}_{2r-3}x_{r-1}\mathbf{v}'_{2r-4}x_{r-1}\,\overset{(2)}{y}_{r-1}\,\mathbf{v}''_{2r-4}\,\overset{(1)}{x}_{r-3}\,\mathbf{v}_{2r-5}\\ &\cdot x_{r-2}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Последнее тождество будет ничем иным, как тождеством (3.41) (с точностью до переименования слов).

Б) $r > k + 1$. Напомним, что выполняется равенство (3.34). Предположим, что слово $\mathbf{v}$ не является пустым, и рассмотрим букву $y \in \mathrm{con}(\mathbf{v})$.

Предположим, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y)$. Тогда $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, y) \neq h_2^{k-1}(\mathbf{u}, y)$, поскольку x_{k-1} является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Следовательно, y является k-разделителем слова $\mathbf{u}$. Но это невозможно, поскольку в этом случае первое вхождение буквы y в слово $\mathbf{u}$ находится между первым и вторым вхождениями a в это слово, а $D(\mathbf{u}, a) = r > k+1$. Следовательно, $\ell_2(\mathbf{u}, y) \le \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1})$ для всех $y \in \mathrm{con}(\mathbf{v})$. Тогда применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.34), а именно, вставим туда слово $\mathbf{v}$ после второго вхождения b. Ясно, что мы можем также формально вставить слово $\mathbf{v}$ после второго вхождения b, если $\mathbf{v} = \lambda$. Далее, ввиду условия (3.33), мы можем заменить второе вхождение x_{s-1} в правой части тождества (3.34) на слово $\mathbf{v}_{2s} x_{s-1} \mathbf{v}_{2s-1}$ для всех $2 \le s \le k$. Мы получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w} a \mathbf{v} a b \mathbf{p} \mathbf{v}_0, \tag{3.43}$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{p} = {} & \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} b \mathbf{v} \mathbf{v}_{2k-2} x_{k-2} \mathbf{v}_{2k-3} \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_6 x_2 \mathbf{v}_5 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Ввиду леммы 3.18, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству δ_k^k. Выполним подстановку

$$(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, y_k, y_{k+1}) \mapsto (\mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1}, b, \mathbf{v}, a)$$

в это тождество. Мы получим тождество $a \mathbf{v} a b \mathbf{p} \approx a \mathbf{v} b a \mathbf{p}$, которое вместе с тождеством (3.43) влечет тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{w} a \mathbf{v} b a \mathbf{p} \mathbf{v}_0$. Применим теперь тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении», а именно, удалим слово $\mathbf{v}$ после второго вхождения буквы b и заменим подслово $\mathbf{v}_{2s} x_{s-1} \mathbf{v}_{2s-1}$ на букву x_{s-1} для всех $2 \le s \le k$. В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u} & \approx \mathbf{w} a \mathbf{v} b a \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} b \mathbf{v}_{2k-2} x_{k-2} \mathbf{v}_{2k-3} x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0 \\ & = \mathbf{u}' b a \mathbf{u}''.\end{aligned}$$

Подслучай 1.2: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (ii), т.е. γ_k выполнено в $\mathbf{V}$ и $a \in \mathrm{con}(\mathbf{u}')$. Напомним, что справедливо равенство (3.32). Согласно условию (3.31), $a \in \mathrm{sim}(\mathbf{u}')$. Тогда, как и в случае 1.1, слово $\mathbf{u}$ имеет вид (3.34). Заметим, что $\mathbf{u}' = \mathbf{w} a \mathbf{v}$ и

$$\mathbf{u}'' = \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} b \mathbf{v}_{2k-2} x_{k-2} \mathbf{v}_{2k-3} x_{k-1} \cdots \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0.$$

Напомним также, что условие (3.33) справедливо для всех $2 \le s \le k$. Применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.34) и заменим второе вхождение x_{s-1} на слово $\mathbf{v}_{2s} x_{s-1} \mathbf{v}_{2s-1}$ для всех $2 \le s \le k$. Мы получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \approx {} & \mathbf{w} a \mathbf{v} a b \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} b \mathbf{v}_{2k-2} x_{k-2} \mathbf{v}_{2k-3} \mathbf{v}_{2k} x_{k-1} \mathbf{v}_{2k-1} \cdots \\ & \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_6 x_2 \mathbf{v}_5 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_0.\end{aligned}$$

Положим $\mathbf{p}_1 = a\mathbf{v}$ и

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots \\ \cdot\, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3.$$

Тогда последнее тождество будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}\mathbf{p}_1ab\mathbf{p}_2\mathbf{v}_0. \tag{3.44}$$

Согласно условию, $\mathbf{V}$ удовлетворяет γ_k. Выполним подстановку

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, y_0, y_1) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, \mathbf{v}, a)$$

в это тождество. Мы получим тождество $\mathbf{p}_1ba\mathbf{p}_2 \approx \mathbf{p}_1ab\mathbf{p}_2$. Из последнего тождества вместе с тождеством (3.44) вытекает тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{w}\mathbf{p}_1ba\mathbf{p}_2\mathbf{v}_0$, т.е. тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots \\ \cdot\, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_0.$$

Наконец, применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении» и заменим подслово $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ на x_{s-1} для всех $2 \le s \le k$. В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}a\mathbf{v}ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0,$$

т.е. тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Подслучай 1.3: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (iii), т.е. β_k выполнено в $\mathbf{V}$ и $D(\mathbf{u}, a) \ne D(\mathbf{u}, b)$. Подслучай 1.2 позволяет нам предположить, что $a \notin \operatorname{con}(\mathbf{u}')$. Из этого факта и условия (3.30) немедленно следует, что $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b)$. Если $D(\mathbf{u}, a) \le k-1$, то, по лемме 1.26, a является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Но это не так. Следовательно, $D(\mathbf{u}, a) \ge k$. Поскольку $D(\mathbf{u}, b) \ne D(\mathbf{u}, a)$ и $D(\mathbf{u}, b) = k$, мы имеем, что $D(\mathbf{u}, a) > k$.

Заметим, что $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-1})$, поскольку $h_1^{k-1}(\mathbf{u}, a) = h_2^{k-1}(\mathbf{u}, a)$ и x_{k-1} является $(k-1)$-разделителем. Напомним, что имеет место равенство (3.32). Тогда $\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{v}'_{2k}a\mathbf{v}''_{2k}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{v}'_{2k}, \mathbf{v}''_{2k}$. Следовательно,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{v}'_{2k}a\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Проверим, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'aba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \tag{3.45}$$

Это утверждение очевидно, когда $\mathbf{v}'_{2k} = \lambda$. Предположим, что $\mathbf{v}'_{2k} = \mathbf{v}^*d$ для некоторого (возможно пустого) слова $\mathbf{v}^*$ и некоторой буквы d. Тогда слово $\mathbf{u}$ можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}'\overset{(1)}{a}b\mathbf{v}^*d\overset{(2)}{a}\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots \\ \cdot\, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Заметим, что подслово da, расположенное между $\mathbf{v}^*$ и $\mathbf{v}''_{2k}$, лежит в некотором $(k-1)$-блоке слова $\mathbf{u}$. Действительно, вхождение буквы d в это подслово не является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$, потому что в противном случае первое и второе вхождения буквы a в слово $\mathbf{u}$ окажутся в различных $(k-1)$-блоках, что невозможно в силу неравенства $D(\mathbf{u}, a) > k$. Вхождение же буквы a в подслово da не является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$, поскольку это вхождение не является первым вхождением a в $\mathbf{u}$.

По лемме 3.18, многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству γ_k. Тогда в силу утверждения, доказанного в подслучае 1.2, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{v}^*ad\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Действуя аналогичным образом, мы можем последовательно поменять букву a со всеми буквами слова $\mathbf{v}'_{2k}$ и получить, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'aba\mathbf{v}'_{2k}\mathbf{v}''_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Теперь применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества, вставив букву a после слова $\mathbf{v}'_{2k}$. Мы получим тождество (3.45).

Напомним, что справедливо утверждение (3.33) для всех $2 \le s \le k$. Теперь мы можем применить тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.45) и заменить второе вхождение x_{s-1} на слово $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ для всех $2 \le s \le k$. Мы получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'aba\mathbf{p}\mathbf{v}_0, \tag{3.46}$$

где

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots \\ \cdot\ \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3.$$

Теперь выполним подстановку

$$(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, b, a)$$

в тождество β_k. Мы получим тождество $aba\mathbf{p} \approx ba^2\mathbf{p}$, которое затем применим к тождеству (3.46). В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba^2\mathbf{p}\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}'ba^2\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots \\ \cdot\ \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_0,$$

выполненное в $\mathbf{V}$. Теперь применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества «в обратном направлении» и заменим подслово $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ на x_{s-1} для всех $2 \le s \le k$. В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba^2\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Повторяя рассуждения, использованные выше при выводе тождества (3.45), мы получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots \\ \cdot\ \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0 = \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''.$$

Подслучай 1.4: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (iv), т.е. α_k выполнено в $\mathbf{V}$. В силу подслучаев 1.2 и 1.3, а также условия (3.30), мы можем предполагать, что $a, b \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}')$ и $D(\mathbf{u}, b) = D(\mathbf{u}, a)$. Напомним также, что справедливо равенство (3.32).

Заметим, что $\ell_2(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{k-2})$, потому что $h_1^{k-2}(\mathbf{u}, a) = h_2^{k-2}(\mathbf{u}, a)$ и x_{k-2} является $(k-2)$-разделителем. Следовательно, найдутся такие слова $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}''$, что выполняется одно из равенств

$$\mathbf{v}_{2k} = \mathbf{v}'a\mathbf{v}'',\ \mathbf{v}_{2k-1} = \mathbf{v}'a\mathbf{v}'' \text{ и } \mathbf{v}_{2k-2} = \mathbf{v}'a\mathbf{v}''.$$

Тогда имеет место одно из следующих равенств:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{v}'a\mathbf{v}''x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0,\\
&\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}'a\mathbf{v}''b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0,\\
&\mathbf{u} = \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}'a\mathbf{v}''x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.
\end{aligned}$$

Мы рассмотрим только первый случай, два других рассматриваются аналогично. Поскольку многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству (3.27), это многообразие удовлетворяет также тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}ab\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0. \tag{3.47}$$

Напомним, что для любого $2 \le s \le k$ выполнено условие (3.33). Поэтому применим тождество (3.27) достаточное число раз к правой части тождества (3.47) и заменим второе вхождение x_{s-1} на слово $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ для всех $2 \le s \le k$. Мы получим, что $\mathbf{V}$удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{p}\mathbf{v}_0, \tag{3.48}$$

где

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} = \mathbf{v}_{2k}&x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}ab\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}\cdots\\
&\cdot\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3\mathbf{v}_6x_2\mathbf{v}_5\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3.
\end{aligned}$$

Теперь выполним подстановку

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, y_k) \mapsto (\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}, a, b)$$

в тождество α_k. Мы получим тождество $ab\mathbf{p} \approx ba\mathbf{p}$, применив которое к тождеству (3.48), мы выведем тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{p}\mathbf{v}_0$. Теперь применим тождество (3.27) «в обратном направлении» к правой части последнего тождества и заменим подслово $\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}$ на x_{s-1} для всех $2 \le s \le k$. В результате мы получим тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{v}_{2k}x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}ab\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0.$$

Снова применим тождество (3.27) к правой части последнего тождества и удалим вхождение a, расположенное между $\mathbf{v}_{2k-1}$ и вторым вхождением b. В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\approx \mathbf{u}'ba\mathbf{v}'a\mathbf{v}''x_{k-1}\mathbf{v}_{2k-1}b\mathbf{v}_{2k-2}x_{k-2}\mathbf{v}_{2k-3}x_{k-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0\\
&= \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''.
\end{aligned}$$

Случай 2: $k < D(\mathbf{u}, b) < \infty$. Положим $D(\mathbf{u}, b) = r$. Дальнейшие рассуждения делятся на три подслучая.

Подслучай 2.1: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (i) или п. (ii). Тогда $a \in \mathrm{con}(\mathbf{u}')$. Следовательно, вхождение буквы a в подслово ab слова $\mathbf{u}$ не является первым вхождением a в $\mathbf{u}$. Поэтому данное вхождение a в $\mathbf{u}$ не может быть $(r-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Из леммы 1.26 и равенства $D(\mathbf{u}, b) = r$ вытекает, что вхождение b подслово ab слова $\mathbf{u}$ также не является $(r-1)$-разделителем $\mathbf{u}$. Поэтому указанное подслово содержится в некотором $(r-1)$-блоке слова $\mathbf{u}$.

Пусть

$$s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_n\mathbf{w}_n \tag{3.49}$$

является $(r-1)$-разложением слова $\mathbf{u}$. Тогда найдется такое $0 \le j \le n$, что $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab\mathbf{w}''_j$. Отсюда $\mathbf{u}' = s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j\mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n\mathbf{w}_n$. По лемме 3.18, $\mathbf{J}_k^m \subseteq \mathbf{J}_r^m$ и $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{I}_r$. Теперь мы можем применить утверждения, доказанные в подслучаях 1.1 и 1.2, и получить, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Подслучай 2.2: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (iii), т.е. β_k выполнено в $\mathbf{V}$ и $D(\mathbf{u}, a) \ne D(\mathbf{u}, b)$. Учитывая подслучай 2.1, мы можем считать, что $a \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}')$.

Предположим, что $D(\mathbf{u}, a) = s < r$. Если $s \le k-1$, то, по лемме 1.26, a является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Но это невозможно, поскольку первое вхождение a в $\mathbf{u}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$. Следовательно, $s \ge k$. Пусть (3.49) — $(s-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$. Тогда существует такое число $0 \le j \le n$, что $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab\mathbf{w}''_j$, $\mathbf{u}' = s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j\mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n\mathbf{w}_n$. Положим $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$. Поскольку $a, b \notin \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, $(s-1)$-разложение слова $\mathbf{u}^*$ имеет вид $s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j\mathbf{w}^*_j \cdots s_n\mathbf{w}_n$, где $\mathbf{w}^*_j = \mathbf{w}'_j ba\mathbf{w}''_j$. Тогда выполняются условия (1.1) и (1.9) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}^*$ и $\ell = s$. В силу леммы 1.31, $D(\mathbf{u}^*, a) = s$. Кроме того, по лемме 3.18, многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству β_s. Тогда из утверждения, доказанного в подслучае 1.3, следует, что в $\mathbf{V}$ выполнены тождества $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}'ba\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' = \mathbf{u}$.

Предположим теперь, что $D(\mathbf{u}, a) > r$. Пусть (3.49) — $(r-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$. Тогда существует такое число $0 \le j \le n$, что $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab\mathbf{w}''_j$. Отсюда $\mathbf{u}' = s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j\mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n\mathbf{w}_n$. По лемме 3.18, $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{H}_r$. Тогда применим утверждение, доказанное в подслучае 1.3, и получим, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Подслучай 2.3: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (iv), т.е. α_k выполнено в $\mathbf{V}$. Учитывая подслучай 2.2, мы можем считать, что $D(\mathbf{u}, a) = D(\mathbf{u}, b)$. Положим $D(\mathbf{u}, a) = r$. Тогда подслово ab слова $\mathbf{u}$, указанное в формулировке леммы, лежит в некотором $(r-1)$-блоке слова $\mathbf{u}$. Пусть (3.49) — $(r-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$. Тогда существует такое число $0 \le j \le n$, что $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab\mathbf{w}''_j$. Отсюда $\mathbf{u}' = s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j\mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n\mathbf{w}_n$. Поскольку, в силу леммы 3.18, $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{F}_r$, из утверждения, доказанного в подслучае 1.4, следует, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Случай 3: $D(\mathbf{u}, b) = \infty$. Этот случай, как и предыдущий, делится на три подслучая.

Подслучай 3.1: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (i) или п. (ii). Пусть s — неотрицательное число. Повторяя дословно рассуждения подслучая 2.1, мы можем получить, что подслово ab слова $\mathbf{u}$, указанное в формулировке леммы, лежит в некотором s-блоке слова $\mathbf{u}$. В силу замечания 1.21, существует такое число $r \geq k$, что (3.49) является ℓ-разложением слова $\mathbf{u}$ для любого $\ell \geq r$. Тогда ab является подсловом слова $\mathbf{w}_j$ для некоторого $0 \leq j \leq n$. Это означает, что $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{w}''_j$. Тогда $\mathbf{u}' = s_0\mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$. Докажем, что

$$\mathrm{occ}_z(\mathbf{w}_j) \geq 2 \tag{3.50}$$

для любой буквы $z \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_j)$. Предположим сначала, что $s_j = h_1^r(\mathbf{u}, z)$ и $\mathrm{occ}_z(\mathbf{w}_j) = 1$. Если $\mathrm{occ}_z(\mathbf{u}) = 1$, то z является 0-разделителем слова $\mathbf{u}$. Тогда из леммы 1.24(i) следует, что $z \in \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, что невозможно. Следовательно, $\mathrm{occ}_z(\mathbf{u}) \geq 2$. Поскольку $\mathrm{occ}_z(\mathbf{w}_j) = 1$, мы имеем, что $s_j \neq h_2^r(\mathbf{u}, z)$. Это означает, что $D(\mathbf{u}, z) \leq r + 1$. По лемме 1.26, z является $(r+1)$-разделителем слова $\mathbf{u}$. Получаем противоречие с тем, что (3.49) является $(r+1)$-разложением слова $\mathbf{u}$. Таким образом, если $s_j = h_1^r(\mathbf{u}, z)$, то справедливо условие (3.50). Предположим теперь, что $s_j \neq h_1^r(\mathbf{u}, z)$. Тогда $(1, r)$-ограничителем буквы z в $\mathbf{u}$ является s_k для некоторого $k < j$. Это означает, что $z \in \mathrm{con}(s_0\mathbf{w}_0 s_1 \mathbf{w}_1 \cdots s_{j-1}\mathbf{w}_{j-1})$. Тогда

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} z \mathbf{g} \mathbf{w}_{j1} z \mathbf{w}_{j2} s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$$

для некоторых слов $\mathbf{f}, \mathbf{g}, \mathbf{w}_{j1}$ и $\mathbf{w}_{j2}$, для которых выполнены равенства $\mathbf{f} z \mathbf{g} = s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_{j-1}\mathbf{w}_{j-1}$ и $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_{j1} z \mathbf{w}_{j2}$. Применим тождество (3.9) и получим, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{f} z \mathbf{g} \mathbf{w}_{j1} z^2 \mathbf{w}_{j2} s_{j+1} \mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n.$$

Таким образом, условие (3.50) выполнено для любой буквы $z \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_j)$. Тогда из леммы 3.16(iii) следует, что многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{w}_j \approx \mathbf{w}'_j ba \mathbf{w}''_j$, откуда вытекает, что в этом многообразии выполнено также тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n \\ &\approx s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j ba \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n = \mathbf{u}' ba \mathbf{u}''.\end{aligned}$$

Таким образом, мы завершили доказательство утверждений (i) и (ii).

Подслучай 3.2: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (iii), т.е. β_k выполнено в $\mathbf{V}$ и $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$. Тогда $D(\mathbf{u}, a) < \infty$. Положим $D(\mathbf{u}, a) = r$. Повторяя рассуждения из подслучая 1.3, мы можем получить, что $a \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}')$ и $r \geq k$. Предположим, что (3.49) является $(r-1)$-разложением слова $\mathbf{u}$. Тогда существует такое число $0 \leq j \leq n$, что $\mathbf{w}_j = \mathbf{w}'_j ab \mathbf{w}''_j$, $\mathbf{u}' = s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}'_j$ и $\mathbf{u}'' = \mathbf{w}''_j s_{j+1}\mathbf{w}_{j+1} \cdots s_n \mathbf{w}_n$. Положим $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}' ba \mathbf{u}''$. Поскольку $a, b \notin \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, $(r-1)$-разложение слова $\mathbf{u}^*$ имеет вид $s_0\mathbf{w}_0 s_1\mathbf{w}_1 \cdots s_j \mathbf{w}^*_j \cdots s_n \mathbf{w}_n$, где $\mathbf{w}^*_j = \mathbf{w}'_j ba \mathbf{w}''_j$. Тогда выполняются утверждения (1.1) и (1.9) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}^*$ и $\ell = r$. Применим лемму 1.31 и получим, что $D(\mathbf{u}^*, a) = r$. Отсюда и леммы 1.26 следует, что a является r-разделителем слова $\mathbf{u}^*$. Тогда $h_1^r(\mathbf{u}^*, b) \neq h_2^r(\mathbf{u}^*, b)$. Следовательно,

$D(\mathbf{u}^*, b) > r$. Поскольку, в силу леммы 3.18, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству β_r, мы можем применить утверждение, доказанное в подслучае 1.3, и получить, что в $\mathbf{V}$ выполнены тождества $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}'ba\mathbf{u}'' \approx \mathbf{u}'ab\mathbf{u}'' = \mathbf{u}$.

Мы завершили доказательство утверждения (iii).

Подслучай 3.3: $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию п. (iv), т.е. α_k выполнено в $\mathbf{V}$. Принимая во внимание подслучай 3.2, мы можем считать, что $D(\mathbf{u}, a) = D(\mathbf{u}, b) = \infty$. Отсюда и леммы 1.26 вытекает, что подслово ab слова $\mathbf{u}$, указанное в формулировке леммы, лежит в некотором s-блоке слова $\mathbf{u}$ для каждого s. Теперь мы можем дословно повторить рассуждения из подслучая 3.1, заключив, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнено тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}'ba\mathbf{u}''$.

Таким образом, мы завершили доказательство утверждения (iv) и леммы 3.20 в целом. □

3.4.3. Редукция к интервалам вида $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$

В этом подразделе мы докажем п. 3) предложения 3.15. Для этого нам потребуется несколько вспомогательных результатов.

Лемма 3.21. *Пусть $\mathbf{V}$ — подмногообразие многообразия $\mathbf{K}$, удовлетворяющее тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, а s — натуральное число. Предположим, что выполнены условия* (1.1) *и* (1.9) *для $\ell = s$, а также существуют такие буквы x и x_s, что $D(\mathbf{u}, x_s) = s$, $\ell_i(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$ и $\ell_1(\mathbf{v}, x_s) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.*

(i) *Если $i = 1$, то $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_s$.*

(ii) *Если $i = 2$, то $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_s^s$.*

Доказательство. Лемма 3.16(ii) позволяет считать, что $\mathrm{occ}_y(\mathbf{u}), \mathrm{occ}_y(\mathbf{v}) \le 2$ для любой буквы y. В силу леммы 1.33, найдутся такие буквы $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$, что $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$ для всех $0 \le r < s$ и тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид (1.10) для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$.

Предположим, что $i = 1$. Тогда $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$ и $\ell_1(\mathbf{v}, x_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x)$. Предположим, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_2(\mathbf{u}, x)$. Ввиду сказанного выше,

- первое вхождение x в $\mathbf{u}$ лежит в $\mathbf{u}_{2s+1}$,
- второе вхождение x в $\mathbf{u}$ лежит в $\mathbf{u}_{2s}\mathbf{u}_{2s-1} \cdots \mathbf{u}_0$,
- первое и второе вхождения x в $\mathbf{v}$ лежат в $\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1} \cdots \mathbf{v}_0$.

Подставив $x_s x^2$ вместо x_s в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, мы получим тождество

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}_{2s+1} x_s x^2 \mathbf{u}_{2s} x_{s-1} \mathbf{u}_{2s-1} x_s x^2 \mathbf{u}_{2s-2} x_{s-2} \mathbf{u}_{2s-3} x_{s-1} \cdots \\ &\cdot\ \mathbf{u}_4 x_1 \mathbf{u}_3 x_2 \mathbf{u}_2 x_0 \mathbf{u}_1 x_1 \mathbf{u}_0 \\ \approx\ &\mathbf{v}_{2s+1} x_s x^2 \mathbf{v}_{2s} x_{s-1} \mathbf{v}_{2s-1} x_s x^2 \mathbf{v}_{2s-2} x_{s-2} \mathbf{v}_{2s-3} x_{s-1} \cdots \\ &\cdot\ \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Затем применим тождество (3.27), удалив третье и последующие вхождения x в обе части тождества (3.51). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_{2s+1}x_s x(\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0)_x\\ \approx\ &\mathbf{v}_{2s+1}x_s x^2(\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0)_x.\end{aligned}$$

Теперь подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в последнем тождестве, кроме $x, x_0, x_1, \ldots, x_s$. Мы получим тождество

$$xx_sxx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \approx x_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1,$$

т.е. тождество β_s. Таким образом, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_s$.

Предположим теперь, что $\ell_2(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$. Ввиду сказанного выше,

- первое и второе вхождения x в $\mathbf{u}$ лежат в $\mathbf{u}_{2s+1}$,
- первое и второе вхождения x в $\mathbf{v}$ лежат в $\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1}\cdots\mathbf{v}_0$.

Теперь подставим x_sx^2 вместо x_s в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ и получим тождество (3.51). Затем применим тождество (3.27), удалив третье и последующие вхождения x в обе части тождества (3.51). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_{2s+1}x_s\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0\\ \approx\ &\mathbf{v}_{2s+1}x_s x^2(\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0)_x.\end{aligned}$$

Теперь подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в последнем тождестве, кроме $x, x_0, x_1, \ldots, x_s$. Мы получим тождество

$$x^2x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \approx x_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1. \quad (3.52)$$

Следовательно, $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}x_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 &\stackrel{(3.52)}{\approx} x^2x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1\\ &\stackrel{(3.5)}{\approx} x^3x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1\\ &\stackrel{(3.52)}{\approx} xx_sx^2x_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1\\ &\stackrel{(3.27)}{\approx} xx_sxx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1,\end{aligned}$$

откуда следует, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество β_s. Таким образом, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_s$. Утверждение (i) доказано.

Предположим теперь, что $i = 2$. Тогда $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_2(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, x_s)$. Если $\ell_1(\mathbf{v}, x_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x)$, то мы оказываемся в условиях уже доказанного утверждения (i). Таким образом, мы можем считать, что $\ell_1(\mathbf{v}, x) < \ell_1(\mathbf{v}, x_s)$. Следовательно,

- первое и второе вхождения x в $\mathbf{u}$ лежат в $\mathbf{u}_{2s+1}$,
- первое вхождение x в $\mathbf{v}$ лежит в $\mathbf{v}_{2s+1}$,

- второе вхождение x в $\mathbf{v}$ лежит в $\mathbf{v}_{2s}\mathbf{v}_{2s-1}\cdots\mathbf{v}_0$.

Теперь подставим $x_s x^2$ вместо x_s в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ и получим тождество (3.51). Затем применим тождество (3.27), удалив третье и последующие вхождения x в обе части тождества (3.51). В результате мы получим тождество

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}_{2s+1}x_s\mathbf{u}_{2s}x_{s-1}\mathbf{u}_{2s-1}x_s\mathbf{u}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{u}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{u}_4x_1\mathbf{u}_3x_2\mathbf{u}_2x_0\mathbf{u}_1x_1\mathbf{u}_0\\ \approx\ &\mathbf{v}_{2s+1}x_sx(\mathbf{v}_{2s}x_{s-1}\mathbf{v}_{2s-1}x_s\mathbf{v}_{2s-2}x_{s-2}\mathbf{v}_{2s-3}x_{s-1}\cdots\mathbf{v}_4x_1\mathbf{v}_3x_2\mathbf{v}_2x_0\mathbf{v}_1x_1\mathbf{v}_0)_x.\end{aligned}$$

Наконец, подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в последнем тождестве, кроме $x, x_0, x_1, \ldots, x_s$. Мы получим тождество

$$x^2x_sx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1 \approx xx_sxx_{s-1}x_sx_{s-2}x_{s-1}\cdots x_1x_2x_0x_1,$$

т.е. тождество (3.28) при $k = s$. Из леммы 3.17 следует, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_s^s$. Утверждение (ii) доказано. □

Лемма 3.22. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— подмногообразие многообразия* $\mathbf{K}$*, удовлетворяющее тождеству* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$*. Если выполнены условия* (1.1) *и* (1.9) *при* $\ell = 1$*, но для некоторого* $k > 1$ *условие* (1.9) *при* $\ell = k$ *не выполняется, то* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_{\ell-1}^{\ell-1}$.

Доказательство. Предположим, что условие (1.9) не выполняется для некоторого $\ell = k > 1$ и k — наименьшее число с таким свойством. Тогда существует такая буква x, что $h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x) \neq h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$, где либо $i = 1$, либо $i = 2$. Пусть (1.7) — $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$. В частности, множество всех $(k-1)$-разделителей слова $\mathbf{u}$ совпадает с множеством $\{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$. Поскольку условие (1.9) выполнено при $\ell = k-1$, мы можем применить лемму 1.29 и получить, что $\mathbf{v}$ имеет то же множество $(k-1)$-разделителей, что и $\mathbf{u}$ (но порядок первых вхождений этих букв в слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ может различаться). Положим $t_p = h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x)$ и $t_q = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$. Ясно, что $p \neq q$.

Предположим сначала, что $\ell_i(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, t_q)$. Выбор букв t_p и t_q гарантирует, что $\ell_1(\mathbf{u}, t_p) < \ell_i(\mathbf{u}, x)$ и $\ell_1(\mathbf{v}, t_q) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$. Следовательно, $\ell_1(\mathbf{u}, t_p) < \ell_1(\mathbf{u}, t_q)$, откуда вытекает, что $p < q$. Если буква t_q является простой в $\mathbf{u}$, то из условия (1.1) следует, что эта буква является также простой в $\mathbf{v}$. В этом случае буква t_q будет 0-разделителем в словах $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Тогда, поскольку $t_q = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$, мы получим, что $t_q = h_i^0(\mathbf{v}, x)$. Из условия (1.9) при $\ell = 1$ вытекает, что $t_q = h_i^0(\mathbf{u}, x)$. Но это противоречит неравенству $p < q$. Следовательно, буква t_q является кратной в $\mathbf{u}$, а значит, в силу условия (1.1), и в $\mathbf{v}$. Тогда $D(\mathbf{v}, t_q) > 0$. По лемме 1.26, $D(\mathbf{v}, t_q) \leq k-1$, поскольку t_q является $(k-1)$-разделителем слова $\mathbf{v}$. Положим $r = D(\mathbf{v}, t_q)$. Если $i = 1$, то применим лемму 3.21(i) при $s = r$ и $x_s = t_q$ и получим, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_r \subseteq \mathbf{J}_{k-1}^{k-1}$. Если $i = 2$, то, используя лемму 3.21(ii) при $s = r$ и $x_s = t_q$, получаем, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_r^r \subseteq \mathbf{J}_{k-1}^{k-1}$.

Если $\ell_i(\mathbf{v}, x) < \ell_1(\mathbf{v}, t_p)$, то мы можем получить требуемое заключение, используя рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце.

Наконец, предположим, что $\ell_1(\mathbf{u}, t_q) < \ell_i(\mathbf{u}, x)$ и $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$. Из первого из этих неравенств следует, что первое вхождение t_q в $\mathbf{u}$ предшествует i-му вхождению x в $\mathbf{u}$. Однако t_p является $(i, k-1)$-ограничителем

x в $\mathbf{u}$. Следовательно, $\ell_1(\mathbf{u}, t_q) < \ell_1(\mathbf{u}, t_p)$. Аналогичным образом можно проверить, что $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_1(\mathbf{v}, t_q)$, поскольку $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$ и $t_q = h_i^{k-1}(\mathbf{v}, x)$. Предположим, что буква t_p является простой в $\mathbf{u}$. Тогда из условия (1.1) вытекает, что эта буква также является простой и в $\mathbf{v}$. Это означает, что t_p является 0-разделителем слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Поскольку $t_p = h_i^{k-1}(\mathbf{u}, x)$, мы имеем, что $t_p = h_i^0(\mathbf{u}, x)$. Тогда из условия (1.9) при $\ell = 1$ вытекает, что $t_p = h_i^0(\mathbf{v}, x)$. Заметим, что $\ell_1(\mathbf{v}, t_p) < \ell_1(\mathbf{v}, t_q) < \ell_i(\mathbf{v}, x)$. Отсюда $t_p = h_1^0(\mathbf{v}, t_q)$. Тогда из условия (1.9) при $\ell = 1$ вытекает, что $t_p = h_1^0(\mathbf{u}, t_q)$. Но это противоречит тому, что $\ell_1(\mathbf{u}, t_q) < \ell_1(\mathbf{u}, t_p)$. Следовательно, буква t_p является кратной в $\mathbf{u}$. Тогда $D(\mathbf{u}, t_p) > 0$. По лемме 1.26, $D(\mathbf{u}, t_p) \le k - 1$. Положим $r = D(\mathbf{u}, t_p)$. Заметим, что мы находимся в условиях леммы 3.21 при $i = 1$, $s = r$, $x = t_q$ и $x_s = t_p$. Применим п. (i) этой леммы и получим, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{H}_r \subseteq \mathbf{J}_{k-1}^{k-1}$. □

Следующее утверждение открывает серию однотипных утверждений, включающую в себя также предложения 3.26, 3.28 и 3.31. Они посвящены проблемам равенства слов в многообразиях $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{I}_k$, $\mathbf{J}_k^m$ и $\mathbf{K}$. Все эти предложения доказываются по одной и той же схеме. В доказательстве необходимости эта схема почти не меняется от предложения к предложению. Что касается доказательства достаточности, то применение схемы, в целом изложенной в доказательстве предложения 3.23(i), с каждым разом будет усложняться.

Предложение 3.23. *Нетривиальное тождество* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *выполнено:*

(i) *в многообразии* $\mathbf{F}_k$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.1) *и* (1.9) *при* $\ell = k$;

(ii) *в многообразии* $\mathbf{K}$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.1) *и* (1.9) *для всех* ℓ.

Доказательство. (i) *Необходимость.* Предположим, что многообразие $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет нетривиальному тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Из предложения 1.6 и включения $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{F}_k$ следует, что выполнено условие (1.1). Поскольку $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, из леммы 1.2 следует, что существует такая последовательность слов $\mathbf{u} = \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n = \mathbf{v}$, что для любого $i = 0, 1, \dots, n-1$ найдутся слова $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i \in F^1$, эндоморфизм $\xi_i \in \mathrm{End}(F^1)$ и тождество $\mathbf{a}_i \approx \mathbf{b}_i \in \{\Phi, \alpha_k\}$ такие, что либо $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{a}_i) \mathbf{q}_i$ и $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{b}_i) \mathbf{q}_i$, либо $\mathbf{w}_i = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{b}_i) \mathbf{q}_i$ и $\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{p}_i \xi_i(\mathbf{a}_i) \mathbf{q}_i$. По индукции мы можем свести наши рассмотрения к случаю, когда $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, эндоморфизма $\xi \in \mathrm{End}(F^1)$ и тождества $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \alpha_k\}$.

Если $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{xyx \approx xyx^2, x^2y \approx x^2yx\}$, то требуемое утверждение очевидно, потому что первое и второе вхождения букв слова $\mathbf{u}$ не принимают участия в замене $\xi(\mathbf{a})$ на $\xi(\mathbf{b})$. Предположим теперь, что $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ совпадает с тождеством (3.4). Тогда, поскольку $D(\mathbf{a}, x) = D(\mathbf{a}, y) = \infty$, из леммы 1.34 вытекает, что подслово $\xi(\mathbf{a})$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, содержится в некотором s-блоке для любого s. В частности, это подслово содержится в некотором $(k-1)$-блоке. Из этого вытекает справедливость утверждения (1.9) при $\ell = k$.

Предположим, наконец, что $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ совпадает с α_k. Тогда

$$\xi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1,$$
$$\xi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1$$

для некоторых слов $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_k$. В этом случае

$$\mathbf{u} = \mathbf{p} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{q},$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{p} \mathbf{b}_k \mathbf{a}_k \mathbf{a}_{k-1} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_k \mathbf{a}_{k-2} \mathbf{a}_{k-1} \cdots \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_0 \mathbf{a}_1 \mathbf{q}.$$

По лемме 3.19, $D(\mathbf{a}, x_k) = D(\mathbf{a}, y_k) = k$. Тогда из леммы 1.34 вытекает, что подслово $\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}_{k-1}$, содержится в некотором $(k-1)$-блоке. Отсюда вытекает справедливость утверждения (1.9) при $\ell = k$.

Достаточность. Наметим схему наших дальнейших рассуждений. Заметим, что достаточность в предложениях 3.26, 3.28 и 3.31 будет доказываться по той же схеме. Пусть $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ — тождество, удовлетворяющее условию предложения. Мы начнем с рассмотрения $(k-1)$-разложения слова $\mathbf{u}$. Основываясь на лемме 3.20 и используя тождества, выполненные в многообразии $\mathbf{F}_k$, покажем, что любой $(k-1)$-блок слова $\mathbf{u}$ может быть заменен на слово некоторого «канонического вида». Мы заменим все $(k-1)$-блоки слова $\mathbf{u}$ этим «каноническим видом», получив некоторое слово $\mathbf{u}^\sharp$. После этого мы рассмотрим слово $\mathbf{v}$. Мы покажем, что с точностью до применения тождеств многообразия $\mathbf{F}_k$, это слово имеет в точности те же $(k-1)$-блоки и те же $(k-1)$-разделители, что и слово $\mathbf{u}$. Это позволит нам изменить $(k-1)$-блоки слова $\mathbf{v}$ тем же образом, что и $(k-1)$-блоки слова $\mathbf{u}$, получив снова слово $\mathbf{u}^\sharp$. Из сказанного, очевидно, следует, что в $\mathbf{F}_k$ выполнено тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$.

Приступим к реализации намеченного плана. Предположим, что тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ удовлетворяет условиям (1.1) и (1.9) при $\ell = k$, а (1.7) — $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$. Зафиксируем индекс $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Лемма 3.16(ii) позволяет считать, что каждая буква из $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i)$ входит в $(k-1)$-блок $\mathbf{u}_i$ не более двух раз. Положим $\mathrm{mul}(\mathbf{u}_i) = \{x_1, x_2 \ldots, x_p\}$, $\mathrm{sim}(\mathbf{u}_i) = \{y_1, y_2, \ldots, y_q\}$ и

$$\overline{\mathbf{u}_i} = x_1^2 x_2^2 \cdots x_p^2 y_1 y_2 \cdots y_q.$$

Заметим, что $\overline{\mathbf{u}_i}$ является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом» $(k-1)$-блока $\mathbf{u}_i$. Действительно, $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i \mathbf{w}_2$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. Из лемм 3.16(ii) и 3.20(iv) следует, что многообразие $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 \mathbf{u}_i \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1 \, \overline{\mathbf{u}_i} \, \mathbf{w}_2.$$

В частности, $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет тождествам

$$\mathbf{u} = t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \mathbf{u}_m \approx t_0 \mathbf{u}_0 t_1 \mathbf{u}_1 \cdots t_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} t_m \, \overline{\mathbf{u}_m} \, .$$

Положим $\mathbf{u}' = t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1\cdots t_{m-1}\mathbf{u}_{m-1}t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}$. Заметим, что выполняются условия (1.1) и (1.9) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$ и $\ell = k$. Тогда из леммы 1.27 вытекает, что слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$ являются $(k-1)$-эквивалентными. Следовательно, $t_0, t_1, \dots, t_m$ являются $(k-1)$-разделителями слова $\mathbf{u}'$, а $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \overline{\mathbf{u}_m}$ являются $(k-1)$-блоками этого слова. Теперь мы можем повторить дословно рассуждения, приведенные выше, заменив слово $\mathbf{u}$ на слово $\mathbf{u}'$ и получить, что в $\mathbf{F}_k$ выполнено тождество

$$\mathbf{u}' = t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1\cdots t_{m-1}\mathbf{u}_{m-1}t_m\,\overline{\mathbf{u}_m} \approx t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1\cdots t_{m-1}\,\overline{\mathbf{u}_{m-1}}\,t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}.$$

Продолжая этот процесс мы получим, что $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет тождествам

$$\begin{aligned}\mathbf{u} = {} & t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1\cdots t_{m-1}\mathbf{u}_{m-1}t_m\mathbf{u}_m \approx t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1\cdots t_{m-1}\mathbf{u}_{m-1}t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}\\ & \approx t_0\mathbf{u}_0t_1\mathbf{u}_1\cdots t_{m-1}\,\overline{\mathbf{u}_{m-1}}\,t_m\,\overline{\mathbf{u}_m} \approx \cdots \approx t_0\,\overline{\mathbf{u}_0}\,t_1\,\overline{\mathbf{u}_1}\,\cdots t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}\,.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Положим $\mathbf{u}^\sharp = t_0\,\overline{\mathbf{u}_0}\,t_1\,\overline{\mathbf{u}_1}\,\cdots t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}\,$.

Перейдем к слову $\mathbf{v}$. Ввиду леммы 1.27, $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Из условия (1.9) при $\ell = k$ вытекает, что j-е вхождение любой буквы в слово $\mathbf{u}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$ тогда и только тогда, когда j-е вхождение этой буквы в слово $\mathbf{v}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{v}_i$ для $j = 1, 2$. Лемма 3.16(ii) позволяет нам считать, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}) \le 2$ и $\mathrm{occ}_x(\mathbf{v}) \le 2$ для любой буквы x. Следовательно, $\mathrm{sim}(\mathbf{u}_i) = \mathrm{sim}(\mathbf{v}_i)$ и $\mathrm{mul}(\mathbf{u}_i) = \mathrm{mul}(\mathbf{v}_i)$. Это означает, что $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ имеют одинаковый «канонический вид». Таким образом, многообразие $\mathbf{F}_k$ удовлетворяет тождествам $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$.

(ii) *Необходимость* следует из уже доказанного утверждения (i) данного предложения и очевидного включения $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{K}$, в то время как *достаточность* доказывается так же, как и в утверждении (i). □

Теперь мы готовы завершить доказательство п. 3) предложения 3.15. Пусть $\mathbf{E} \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{K}$. Проверим, что $\mathbf{X} \in [\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$ для некоторого k. Предположим, что $\mathbf{F}_1 \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда найдется тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{F}_1$. Из предложений 3.3 и 3.23(i), а также включения $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ следует, что выполнены условия (1.1) и (3.2), а условие (1.9) при $\ell = 1$ не выполняется. Пусть (1.7) — 0-разложение слова $\mathbf{u}$. Применим лемму 1.27 и получим, что 0-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Поскольку $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ не удовлетворяет условию (1.9) при $\ell = 1$, но удовлетворяет условию (3.2), найдется такая буква x, что $h_2^0(\mathbf{u}, x) \ne h_2^0(\mathbf{v}, x)$. Положим $t_i = h_2^0(\mathbf{u}, x)$ и $t_j = h_2^0(\mathbf{v}, x)$. Без ограничения общности можно считать, что $j < i$. Поскольку справедливо условие (3.2), $h_1^0(\mathbf{u}, x) = h_1^0(\mathbf{v}, x) = t_k$ для некоторого k. Ясно, что $k \le j$. Следовательно, тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид

$$\mathbf{u}_1t_k\mathbf{u}_2x\mathbf{u}_3t_i\mathbf{u}_4x\mathbf{u}_5 \approx \mathbf{v}_1t_k\mathbf{v}_2x\mathbf{v}_3x\mathbf{v}_4t_i\mathbf{v}_5$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_p$ и $\mathbf{v}_p$ при $p = 1, 2, \dots, 5$. Подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, кроме x и t_i. Мы получим тождество $xt_ix^p \approx x^qt_ix^r$, где $p \ge 1$, $q \ge 2$ и $r \ge 0$. Затем применим тождество (3.27) и получим, что $\mathbf{X}$ удовлетворяет тождеству

$xt_ix \approx x^2t_i$. Отсюда и из включения $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{K}$ следует, что $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{E}$, что противоречит выбору многообразия $\mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{F}_1 \subseteq \mathbf{X}$. Если $\mathbf{X}$ содержит бесконечное число многообразий вида $\mathbf{F}_k$, то, по предложению 3.23, $\mathbf{X} = \mathbf{K}$. Отсюда вытекает, что существует натуральное число k такое, что $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{X}$, но $\mathbf{F}_{k+1} \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда из предложения 3.23(i) следует, что выполняются условия (1.1) и (1.9) при $\ell = k$, в то время как условие (1.9) при $\ell = k+1$ не выполняется. Нам остается применить лемму 3.22 и заключить, что $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{F}_{k+1}$. Утверждение 3) предложения 3.15 доказано.

3.4.4. Структура интервала $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$

Здесь мы докажем п. 4) предложения 3.15. Это доказательство разбивается на 6 частей, которые мы будем обозначать буквами А)–Е).

А) Первым этапом проверки п. 4) предложения 3.15 является

Лемма 3.24. *Если $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов из интервала $[\mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$, то либо $\mathbf{X} = \mathbf{F}_k$, либо $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{H}_k$.*

Чтобы проверить этот факт, нам потребуется два вспомогательных утверждения.

Лемма 3.25. *Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие моноидов такое, что $\mathbf{F}_s \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$ для некоторого s. Если $\mathbf{V}$ удовлетворяет такому тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, что $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b)$, $\ell_1(\mathbf{v}, b) < \ell_1(\mathbf{v}, a)$ и $D(\mathbf{u}, a) = D(\mathbf{u}, b) = s$ для некоторых $a, b \in \operatorname{con}(\mathbf{u})$, то $\mathbf{V} = \mathbf{F}_s$.*

Доказательство. Положим $x_s = a$ и $y_s = b$. Поскольку $\mathbf{F}_s \subseteq \mathbf{V}$, из предложения 3.23(i) вытекают условия (1.1) и (1.9) при $\ell = s$. Предположим, что
$$\ell_2(\mathbf{u}, x_s) < \ell_2(\mathbf{u}, y_s) \text{ и } \ell_2(\mathbf{v}, x_s) < \ell_2(\mathbf{v}, y_s). \tag{3.54}$$
По лемме 1.33, существуют буквы $x_0, x_1, \dots, x_{s-1}$ такие, что $D(\mathbf{u}, x_r) = D(\mathbf{v}, x_r) = r$ для любого $0 \le r < s$, и тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид (1.10) для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2s+1}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2s+1}$.

Проверим, что первые вхождения x_s и y_s в $\mathbf{u}$ лежат в одном и том же $(s-1)$-блоке. Положим $t_1 = h_1^{s-1}(\mathbf{u}, x_s)$ и $t_2 = h_1^{s-1}(\mathbf{u}, y_s)$. Рассуждая от противного, предположим, что $t_1 \ne t_2$. Поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, y_s)$, мы имеем, что $\ell_1(\mathbf{u}, t_1) < \ell_1(\mathbf{u}, t_2)$. Применим лемму 1.27 при $k = s-1$ и получим, что $\ell_1(\mathbf{v}, t_1) < \ell_1(\mathbf{v}, t_2)$. Тогда из условия (1.9) при $\ell = s$ следует, что $t_1 = h_1^{s-1}(\mathbf{v}, x_s)$ и $t_2 = h_1^{s-1}(\mathbf{v}, y_s)$. Но это противоречит тому, что $\ell_1(\mathbf{v}, y_s) < \ell_1(\mathbf{v}, x_s)$. Таким образом, первые вхождения x_s и y_s в $\mathbf{u}$ лежат в одном и том же $(s-1)$-блоке. В частности, первое вхождение y_s в $\mathbf{u}$ предшествует первому вхождению x_{s-1} в $\mathbf{u}$, так как $\ell_1(\mathbf{u}, x_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-1})$ и x_{s-1} является $(s-1)$-разделителем. Из сказанного следует, что $\mathbf{u}_{2s} = \mathbf{u}'_{2s} y_s \mathbf{u}''_{2s}$ для некоторых слов $\mathbf{u}'_{2s}$ и $\mathbf{u}''_{2s}$. Поскольку первое вхождение y_s в $\mathbf{v}$ предшествует первому вхождению x_s в $\mathbf{v}$, мы имеем, что $\mathbf{v}_{2s+1} = \mathbf{v}'_{2s+1} y_s \mathbf{v}''_{2s+1}$ для некоторых слов $\mathbf{v}'_{2s+1}$ и $\mathbf{v}''_{2s+1}$.

Далее, поскольку $\ell_1(\mathbf{u}, y_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$, применим лемму 1.32 при $\mathbf{w} = \mathbf{u}$, $z = y_s$, $t = x_{s-2}$ и $r = s$ и получим, что $\ell_2(\mathbf{u}, y_s) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{s-2})$. Тогда

$\mathbf{u}_{2s-2} = \mathbf{u}'_{2s-2} y_s \mathbf{u}''_{2s-2}$ для некоторых слов $\mathbf{u}'_{2s-2}$ и $\mathbf{u}''_{2s-2}$. Аналогичным образом мы можем проверить, что $\mathbf{v}_{2s-2} = \mathbf{v}'_{2s-2} y_s \mathbf{v}''_{2s-2}$ для некоторых слов $\mathbf{v}'_{2s-2}$ и $\mathbf{v}''_{2s-2}$.

Ввиду сказанного выше, тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{2s+1} x_s \mathbf{u}'_{2s} \overset{(1)}{y_s} \mathbf{u}'_{2s} x_{s-1} \mathbf{u}_{2s-1} x_s \mathbf{u}'_{2s-2} \overset{(2)}{y_s} \mathbf{u}'_{2s-2} x_{s-2} \mathbf{u}_{2s-3} x_{s-1} \cdots \\
&\quad \cdot \mathbf{u}_4 x_1 \mathbf{u}_3 x_2 \mathbf{u}_2 x_0 \mathbf{u}_1 x_1 \mathbf{u}_0 \\
\approx\ &\mathbf{v}'_{2s+1} \overset{(1)}{y_s} \mathbf{v}''_{2s+1} x_s \mathbf{v}_{2s} x_{s-1} \mathbf{v}_{2s-1} x_s \mathbf{v}'_{2s-2} \overset{(2)}{y_s} \mathbf{v}''_{2s-2} x_{s-2} \mathbf{v}_{2s-3} x_{s-1} \cdots \\
&\quad \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0.
\end{aligned}$$

Лемма 3.16(ii) позволяет нам предположить, что буквы y_s и x_r при $1 \le r \le s$ входят ровно по два раза в каждое из слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Теперь подставим 1 вместо всех букв, входящих в тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, кроме $x_0, x_1, \dots, x_s$ и y_s. Мы получим тождество

$$x_s y_s x_{s-1} x_s y_s x_{s-2} x_{s-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \approx y_s x_s x_{s-1} x_s y_s x_{s-2} x_{s-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1,$$

т.е. тождество α_s.

Пусть теперь условие (3.54) не выполняется. Если $\ell_2(\mathbf{u}, x_s) < \ell_2(\mathbf{u}, y_s)$, но $\ell_2(\mathbf{v}, y_s) < \ell_2(\mathbf{v}, x_s)$, то рассуждения, аналогичные вышеприведенным, позволяют показать, что $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству

$$x_s y_s x_{s-1} x_s y_s x_{s-2} x_{s-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \approx \overset{(1)}{y_s} \overset{(1)}{x_s} x_{s-1} \overset{(2)}{y_s} \overset{(2)}{x_s} x_{s-2} x_{s-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1.$$

В силу леммы 3.16(i), многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет тождеству σ_2. Это тождество позволяет нам переставить местами вторые вхождения букв x_s и y_s в правой части последнего тождества. В результате мы снова получим тождество α_s.

Наконец, если $\ell_2(\mathbf{u}, y_s) < \ell_2(\mathbf{u}, x_s)$, то мы можем повторить приведенные выше рассуждения, применив леммы 1.32 и 1.33 для буквы y_s вместо x_s. В результате мы получим тождество вида

$$x_s y_s x_{s-1} y_s x_s x_{s-2} x_{s-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \approx y_s x_s x_{s-1} \mathbf{a} x_{s-2} x_{s-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1,$$

где

$$\mathbf{a} = \begin{cases} x_s y_s, & \text{если } \ell_2(\mathbf{v}, x_s) < \ell_2(\mathbf{v}, y_s), \\ y_s x_s & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В случае, когда $\mathbf{a} = x_s y_s$, это тождество совпадает с α_s. В противном случае мы еще раз применим тождество σ_2 и получим тождество α_s. Следовательно, в любом случае $\mathbf{V}$ удовлетворяет α_s, откуда следует, что $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{F}_s$. □

Предложение 3.26. *Нетривиальное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в многообразии $\mathbf{H}_k$ тогда и только тогда, когда выполнены условия* (1.1), (1.9) *при $\ell = k$ и условие*

$$\text{если либо } D(\mathbf{u}, x) \le \ell, \text{ либо } D(\mathbf{v}, x) \le \ell, \text{ то } h_1^\ell(\mathbf{u}, x) = h_1^\ell(\mathbf{v}, x) \qquad (3.55)$$

при $\ell = k$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в многообразии $\mathbf{H}_k$ выполнено нетривиальное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Из предложения 3.23(i) и включения $\mathbf{F}_k \subseteq \mathbf{H}_k$ следует, что справедливы условия (1.1) и (1.9) при $\ell = k$. Как и в доказательстве необходимости в предложении 3.23(i), мы можем считать, что $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$ для некоторых слов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, эндоморфизма $\xi \in \mathrm{End}(F^1)$ и тождества $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \beta_k\}$.

Если $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \Phi$, то, в силу предложения 3.23(ii), условие (1.9) выполняется для любого ℓ. Очевидно, что отсюда следует требуемое заключение. Пусть теперь $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ совпадает с β_k. Тогда

$$\xi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1,$$
$$\xi(\mathbf{b}) = \mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}^2\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$$

для некоторых слов $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{a}_{k+1}$, откуда

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q},$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}^2\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}.$$

По лемме 3.19, $D(\mathbf{a}, x), D(\mathbf{a}, x_k) > k - 1$. Тогда из леммы 1.34 следует, что подслово $\mathbf{a}_{k+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k+1}$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}_{k-1}$, содержится в некотором $(k-1)$-блоке. Кроме того, ввиду леммы 1.34, оба вхождения слова $\mathbf{a}_{k+1}$ в $\mathbf{u}$ не содержат никаких k-разделителей слова $\mathbf{u}$, так как, по лемме 3.19, $D(\mathbf{a}, x) > k$. Это означает, что слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются k-эквивалентными. Применим теперь лемму 1.27 и получим, что справедливо условие (3.55) при $\ell = k$.

Достаточность. Схема наших рассуждений здесь та же, что и при доказательстве достаточности в предложении 3.23(i). Однако «канонический вид» $(k-1)$-блоков слова $\mathbf{u}$ выглядит здесь сложнее, чем в том предложении.

Предположим, что выполняются условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$ и (3.55) при $\ell = k$. Пусть $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$ имеет вид (1.7). Зафиксируем произвольное $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Пусть

$$t_i\mathbf{u}_i = s_0\mathbf{a}_0 s_1\mathbf{a}_1\cdots s_n\mathbf{a}_n, \tag{3.56}$$

где $s_0, s_1, \ldots, s_n$ — k-разделители слова $\mathbf{u}$, а $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — k-блоки этого слова. Положим $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_n$. Пусть $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ и

$$\overline{\mathbf{u}_i} = x_1^2x_2^2\cdots x_p^2 s_1 s_2\cdots s_n.$$

Как мы увидим ниже, слово $\overline{\mathbf{u}_i}$ является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом» $(k-1)$-блока $\mathbf{u}_i$.

Ясно, что $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i\mathbf{w}_2$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. Предположим, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) \setminus \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Если буква x проста в $\mathbf{u}_i$, то эта буква обязана быть k-разделителем слова $\mathbf{u}$, что невозможно. Следовательно, буква x кратна в $\mathbf{u}_i$. Поскольку $x \notin \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$, это означает, что первое и второе вхождения x в $\mathbf{u}$ лежат в одном и том же $(k-1)$-блоке слова $\mathbf{u}$, откуда $D(\mathbf{u}, x) > k$. Далее, из леммы 1.26 вытекает, что $D(\mathbf{u}, s_j) = k$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Мы видим, что если $a \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*)$ и $b \in \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$, то либо $a \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$, либо $D(\mathbf{u}, a) \neq D(\mathbf{u}, b)$. Теперь воспользуемся пп. (ii) и (iii) леммы 3.20 и получим, что в $\mathbf{H}_k$ выполнено тождество

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i\mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i^* s_1 s_2 \cdots s_n \mathbf{w}_2.$$

Как мы видели выше, если $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) \setminus \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$, то $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}_i^*) \geq 2$. Если же $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1) \cap \mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*)$, то мы можем применить тождество (3.9) и получить, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}_i^*) \geq 2$. Более того, учитывая лемму 3.16(ii), мы можем считать, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}_i^*) = 2$ для любого $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*)$. Тогда из леммы 3.16(iii) следует, что в $\mathbf{H}_k$ выполнены тождества

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i^* s_1 s_2 \cdots s_n \mathbf{w}_2 \approx \mathbf{w}_1\, \overline{\mathbf{u}_i}\, \mathbf{w}_2.$$

Таким образом, как и в доказательстве предложения 3.23(i), используя тождества, выполненные в многообразии $\mathbf{H}_k$, мы можем последовательно заменить $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ слова $\mathbf{u}$ на их «канонический вид» $\overline{\mathbf{u}_i}$ для всех $i = m, m-1, \ldots, 0$. Мы получим, что многообразие $\mathbf{H}_k$ удовлетворяет тождествам (3.53). Положим $\mathbf{u}^\sharp = t_0\, \overline{\mathbf{u}_0}\, t_1\, \overline{\mathbf{u}_1} \cdots t_m\, \overline{\mathbf{u}_m}$.

Перейдем к слову $\mathbf{v}$. По лемме 1.27, $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). В силу условия (3.55) и леммы 1.27, слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются k-эквивалетными. Это означает, что слово $t_i\mathbf{v}_i$ представляет собой произведение чередующихся k-разделителей $s_0, s_1, \ldots, s_n$ и k-блоков $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ слова $\mathbf{u}$, т.е.

$$t_i\mathbf{v}_i = s_0\mathbf{b}_0 s_1\mathbf{b}_1 \cdots s_n\mathbf{b}_n. \tag{3.57}$$

Из условия (1.9) при $\ell = k$ следует, что j-е вхождение любой буквы в $\mathbf{u}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$ тогда и только тогда j-е вхождение этой буквы в $\mathbf{v}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{v}_i$ для любого $j = 1, 2$. Лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что если первое и второе вхождения буквы x в $\mathbf{u}$ не лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$, то эта буква не входит в $\mathbf{u}_i$. Следовательно, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) = \mathrm{con}(\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_n)$. Отсюда вытекает, что $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ имеют один и тот же «канонический вид». Дословно повторяя рассуждения, приведенные выше, получаем, что многообразие $\mathbf{H}_k$ удовлетворяет тождествам $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$. □

Доказательство леммы 3.24. Предположим, что $\mathbf{F}_k \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$. Докажем, что $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{H}_k$. Рассуждая от противного, предположим, что $\mathbf{H}_k \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда существует тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{H}_k$. Из предложений 3.23(i) и 3.26, а также включения $\mathbf{F}_k \subset \mathbf{X}$ вытекает, что выполнены условия (1.1) и (1.9) при $\ell = k$, но не выполнено условие (3.55) при $\ell = k$. По лемме 1.29, слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеют одинаковый набор k-разделителей. Однако данные два слова не являются k-эквивалентными по лемме 1.27. Тогда найдутся такие k-разделители a, b слов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, что $\ell_1(\mathbf{u}, a) < \ell_1(\mathbf{u}, b)$, но $\ell_1(\mathbf{v}, b) < \ell_1(\mathbf{v}, a)$. Ввиду леммы 1.26, $D(\mathbf{u}, a), D(\mathbf{u}, b) \leq k$. Предположим, что $D(\mathbf{u}, a) = r < k$. В силу леммы 1.30, выполняется условие (1.9) при $\ell = r$. Поэтому из леммы 1.31 вытекает, что $D(\mathbf{v}, a) = r$. По лемме 1.27, слова $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ являются r-эквивалентными. Положим $c = h_1^r(\mathbf{u}, b)$. Поскольку, по лемме 1.26, a является r-разделителем слова $\mathbf{u}$, первое вхождение a в $\mathbf{u}$ предшествует первому вхождению c в $\mathbf{u}$. С другой стороны, условие (1.9) при $\ell = r$ влечет равенство $c = h_1^r(\mathbf{v}, b)$, откуда следует, что $\ell_1(\mathbf{v}, c) < \ell_1(\mathbf{v}, a)$. Это противоречит r-эквивалентности слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Таким образом, $D(\mathbf{u}, a) = k$. Аналогично, $D(\mathbf{u}, b) = k$. Теперь применим лемму 3.25 при $s = k$ и получим, что $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_k$. Получаем противоречие с условием. Лемма 3.24 доказана. $\square$

Б) Вторым этапом проверки п. 4) предложения 3.15 является

Лемма 3.27. *Если $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов из интервала $[\mathbf{H}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$, то либо $\mathbf{X} = \mathbf{H}_k$, либо $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{I}_k$.*

Чтобы проверить этот факт, нам потребуется

Предложение 3.28. *Нетривиальное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ выполнено в многообразии $\mathbf{I}_k$ тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.1), (1.9) *при $\ell = k$ и*

$$h_1^\ell(\mathbf{u}, x) = h_1^\ell(\mathbf{v}, x) \text{ для всех } x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}) \tag{3.58}$$

при $\ell = k$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в $\mathbf{I}_k$ выполнено нетривиальное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Из предложения 3.26 и включения $\mathbf{H}_k \subseteq \mathbf{I}_k$ следует, что выполняются условия (1.1) и (1.9) при $\ell = k$. Как и в доказательстве предложения 3.23(i), мы можем предположить, что $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, эндоморфизма $\xi \in \mathrm{End}(F^1)$ и тождества $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \gamma_k\}$.

Если $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \Phi$, то, в силу предложения 3.23(ii), условие (1.9) справедливо для любого ℓ. Очевидно, что отсюда следует требуемое заключение. Предположим теперь, что $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ совпадает с γ_k. Тогда

$$\begin{aligned}
\xi(\mathbf{a}) &= \mathbf{b}_1\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1,\\
\xi(\mathbf{b}) &= \mathbf{b}_1\mathbf{b}_0\mathbf{a}_k\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1
\end{aligned}$$

для некоторых слов $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$, откуда

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \mathbf{p}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q},\\
\mathbf{v} &= \mathbf{p}\mathbf{b}_1\mathbf{b}_0\mathbf{a}_k\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

По лемме 3.19, $D(\mathbf{a}, x_k) = k$. Тогда из леммы 1.34 следует, что подслово $\mathbf{a}_k$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{a}_{k-1}$, не содержит $(k-1)$-разделителей слова $\mathbf{u}$. Кроме того, подслово $\mathbf{b}_1$ слова $\mathbf{u}$, лежащее между $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{a}_k$, не содержит s-разделителей слова $\mathbf{u}$ для всех s. Следовательно, подслово $\mathbf{b}_1\mathbf{a}_k$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{a}_{k-1}$, лежит в некотором $(k-1)$-блоке слова $\mathbf{u}$. Очевидно, что подслово $\mathbf{b}_1$ слова $\mathbf{u}$, лежащее между $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{a}_k$, не содержит первого вхождения никакой буквы слова $\mathbf{u}$. Отсюда вытекает, что выполняется условие (3.58) при $\ell = k$.

Достаточность. Как и в доказательстве предложения 3.26, схема наших рассуждений будет аналогична схеме доказательства достаточности предложения 3.23(i). Однако «канонический вид» блоков будет иметь еще более сложный вид, чем в предложении 3.26.

Предположим, что выполняются условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$ и (3.58) при $\ell = k$. Как и в доказательстве достаточности предложения 3.26, предположим, что $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$ имеет вид (1.7), а (3.56) является представлением $t_i\mathbf{u}_i$ в виде произведения чередующихся k-разделителей $s_0, s_1, \ldots, s_n$ и k-блоков $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Для любого $j = 0, 1, \ldots, n$ положим

$$X_j = \{x \in \mathrm{con}(\mathbf{a}_j) \mid \text{ первое вхождение } x \text{ в } \mathbf{u} \text{ лежит в } \mathbf{a}_j\}.$$

Заметим, что множество X_j можно определить другим эквивалентным способом. Ясно, что буква x лежит в X_j тогда и только тогда, когда $(1, k)$-ограничитель этой буквы в $\mathbf{u}$ совпадает с k-разделителем $\mathbf{u}$, непосредственно предшествующим $\mathbf{a}_j$. Иными словами,

$$X_j = \bigl\{x \in \mathrm{con}(\mathbf{a}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{u}, x)\bigr\}.$$

Положим $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$, $\mathbf{a}'_j = (\mathbf{a}_j)_X$ и $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{a}'_0\mathbf{a}'_1 \cdots \mathbf{a}'_n$. Пусть $X_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jq_j}\}$, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ и

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{u}_i} = {} & (c_1c_2 \cdots c_p) \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2) \cdot (s_1x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2) \cdot (s_2x_{21}^2 \cdots x_{2q_2}^2) \cdots \\ & \cdot (s_nx_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2).\end{aligned}$$

Как мы увидим ниже, слово $\overline{\mathbf{u}_i}$ является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом» $(k-1)$-блока $\mathbf{u}_i$.

Ясно, что $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i\mathbf{w}_2$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. Пусть $x \in X_j$. Если буква x является простой в $\mathbf{u}_i$, то x либо совпадает с одним из k-разделителей $s_1, s_2, \ldots, s_n$, либо лежит $\mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Однако оба эти варианта противоречат выбору x. Следовательно, буква x является кратной в $\mathbf{u}_i$. В силу тождества (3.27), мы можем предполагать, что $\mathrm{occ}_x(\mathbf{u}_i) = 2$. Таким образом, $\mathbf{u} = \mathbf{a}x\mathbf{b}x\mathbf{c}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ таких, что $x\mathbf{b}x$ является подсловом слова $\mathbf{u}_i$. Проверим, что $\mathbf{I}_k$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{a}x^2\mathbf{bc}$. Если $\mathbf{b} = \lambda$, то данное утверждение очевидно. Пусть теперь $\mathbf{b} \ne \lambda$. Поскольку $h_1^k(\mathbf{u}, x) = h_2^k(\mathbf{u}, x) = s_j$, мы имеем, что $D(\mathbf{u}, x) > k$. Тогда применив лемму 3.20(i) при $m = k$, мы можем последовательно переставить второе вхождение буквы x в $\mathbf{u}$ со всеми буквами слова $\mathbf{b}$. Мы получим, что $\mathbf{I}_k$ удовлетворяет тождеству $\mathbf{u} \approx \mathbf{a}x^2\mathbf{bc}$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_{j0}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{j1}) < \cdots < \ell_1(\mathbf{u}, x_{jq_j})$. Следовательно, $\mathbf{I_k}$ удовлетворяет тождеству

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2\mathbf{a}'_0) \cdot (s_1x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2\mathbf{a}'_1) \cdots (s_nx_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2\mathbf{a}'_n) \cdot \mathbf{w}_2. \quad (3.59)$$

Из определения множества X и слов вида $\mathbf{a}'_j$ вытекает, что $x \in \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$ для любого $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*)$. Теперь мы можем применить лемму 3.20(ii) и получить, что в $\mathbf{I}_k$ выполнено тождество

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{u}_i^* \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2) \cdot (s_1x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2) \cdots (s_nx_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2) \cdot \mathbf{w}_2.$$

Как мы видели выше, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) \subseteq \mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Поэтому мы можем применить тождество (3.27) и сделать слово $\mathbf{u}_i^*$ линейным. После этого применим лемму 3.16(i) и получим, что $\mathbf{I}_k$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}\mathbf{u} & \approx \mathbf{w}_1 \cdot (c_1c_2 \cdots c_p) \cdot (x_{01}^2 \cdots x_{0q_0}^2) \cdot (s_1x_{11}^2 \cdots x_{1q_1}^2) \cdots (s_nx_{n1}^2 \cdots x_{nq_n}^2) \cdot \mathbf{w}_2 \\ & = \mathbf{w}_1\overline{\mathbf{u}_i}\,\mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

Как и в доказательстве предложения 3.23(i), используя тождества, выполненные в многообразии $\mathbf{I}_k$, заменим последовательно $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ слова $\mathbf{u}$ на их «канонический вид» $\overline{\mathbf{u}_i}$ для всех $i = m, m-1, \dots, 0$. Мы получим, что $\mathbf{I}_k$ удовлетворяет тождествам (3.53). Положим $\mathbf{u}^\sharp = t_0\,\overline{\mathbf{u}_0}\,t_1\,\overline{\mathbf{u}_1}\cdots t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}$.

Перейдем к слову $\mathbf{v}$. По лемме 1.27, $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Кроме того, из условия (3.58) при $\ell = k$ и леммы 1.27 следует, что (3.57) является представлением $t_i\mathbf{v}_i$ в виде произведения чередующихся k-разделителей $s_0, s_1, \dots, s_n$ и k-блоков $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Из условия (3.58) вытекает, что

$$X_j = \{x \in \mathrm{con}(\mathbf{b}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{v}, x)\}$$

для всех $j = 0, 1, \dots, r_i$. Положим $\mathbf{b}'_j = (\mathbf{b}_j)_X$. Из условия (1.9) при $\ell = k$ следует, что j-е вхождение любой буквы из $\mathbf{u}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$ тогда и только тогда, когда j-е вхождение этой буквы в $\mathbf{v}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{v}_i$ для $j = 1, 2$. Также лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что если первое и второе вхождения буквы x в $\mathbf{u}$ не лежат в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$, то эта буква не входит в $\mathbf{u}_i$. Тогда $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) = \mathrm{con}(\mathbf{b}'_0\mathbf{b}'_1\cdots\mathbf{b}'_n)$. Отсюда вытекает, что $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ имеют одинаковый «канонический вид». Повторяя дословно рассуждения, приведенные выше, получаем, что многообразие $\mathbf{I}_k$ удовлетворяет тождествам $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^\sharp \approx \mathbf{v}$. $\square$

Доказательство леммы 3.27. Предположим, что $\mathbf{H}_k \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$. Проверим, что $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{I}_k$. Рассуждая от противного, предположим, что $\mathbf{I}_k \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда существует тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{I}_k$. Из предложений 3.26 и 3.28, а также включения $\mathbf{H}_k \subset \mathbf{X}$ вытекает, что выполняются условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$ и (3.55) при $\ell = k$, а условие (3.58) при $\ell = k$ не выполняется. Пусть (1.7) — k-разложение слова $\mathbf{u}$. Тогда из условия (3.55) и леммы 1.27 следует, что k-разложение слова $\mathbf{v}$ имеет вид (1.8). Поскольку условие (3.58) при $\ell = k$ не выполняется, найдется такая буква x, что $h_1^k(\mathbf{u}, x) \ne h_1^k(\mathbf{v}, x)$. Положим $t_i = h_1^k(\mathbf{u}, x)$ и $t_j = h_1^k(\mathbf{v}, x)$. Ясно, что $i \ne j$. Без ограничения общности можно считать, что $i < j$. Тогда $\ell_1(\mathbf{u}, x) < \ell_1(\mathbf{u}, t_j)$, но $\ell_1(\mathbf{v}, t_j) < \ell_1(\mathbf{u}, x)$. Из леммы 1.26 следует, что $D(\mathbf{u}, t_j) \le k$. Предположим, что $D(\mathbf{u}, t_j) = r < k$. Если $r = 0$, то t_j является 0-разделителем слова $\mathbf{u}$. Из условия (1.1) вытекает, что t_j также будет 0-разделителем слова $\mathbf{v}$. Тогда $t_j = h_1^0(\mathbf{v}, x)$, но $t_j \ne h_1^0(\mathbf{u}, x)$. По лемме 1.30, условие (1.9) выполняется при $\ell = p$ для всех $1 \le p \le k$. Получаем противоречие. Таким образом, $r \ge 1$. Теперь применим лемму 3.21(i) при $s = r$ и $x_s = t_j$ и получим, что $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{H}_r \subseteq \mathbf{H}_k$, что невозможно. Таким образом, лемма 3.27 доказана. $\square$

B) Третьим этапом проверки п. 4) предложения 3.15 является

Лемма 3.29. *Если $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов из интервала $[\mathbf{I}_k, \mathbf{F}_{k+1}]$, то либо $\mathbf{X} = \mathbf{I}_k$, либо $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{J}_k^1$.*

Для проверки этого факта, нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 3.30. *Пусть* $\mathbf{V}$ *— подмногообразие многообразия* $\mathbf{K}$, $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *— тождество, выполненное в* $\mathbf{V}$, *а* ℓ *и* r *— натуральные числа.*

(i) *Если справедливы условия* (1.1), (1.9) *и* (3.58), *но условие*

$$\text{если } x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}) \text{ и } D(\mathbf{u}, x) \le m, \text{ то } h_2^\ell(\mathbf{u}, x) = h_2^\ell(\mathbf{v}, x) \tag{3.60}$$

при $m = 1$ *не выполняется, то* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{I}_\ell$.

(ii) *Если справедливы условия* (1.1), (1.9), (3.58) *и* (3.60) *при* $m = r$, *но условие* (3.60) *при* $m = r + 1$ *не выполняется, то* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{J}_\ell^r$.

Доказательство. Предположим, что многообразие $\mathbf{V}$ удовлетворяет условию одного из утверждений (i) и (ii). Тогда выполняются условия (1.1), (1.9) и (3.58). Пусть m — наименьшее натуральное число для которого условие (3.60) не выполняется. Тогда найдется такая буква y_m, что $D(\mathbf{u}, y_m) = m$ и $h_2^\ell(\mathbf{u}, y_m) \ne h_2^\ell(\mathbf{v}, y_m)$. Положим $x_\ell = h_2^\ell(\mathbf{u}, y_m)$ и $z_\ell = h_2^\ell(\mathbf{v}, y_m)$. Ввиду леммы 1.26, $D(\mathbf{u}, x_\ell)$, $D(\mathbf{u}, z_\ell) \le \ell$. Заметим, что либо $D(\mathbf{u}, x_\ell) = \ell$, либо $D(\mathbf{u}, z_\ell) = \ell$. Действительно, если $D(\mathbf{u}, x_\ell)$, $D(\mathbf{u}, z_\ell) < \ell$, то $D(\mathbf{v}, x_\ell), D(\mathbf{v}, z_\ell) < \ell$ по лемме 1.31. В этом случае буквы x_ℓ и z_ℓ являются $(\ell-1)$-разделителями слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Но тогда $x_\ell = h_2^{\ell-1}(\mathbf{u}, y_m)$ и $z_\ell = h_2^{\ell-1}(\mathbf{v}, y_m)$, что противоречит условию (1.9). Предположим без ограничения общности, что $D(\mathbf{u}, x_\ell) = \ell$. В силу симметрии мы можем считать, что первое вхождение z_ℓ в слово $\mathbf{u}$ предшествует первому вхождению x_ℓ в это слово. В силу условия (3.58) и леммы 1.27, $\ell_1(\mathbf{v}, z_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, x_\ell)$. Тогда $\ell_2(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, x_\ell)$.

Теперь применим лемму 1.33 при $x_s = x_\ell$ и $s = \ell$ и получим, что существуют такие буквы $x_0, x_1, \dots, x_{\ell-1}$, что для всех $p = 0, 1, \dots, \ell - 1$ и $q = 0, 1, \dots, \ell - 2$ выполнены равенства $D(\mathbf{u}, x_p) = D(\mathbf{v}, x_p) = p$ и неравенства

$$\ell_1(\mathbf{w}, x_{p+1}) < \ell_1(\mathbf{w}, x_p) < \ell_2(\mathbf{w}, x_{p+1}) \text{ и } \ell_2(\mathbf{w}, x_{q+2}) < \ell_1(\mathbf{w}, x_q),$$

где $\mathbf{w}$ — одно из слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$.

Положим $y_{m-1} = h_2^{m-1}(\mathbf{u}, y_m)$. По лемме 1.28, $D(\mathbf{u}, y_{m-1}) = m - 1$ и $\ell_1(\mathbf{u}, y_m) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{m-1})$. Кроме того, из условия (1.9) и леммы 1.30 следует, что $h_2^{m-1}(\mathbf{v}, y_m) = h_2^{m-1}(\mathbf{u}, y_m) = y_{m-1}$. Снова применим лемму 1.28 и получим, что $D(\mathbf{v}, y_{m-1}) = m - 1$ и $\ell_1(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-1})$. Ввиду леммы 1.26, буква $x_{\ell-1}$ является ℓ-разделителем слова $\mathbf{u}$. Тогда $\ell_2(\mathbf{u}, y_m) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{\ell-1})$, поскольку $x_\ell = h_2^\ell(\mathbf{u}, y_m)$ и $\ell_1(\mathbf{u}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{\ell-1})$.

Лемма 3.16(ii) позволяет считать, что буквы y_m и x_p при $1 \le p \le \ell$ встречаются ровно по два раза в каждом из слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два случая, соответствующие утверждениям (i) и (ii).

Случай 1: $m = 1$. Ввиду сказанного выше, тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{2\ell+4} y_1 \mathbf{u}_{2\ell+3} y_0 \mathbf{u}_{2\ell+2} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell+1} y_1 \mathbf{u}_{2\ell} x_{\ell-1} \mathbf{u}_{2\ell-1} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell-2} x_{\ell-2} \mathbf{u}_{2\ell-3} x_{\ell-1} \cdots \\
&\quad \cdot \mathbf{u}_4 x_1 \mathbf{u}_3 x_2 \mathbf{u}_2 x_0 \mathbf{u}_1 x_1 \mathbf{u}_0 \\
\approx\ &\mathbf{v}_{2\ell+4} y_1 \mathbf{v}_{2\ell+3} y_0 \mathbf{v}_{2\ell+2} y_1 \mathbf{v}_{2\ell+1} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell} x_{\ell-1} \mathbf{v}_{2\ell-1} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell-2} x_{\ell-2} \mathbf{v}_{2\ell-3} x_{\ell-1} \cdots \\
&\quad \cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0
\end{aligned}$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2\ell+4}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2\ell+4}$ таких, что $x_s, y_0,\ y_1 \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i)$ для $0 \le s \le \ell$ и $0 \le i \le 2\ell + 4$. Подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в этом тождестве, кроме $x_0, x_1, \ldots, x_\ell, y_0$ и y_1. Мы получим тождество

$$y_1 y_0 x_\ell y_1 x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \approx y_1 y_0 y_1 x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1,$$

т.е. тождество γ_ℓ. Утверждение (i) доказано.

Случай 2: $m > 1$. Докажем, что $\ell_2(\mathbf{v}, x_m) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$ и $\ell_2(\mathbf{u}, x_m) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1})$. Положим $y_{m-2} = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1})$. Поскольку $D(\mathbf{v}, y_{m-1}) = m-1$, из леммы 1.28 вытекает, что $D(\mathbf{v}, y_{m-2}) = m-2$ и $\ell_1(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Напомним, что $\ell_1(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-1})$, откуда $\ell_1(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Поскольку $D(\mathbf{v}, y_m) = m$, мы можем применить лемму 1.32 и получить, что $\ell_2(\mathbf{v}, y_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Первое вхождение x_ℓ в $\mathbf{v}$ предшествует второму вхождению y_m в $\mathbf{v}$, откуда следует, что $\ell_1(\mathbf{v}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Тогда из леммы 1.32 вытекает, что $\ell_2(\mathbf{v}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Следовательно, $\ell_1(\mathbf{v}, x_{\ell-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Если $\ell - 1 \ge m$, то применим лемму 1.32 и получим, что $\ell_2(\mathbf{v}, x_{\ell-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим, что $\ell_2(\mathbf{v}, x_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. В частности, $\ell_1(\mathbf{v}, x_m) < \ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2})$. В силу леммы 1.26, буквы x_m и y_{m-2} являются ℓ-разделителями слова $\mathbf{v}$. Теперь применим лемму 1.27 и получим, что $\ell_1(\mathbf{u}, x_m) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2})$. Тогда, по лемме 1.32, $\ell_2(\mathbf{u}, x_m) < \ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2})$. Далее, поскольку первое вхождение y_{m-2} в $\mathbf{v}$ предшествует второму вхождению y_{m-1}, имеем $\ell_2(\mathbf{v}, x_m) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$. В силу условия (1.9) и леммы 1.30, $h_2^{m-2}(\mathbf{u}, y_{m-1}) = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1}) = y_{m-2}$, откуда $\ell_2(\mathbf{u}, x_m) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1})$.

Пусть теперь $m > 2$. Заметим, что

$$\ell_1(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_m) < \ell_1(\mathbf{u}, x_\ell) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{\ell-1}) < \cdots < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-3}).$$

Если $\ell_1(\mathbf{u}, x_{m-3}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1})$, то буква x_{m-3} лежит между первым и вторым вхождениями y_{m-1} в $\mathbf{u}$. Поскольку x_{m-3} является $(m-3)$-разделителем слова $\mathbf{u}$, мы получаем противоречие с равенством $D(\mathbf{u}, y_{m-1}) = m - 1$. Следовательно, если $m > 2$, то $\ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-3})$.

Заметим, что выполняется одно из трех условий:

$$\ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2}); \tag{3.61}$$

$$\ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, x_{m-1}); \tag{3.62}$$

$$\ell_2(\mathbf{u}, x_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}). \tag{3.63}$$

Предположим, что выполнено условие (3.61). В этом случае $\ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2})$. Тогда, в силу леммы 1.27, $\ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$. Поскольку, по лемме 1.30, $y_{m-2} = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1})$, мы имеем, что $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$. Если $m > 2$, то применим лемму 1.33 при $x_s = y_{m-2}$ и $s = m-2$ и получим, что существуют буквы $y_0, y_1, \ldots, y_{m-3}$ такие, что $D(\mathbf{u}, y_p) = D(\mathbf{v}, y_p) = p$ для любого $p = 0, 1, \ldots, m-2$. Кроме того, для любого $p = 0, 1, \ldots, m-2$ и для любого $\mathbf{w} \in \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ выполнены неравенства

$$\ell_1(\mathbf{w}, y_{p+1}) < \ell_1(\mathbf{w}, y_p) < \ell_2(\mathbf{w}, y_{p+1}) \text{ и } \ell_2(\mathbf{w}, y_{p+2}) < \ell_1(\mathbf{w}, y_p).$$

Лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что буквы y_p при $1 \le p \le m$ входят ровно по два раза в каждое из слов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$. Ввиду сказанного выше, тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{2\ell+5} y_m \mathbf{u}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{u}_{2\ell+3} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell+2} y_m \mathbf{u}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{u}_{2\ell} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{u}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\
&\cdot \mathbf{u}_{2m+1} y_{m-2} \mathbf{u}_{2m} y_{m-1} \mathbf{u}_{2m-1} x_{m-1} \mathbf{u}_{2m-2} y_{m-3} \mathbf{u}_{2m-2} y_{m-2} \cdots \\
&\cdot \mathbf{u}_4 y_1 \mathbf{u}_3 y_2 \mathbf{u}_2 y_0 \mathbf{u}_1 y_1 \mathbf{u}_0 \\
\approx\ &\mathbf{v}_{2\ell+5} y_m \mathbf{v}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{v}_{2\ell+3} y_m \mathbf{v}_{2\ell+2} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{v}_{2\ell} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{v}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\
&\cdot \mathbf{v}_{2m+1} y_{m-2} \mathbf{v}_{2m} y_{m-1} \mathbf{v}_{2m-1} x_{m-1} \mathbf{v}_{2m-2} y_{m-3} \mathbf{v}_{2m-2} y_{m-2} \cdots \\
&\cdot \mathbf{v}_4 y_1 \mathbf{v}_3 y_2 \mathbf{v}_2 y_0 \mathbf{v}_1 y_1 \mathbf{v}_0
\end{aligned}
$$

для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+5}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+5}$ таких, что $x_s, y_t \notin \operatorname{con}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i)$ для всех $m-1 \le s \le \ell$, $0 \le t \le m$ и $0 \le i \le 2\ell+5$. Подставим 1 вместо всех букв, встречающихся в этом тождестве, кроме букв $y_0, y_1, \dots, y_m$ и $x_{m-1}, x_m, \dots, x_\ell$. Мы получим тождество

$$
\begin{aligned}
&y_m y_{m-1} x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots y_{m-2} y_{m-1} x_{m-1} y_{m-3} y_{m-2} \cdots y_1 y_2 y_0 y_1 \\
\approx\ &y_m y_{m-1} y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots y_{m-2} y_{m-1} x_{m-1} y_{m-3} y_{m-2} \cdots y_1 y_2 y_0 y_1.
\end{aligned}
$$

В полученное тождество подставим y_i вместо x_i для всех $i = 0, 1, \dots, m-2$. В результате мы получим тождество

$$
\begin{aligned}
&y_m \overset{(1)}{y_{m-1}} x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} \overset{(2)}{y_{m-1}} \overset{(2)}{x_{m-1}} x_{m-3} x_{m-2} \cdots \\
&\cdot x_1 x_2 x_0 x_1 \\
\approx\ &y_m \overset{(1)}{y_{m-1}} y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} \overset{(2)}{y_{m-1}} \overset{(2)}{x_{m-1}} x_{m-3} x_{m-2} \cdots \\
&\cdot x_1 x_2 x_0 x_1.
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

В силу леммы 3.16(i), мы можем переставить местами вторые вхождения букв x_{m-1} и y_{m-1} в обоих частях тождества (3.64). В результате получаем тождество δ_ℓ^{m-1}.

Предположим теперь, что выполняется условие (3.62). Если $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$, то $\ell_1(\mathbf{v}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2})$. В силу леммы 1.27, $\ell_1(\mathbf{u}, y_{m-2}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2})$. Поскольку, по лемме 1.30, $y_{m-2} = h_2^{m-2}(\mathbf{v}, y_{m-1})$, мы имеем, что $\ell_2(\mathbf{u}, y_{m-1}) < \ell_1(\mathbf{u}, x_{m-2})$. Это противоречит условию (3.62). Следовательно, $\ell_1(\mathbf{v}, x_{m-2}) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$.

Предположим, что $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1})$. Тогда тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{2\ell+5} y_m \mathbf{u}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{u}_{2\ell+3} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell+2} y_m \mathbf{u}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{u}_{2\ell} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{u}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\
&\cdot \mathbf{u}_{2m+1} x_{m-2} \mathbf{u}_{2m} y_{m-1} \mathbf{u}_{2m-1} x_{m-1} \mathbf{u}_{2m-2} x_{m-3} \mathbf{u}_{2m-2} x_{m-2} \cdots \\
&\cdot \mathbf{u}_4 x_1 \mathbf{u}_3 x_2 \mathbf{u}_2 x_0 \mathbf{u}_1 x_1 \mathbf{u}_0 \\
\approx\ &\mathbf{v}_{2\ell+5} y_m \mathbf{v}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{v}_{2\ell+3} y_m \mathbf{v}_{2\ell+2} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{v}_{2\ell} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{v}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\
&\cdot \mathbf{v}_{2m+1} x_{m-2} \mathbf{v}_{2m} y_{m-1} \mathbf{v}_{2m-1} x_{m-1} \mathbf{v}_{2m-2} x_{m-3} \mathbf{v}_{2m-2} x_{m-2} \cdots \\
&\cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0
\end{aligned}
$$

для некоторых слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{2\ell+5}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2\ell+5}$ таких, что $x_s, y_{m-1}, y_m \notin \operatorname{con}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i)$ для всех $i = 0, 1, \dots, 2\ell+5$ и $s = 0, 1, \dots, \ell$. Подставим 1 вместо всех букв, входящих в это тождество, кроме букв $y_{m-1}, y_m, x_0, x_1, \dots, x_\ell$.

Мы получим тождество (3.64). Как мы уже показали выше, это тождество вместе с тождеством σ_2 влечет тождество δ_ℓ^{m-1}.

Если $\ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$, то рассуждения, аналогичные вышеприведенным, показывают, что в $\mathbf{V}$ выполнено тождество

$$
\begin{aligned}
&y_m \overset{(1)}{y_{m-1}} x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} \overset{(2)}{y_{m-1}} \overset{(2)}{x_{m-1}} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \\
\approx\ &y_m y_{m-1} y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} x_{m-1} y_{m-1} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1.
\end{aligned}
$$

В этом случае мы можем применить тождество σ_2 к левой части последнего тождества и получить тождество δ_ℓ^{m-1}.

Предположим, наконец, что выполняется условие (3.63). Если справедливо неравенство $\ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1})$, то тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{u}_{2\ell+5} y_m \mathbf{u}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{u}_{2\ell+3} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell+2} y_m \mathbf{u}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{u}_{2\ell} x_\ell \mathbf{u}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{u}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\
&\cdot \mathbf{u}_{2m+1} x_{m-2} \mathbf{u}_{2m} x_{m-1} \mathbf{u}_{2m-1} y_{m-1} \mathbf{u}_{2m-2} x_{m-3} \mathbf{u}_{2m-2} x_{m-2} \cdots \\
&\cdot \mathbf{u}_4 x_1 \mathbf{u}_3 x_2 \mathbf{u}_2 x_0 \mathbf{u}_1 x_1 \mathbf{u}_0 \\
\approx\ &\mathbf{v}_{2\ell+5} y_m \mathbf{v}_{2\ell+4} y_{m-1} \mathbf{v}_{2\ell+3} y_m \mathbf{v}_{2\ell+2} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell+1} x_{\ell-1} \mathbf{v}_{2\ell} x_\ell \mathbf{v}_{2\ell-1} x_{\ell-2} \mathbf{v}_{2\ell-2} x_{\ell-1} \cdots \\
&\cdot \mathbf{v}_{2m+1} x_{m-2} \mathbf{v}_{2m} y_{m-1} \mathbf{v}_{2m-1} x_{m-1} \mathbf{v}_{2m-2} x_{m-3} \mathbf{v}_{2m-2} x_{m-2} \cdots \\
&\cdot \mathbf{v}_4 x_1 \mathbf{v}_3 x_2 \mathbf{v}_2 x_0 \mathbf{v}_1 x_1 \mathbf{v}_0
\end{aligned}
$$

для некоторых слов $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{2\ell+5}$ и $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{2\ell+5}$ таких, что $x_s, y_{m-1}, y_m \notin \mathrm{con}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_i)$ для всех $0 \le s \le \ell$ и $0 \le i \le 2\ell+5$. Подставим 1 вместо всех букв, входящих в данное тождество, кроме букв $y_{m-1}, y_m, x_0, x_1, \ldots, x_\ell$, и получим тождество

$$
\begin{aligned}
&y_m y_{m-1} x_\ell y_m x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} x_{m-1} y_{m-1} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1 \\
\approx\ &y_m \overset{(1)}{y_{m-1}} y_m x_\ell x_{\ell-1} x_\ell x_{\ell-2} x_{\ell-1} \cdots x_{m-2} \overset{(2)}{y_{m-1}} \overset{(2)}{x_{m-1}} x_{m-3} x_{m-2} \cdots x_1 x_2 x_0 x_1.
\end{aligned}
$$

Затем, применив к правой части полученного тождества тождество σ_2, мы получим тождество δ_ℓ^{m-1}.

Если $\ell_2(\mathbf{v}, x_{m-1}) < \ell_2(\mathbf{v}, y_{m-1})$, то выполнение тождества δ_ℓ^{m-1} в $\mathbf{V}$ доказывается рассуждениями, аналогичными приведенным выше. $\square$

Предложение 3.31. *Нетривиальное тождество* $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ *выполнено в многообразии* $\mathbf{J}_k^r$ *тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.1), (1.9) *при* $\ell = k$, (3.58) *при* $\ell = k$ *и* (3.60) *при* $\ell = k$ *и* $m = r$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что в $\mathbf{J}_k^r$ выполнено нетривиальное тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$. Условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$ и (3.58) при $\ell = k$ вытекают из предложения 3.28 и включения $\mathbf{I}_k \subseteq \mathbf{J}_k^r$. Нам остается проверить выполнение условия (3.60) при $\ell = k$ и $m = r$. Как и в доказательстве предложения 3.23(i), мы можем предположить, что $\mathbf{u} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{a})\mathbf{q}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{p}\xi(\mathbf{b})\mathbf{q}$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, эндоморфизма $\xi \in \mathrm{End}(F^1)$ и тождества $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \{\Phi, \delta_k^r\}$.

Если $\mathbf{a} \approx \mathbf{b} \in \Phi$, то, по предложению 3.23(ii), условие (1.9) выполняется для любого ℓ. Очевидно, что отсюда вытекает требуемое заключение.

Предположим теперь, что $\mathbf{a} \approx \mathbf{b}$ совпадает с δ_k^r. Тогда

$$\xi(\mathbf{a}) = \mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1,$$
$$\xi(\mathbf{b}) = \mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1$$

для некоторых слов $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ и $\mathbf{b}_r, \mathbf{b}_{r+1}$, откуда следует, что

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q},$$
$$\mathbf{v} = \mathbf{p}\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{b}_r\mathbf{a}_k\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_{k-1}\mathbf{a}_k\mathbf{a}_{k-2}\mathbf{a}_{k-1}\cdots\mathbf{a}_{r-1}\mathbf{a}_r\mathbf{b}_r\mathbf{a}_{r-2}\mathbf{a}_{r-1}\cdots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_0\mathbf{a}_1\mathbf{q}.$$

По лемме 3.19, $D(\mathbf{a}, x_k) = k$. Тогда из леммы 1.34 вытекает, что подслово $\mathbf{a}_k$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{b}_{r+1}$ и $\mathbf{a}_{k-1}$, не содержит $(k-1)$-разделителей слова $\mathbf{u}$. Очевидно также, что подслово $\mathbf{b}_{r+1}$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{b}_r$ и $\mathbf{a}_k$, не содержит s-разделителей слова $\mathbf{u}$ для любого s. Следовательно, подслово $\mathbf{b}_{r+1}\mathbf{a}_k$ слова $\mathbf{u}$, расположенное между $\mathbf{b}_r$ и $\mathbf{a}_{k-1}$, лежит в некотором $(k-1)$-блоке слова $\mathbf{u}$. Снова применим лемму 1.34 и получим, что подслово $\mathbf{b}_{r+1}$, расположенное между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{b}_r$, не содержит никаких s-разделителей для всех $s \le r$. Отсюда следует, что если второе вхождение некоторой буквы в слово $\mathbf{u}$ лежит в подслове $\mathbf{b}_{r+1}$, расположенном между $\mathbf{b}_r$ и $\mathbf{a}_k$, то глубина этой буквы $> r$. Отсюда следует, что условие (3.60) выполняется при $\ell = k$ и $m = r$.

Достаточность. Как и в доказательстве предложений 3.26 и 3.28, схема наших рассуждений будет аналогична схеме доказательства достаточности предложения 3.23(i). Однако «канонический вид» блоков будет иметь еще более сложный вид, чем в предложении 3.28.

Предположим, что выполняются условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$, (3.58) при $\ell = k$ и (3.60) при $\ell = k$ и $m = r$. Как и в доказательстве достаточности предложения 3.26, предположим, что $(k-1)$-разложение слова $\mathbf{u}$ имеет вид (1.7), а (3.56) является представлением подслова $t_i\mathbf{u}_i$ в виде произведения чередующихся k-разделителей $s_0, s_1, \ldots, s_n$ и k-блоков $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Ясно, что $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1\mathbf{u}_i\mathbf{w}_2$ для некоторых (возможно пустых) слов $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$. Для всех $j = 0, 1, \ldots, n$ положим

$$X_j = \{x \in \mathrm{con}(\mathbf{a}_j) \mid \text{ первое вхождение } x \text{ в } \mathbf{u} \text{ лежит в } \mathbf{a}_j\}.$$

Пусть $X_j = \{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jq_j}\}$ и $X = X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$, $\mathbf{a}'_j = (\mathbf{a}_j)_X$. Как и в доказательстве достаточности предложения 3.28, мы можем проверить, что

$$X_j = \bigl\{x \in \mathrm{con}(\mathbf{a}_j) \mid s_j = h_1^k(\mathbf{u}, x)\bigr\}.$$

Для любого $j = 0, 1, \ldots, n$ положим

$$Z_j = \{z \in \mathrm{con}(\mathbf{a}'_j) \mid D(\mathbf{u}, z) \le r\},$$

$Z = Z_0 \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_n$, $\mathbf{a}''_j = (\mathbf{a}'_j)_Z$ и $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{a}''_0\mathbf{a}''_1\cdots\mathbf{a}''_n$. Пусть $Z_j = \{z_{j1}, z_{j2}, \ldots, z_{jh_j}\}$, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*) = \{c_1, c_2, \ldots, c_p\}$ и

$$\overline{\mathbf{u}_i} = (c_1c_2\cdots c_p)\cdot(x_{01}^2\cdots x_{0q_0}^2 z_{01}\cdots z_{0h_0})\cdot(s_1x_{11}^2\cdots x_{1q_1}^2 z_{11}\cdots z_{1h_1})\cdots$$
$$\cdot\,(s_nx_{n1}^2\cdots x_{nq_n}^2 z_{n1}\cdots z_{nh_n}).$$

Как мы увидим ниже, слово $\overline{\mathbf{u}_i}$ является ничем иным, как упомянутым выше «каноническим видом» $(k-1)$-блока $\mathbf{u}_i$.

Как и в доказательстве достаточности предложения 3.28, мы можем проверить, что $\mathbf{J}_k^r$ удовлетворяет тождеству (3.59). Из определения слов вида $\mathbf{a}'_j$ и множества X следует, что $\mathrm{con}(\mathbf{a}'_0\mathbf{a}'_1\cdots\mathbf{a}'_n)\subseteq\mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Следовательно, если $z\in Z_j$, то мы можем считать, что $\mathrm{occ}_z(\mathbf{u}_i)=1$, поскольку, по лемме 3.16(ii), $\mathbf{J}_k^r$ удовлетворяет тождеству (3.27). Тогда без ограничения общности можно считать, что $\ell_1(\mathbf{u},z_{j1})<\ell_1(\mathbf{u},z_{j2})<\cdots<\ell_1(\mathbf{u},z_{jh_j})$. Поскольку $z\in\mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$ и $D(\mathbf{u},z)>r$ для любого $z\in\mathrm{con}(\mathbf{a}''_j)$, мы можем применить лемму 3.20(i) при $m=r$ и заключить, что в $\mathbf{J}_k^r$ выполняется тождество

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\approx\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{u}_i^*\cdot(x_{01}^2\cdots x_{0q_0}^2z_{01}\cdots z_{0h_0})\cdot(s_1x_{11}^2\cdots x_{1q_1}^2z_{11}\cdots z_{1h_1})\cdots\\ \cdot\,(s_nx_{n1}^2\cdots x_{nq_n}^2z_{n1}\cdots z_{nh_n})\cdot\mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

Как мы показали выше, $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*)\subseteq\mathrm{con}(\mathbf{w}_1)$. Следовательно, применив тождество (3.27), мы можем сделать слово $\mathbf{u}_i^*$ линейным. Тогда из леммы 3.16(i) вытекает, что $\mathbf{J}_k^r$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}\mathbf{u}&\approx\mathbf{w}_1\cdot(c_1c_2\cdots c_p)\cdot(x_{01}^2\cdots x_{0q_0}^2z_{01}\cdots z_{0h_0})\cdot(s_1x_{11}^2\cdots x_{1q_1}^2z_{11}\cdots z_{1h_1})\cdots\\ &\qquad\cdot\,(s_nx_{n1}^2\cdots x_{nq_n}^2z_{n1}\cdots z_{nh_n})\cdot\mathbf{w}_2\\ &=\mathbf{w}_1\overline{\mathbf{u}_i}\,\mathbf{w}_2.\end{aligned}$$

Таким образом, как и в доказательстве предложения 3.23(i), используя выполненные в многообразии $\mathbf{J}_k^r$ тождества, мы можем последовательно заменить $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ слова $\mathbf{u}$ на их «канонический вид» $\overline{\mathbf{u}_i}$ для всех $i=m,m-1,\dots,0$. Это означает, что $\mathbf{J}_k^r$ удовлетворяет тождествам (3.53). Положим $\mathbf{u}^\sharp=t_0\,\overline{\mathbf{u}_0}\,t_1\,\overline{\mathbf{u}_1}\cdots t_m\,\overline{\mathbf{u}_m}$.

Перейдем к слову $\mathbf{v}$. По лемме 1.27, $(k-1)$-разложение этого слова имеет вид (1.8). Более того, из условия (3.58) при $\ell=k$ и леммы 1.27 вытекает, что (3.57) является представлением $t_i\mathbf{v}_i$ в виде произведения чередующихся k-разделителей $s_0,s_1,\dots,s_n$ и k-блоков $\mathbf{b}_0,\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$. Из условия (3.58) следует, что

$$X_j=\bigl\{x\in\mathrm{con}(\mathbf{b}_j)\mid s_j=h_1^k(\mathbf{v},x)\bigr\}$$

для всех $j=0,1,\dots,n$. Положим $\mathbf{b}'_j=(\mathbf{b}_j)_X$. Поскольку условие (3.60) выполняется при $\ell=k$ и $m=r$, мы имеем, что

$$Z_j=\{z\in\mathrm{con}(\mathbf{b}'_j)\mid D(\mathbf{v},z)\le r\}$$

для всех $j=0,1,\dots,n$. Положим $\mathbf{b}''_j=(\mathbf{b}'_j)_Z$. Из условия (1.9) при $\ell=k$ следует, что j-е вхождение некоторой буквы в слово $\mathbf{u}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$ тогда и только тогда, когда j-е вхождение этой буквы в $\mathbf{v}$ лежит в $(k-1)$-блоке $\mathbf{v}_i$ для любого $j=1,2$. Кроме того, лемма 3.16(ii) позволяет предположить, что если первое и второе вхождения некоторой буквы в слово $\mathbf{u}$ не лежат в $(k-1)$-блоке $\mathbf{u}_i$, то эта буква не входит в данный $(k-1)$-блок. Тогда $\mathrm{con}(\mathbf{u}_i^*)=\mathrm{con}(\mathbf{b}''_0\mathbf{b}''_1\cdots\mathbf{b}''_n)$. Следовательно, $(k-1)$-блоки $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{v}_i$ имеют одинаковый «канонический вид». Повторяя дословно рассуждения, приведенные выше, получаем, что многообразие $\mathbf{J}_k^r$ удовлетворяет тождествам $\mathbf{u}\approx\mathbf{u}^\sharp\approx\mathbf{v}$. $\square$

Доказательство леммы 3.29. Предположим, что $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}_{k+1}$. Проверим, что $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{J}_k^1$. Рассуждая от противного, предположим, что $\mathbf{J}_k^1 \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда существует тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{J}_k^1$. В этом случае из предложений 3.28 и 3.31, а также включения $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{X}$, следует, что выполняются условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$ и (3.58) при $\ell = k$, а условие (3.60) при $\ell = k$ и $m = 1$ не выполняется. Тогда из леммы 3.30(i) вытекает неверное включение $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{I}_k$. Лемма 3.29 доказана. $\square$

Г) Четвертым этапом проверки утверждения 4) предложения 3.15 является

Лемма 3.32. *Если $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов из интервала $[\mathbf{J}_k^m, \mathbf{F}_{k+1}]$ для некоторых $1 \le m < k$, то либо $\mathbf{X} = \mathbf{J}_k^m$, либо $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{J}_k^{m+1}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{J}_k^{m+1} \nsubseteq \mathbf{X}$. Тогда существует тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{J}_k^{m+1}$. Из предложения 3.31 и включения $\mathbf{J}_k^m \subset \mathbf{X}$ следует, что условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$, (3.58) при $\ell = k$ и (3.60) при $\ell = k$ выполнены, в то время как условие

$$\text{если } x \in \mathrm{con}(\mathbf{u}) \text{ и } D(\mathbf{u}, x) \le m+1, \text{ то } h_2^k(\mathbf{u}, x) = h_2^k(\mathbf{v}, x)$$

не выполняется. Тогда из леммы 3.30(ii) вытекает, что $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{J}_k^m$, что невозможно. Мы видим, что либо $\mathbf{X} = \mathbf{J}_k^m$, либо $\mathbf{J}_k^{m+1} \subseteq \mathbf{X}$. $\square$

Д) Пятым этапом проверки утверждения 4) предложения 3.15 является

Лемма 3.33. *Если $\mathbf{X}$ — многообразие моноидов из интервала $[\mathbf{J}_k^k, \mathbf{F}_{k+1}]$, то либо $\mathbf{X} = \mathbf{J}_k^k$, либо $\mathbf{X} = \mathbf{F}_{k+1}$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{X} \subset \mathbf{F}_{k+1}$. Поскольку $\mathbf{F}_{k+1} \nsubseteq \mathbf{X}$, найдется тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$, выполненное в $\mathbf{X}$, но не выполненное в $\mathbf{F}_{k+1}$. Условия (1.1), (1.9) при $\ell = k$, (3.58) при $\ell = k$ и (3.60) при $\ell = m = k$ вытекают из предложения 3.31 и включения $\mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{X}$. А из предложения 3.23(i) следует, что $h_2^k(\mathbf{u}, x) \ne h_2^k(\mathbf{v}, x)$ для некоторой буквы $x \in \mathrm{con}(\mathbf{u})$ такой, что $D(\mathbf{u}, x) > k$. Применяя лемму 3.22, мы получим неверное включение $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{J}_k^k$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Е) Здесь мы докажем включения (3.25). Для этого мы будем использовать лемму 3.19 и табл. 2. Напомним, что нестрогие включения (3.29) справедливы в силу леммы 3.18. Если тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ совпадает с α_k, то $D(\mathbf{u}, x_k) = k$, а $h_1^k(\mathbf{u}, x_k) = \lambda$ и $h_1^k(\mathbf{v}, x_k) = y_k$. Тогда из предложения 3.26 следует, что $\mathbf{F}_k \subset \mathbf{H}_k$. Предположим, что тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ совпадает с тождеством β_k. Тогда $h_1^k(\mathbf{u}, x) = \lambda$, в то время как $h_1^k(\mathbf{v}, x) = x_k$. Применим предложение 3.28 и получим, что $\mathbf{H}_k \subset \mathbf{I}_k$. Пусть теперь $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ совпадает с γ_k. В этом случае $D(\mathbf{u}, y_1) = 1$, но $h_2^k(\mathbf{u}, y_1) = y_0$ и $h_2^k(\mathbf{v}, y_1) = x_k$. В силу предложения 3.31, $\mathbf{I}_k \subset \mathbf{J}_k^1$. Предположим теперь, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ совпадает с δ_k^m для некоторого $1 \le m < k$. Тогда $D(\mathbf{u}, y_{m+1}) = m+1$, $h_2^k(\mathbf{u}, y_{m+1}) = y_m$ и $h_2^k(\mathbf{v}, y_{m+1}) = x_k$. Снова применим предложение 3.31 и получим, что $\mathbf{J}_k^m \subset \mathbf{J}_k^{m+1}$. Наконец, предположим, что тождество $\mathbf{u} \approx \mathbf{v}$ совпадает с δ_k^k.

Поскольку $h_2^k(\mathbf{u}, y_{k+1}) = y_k$ и $h_2^k(\mathbf{v}, y_{k+1}) = x_k$, из предложения 3.23(i) следует, что $\mathbf{J}_k^k \subset \mathbf{F}_{k+1}$.

Таким образом, мы доказали включения (3.25). Следовательно, многообразия $\mathbf{F}_k$, $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{I}_k$, $\mathbf{J}_k^1$, $\mathbf{J}_k^2$, ..., $\mathbf{J}_k^k$ и $\mathbf{F}_{k+1}$ попарно различны. Из этого факта и лемм 3.24, 3.27, 3.29, 3.32 (при $m = 1, 2, \ldots, k-1$) и 3.33 следует утверждение 4) предложения 3.15. С учетом леммы 1.14(ii) и результатов подразделов 3.4.1 и 3.4.3, доказательство предложения 3.15 завершено. □

Из лемм 1.12 и 1.13(ii), предложений 3.12–3.15 и утверждений, двойственных к предложениям 3.14 и 3.15, следует достаточность в теореме 3.1. Необходимость была доказана в разделе 3.2. Теорема 3.1 полностью доказана. □

3.5. Следствия

В этом разделе собран ряд следствий из теоремы 3.1. Прежде всего, укажем исчерпывающий список негрупповых цепных многообразий моноидов. Из теоремы 3.1, лемм 1.12 и 1.13(ii), предложений 3.12–3.15 и утверждений, двойственных к предложениям 3.14 и 3.15, вытекает

Следствие 3.34. *Многообразия* $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\overleftarrow{\mathbf{E}}$, $\mathbf{F}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{F}_k}$, $\mathbf{H}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{H}_k}$, $\mathbf{I}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{I}_k}$, $\mathbf{J}_k^m$, $\overleftarrow{\mathbf{J}_k^m}$, $\mathbf{K}$, $\overleftarrow{\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{LRB}$, $\mathbf{M}$, $\overleftarrow{\mathbf{M}}$, $\mathbf{N}$, $\overleftarrow{\mathbf{N}}$, $\mathbf{RRB}$, $\mathbf{SL}$, *где* $n \ge 2$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $1 \le m \le k$, *и только они являются негрупповыми цепными многообразиями моноидов.* □

Множество всех негрупповых цепных многообразий моноидов, упорядоченных по включению, вместе с тривиальным многообразием, которое мы будем обозначать через $\mathbf{T}$, изображено на рис. 2. Интересно сравнить этот рисунок с диаграммой частично упорядоченного множества всех негрупповых цепных многообразий полугрупп (как мы уже упоминали во введении, такие многообразия были полностью описаны в [14]). Эта диаграмма изображена на рис. 3, где $\mathbf{LZ} = \mathrm{var}\{xy \approx x\}$, $\mathbf{RZ} = \mathrm{var}\{xy \approx y\}$, $\mathbf{ZM} = \mathrm{var}\{xy \approx 0\}$, $\mathbf{N}_k = \mathrm{var}\{x^2 \approx x_1 x_2 \cdots x_k \approx 0,\ xy \approx yx\}$ для всех $k \ge 3$, $\mathbf{N}_\omega = \mathrm{var}\{x^2 \approx 0,\ xy \approx yx\}$, $\mathbf{N}_3^2 = \mathrm{var}\{x^2 \approx xyz \approx 0\}$ и $\mathbf{N}_3^c = \mathrm{var}\{xyz \approx 0,\ xy \approx yx\}$ (здесь через $\mathrm{var}\,\Sigma$ мы обозначаем многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ; как это обычно делается при рассмотрении многообразий полугрупп, система тождеств $\mathbf{w}x \approx x\mathbf{w} \approx \mathbf{w}$, в которой x не входит в запись слова $\mathbf{w}$, для краткости записывается в виде символического тождества $\mathbf{w} \approx 0$).

Мы видим, что за пределами группового случая существует 1 счетная серия и 6 «спорадических» цепных многообразий полугрупп, в то время как в случае моноидов имеется 10 счетных серий и 12 «спорадических» цепных многообразий. А именно, в полугрупповом случае мы имеем счетную серию $\mathbf{N}_k$ (включая $\mathbf{ZM}$ как $\mathbf{N}_2$) и «спорадические» многообразия $\mathbf{LZ}$, $\mathbf{RZ}$, $\mathbf{SL}$, $\mathbf{N}_3^2$, $\mathbf{N}_3^c$, $\mathbf{N}_\omega$, а в случае моноидов — счетные серии $\mathbf{C}_n$ (включая $\mathbf{SL}$ как $\mathbf{C}_1$), $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{F}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{F}_k}$, $\mathbf{H}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{H}_k}$, $\mathbf{I}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{I}_k}$, $\mathbf{J}_k^m$, $\overleftarrow{\mathbf{J}_k^m}$ и «спорадические» многообразия $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\overleftarrow{\mathbf{E}}$, $\mathbf{K}$, $\overleftarrow{\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{LRB}$, $\mathbf{M}$, $\overleftarrow{\mathbf{M}}$, $\mathbf{N}$, $\overleftarrow{\mathbf{N}}$, $\mathbf{RRB}$. Можно сказать, что число негрупповых цепных многообразий в случае моноидов намного больше (в некотором неформальном смысле), чем в полугрупповом случае.

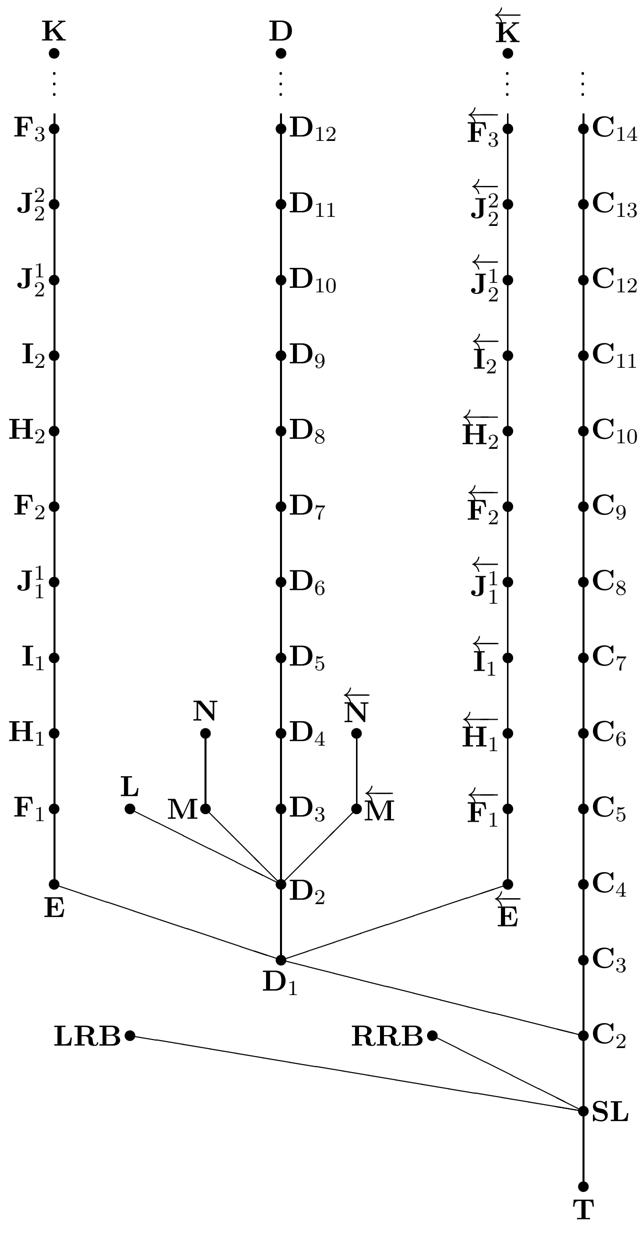

Рис. 2: все негрупповые цепные многообразия моноидов

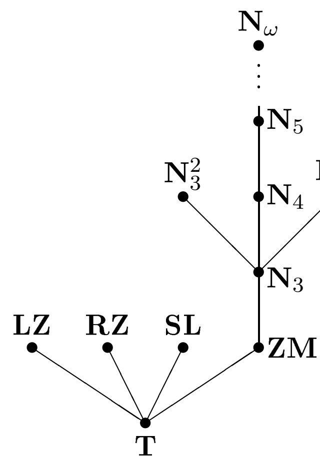

Рис. 3: все негрупповые цепные многообразия полугрупп

Как мы уже отмечали во введении, всякое негрупповое цепное многообразие полугрупп содержится в некотором максимальном цепном многообразии. Для многообразий моноидов аналог этого утверждения не имеет места: как видно из рис. 2, многообразие $\mathbf{C}_n$ при $n > 2$ не содержится ни в каком максимальном цепном многообразии. В следующих двух утверждениях указаны случаи, в которых справедлив аналог полугруппового результата. Рис. 2 показывает, что справедливо

Следствие 3.35. *Негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором максимальном цепном многообразии тогда и только тогда, когда оно не содержит многообразие* $\mathbf{C}_3$. □

Следствие 3.34 показывает, что коммутативные негрупповые цепные многообразия моноидов исчерпываются многообразиями **SL** и $\mathbf{C}_n$ при $n \geq 2$. Из этого утверждения и рис. 2 вытекает

Следствие 3.36. *Всякое некоммутативное негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором максимальном цепном многообразии.* □

Как уже отмечалось во введении, всякое негрупповое нецепное многообразие полугрупп содержит некоторое почти цепное многообразие. В следующем следствии мы упоминаем многообразие **O**, введенное в подразделе 3.2.3.

Следствие 3.37. *Если* **X** *— такое многообразие моноидов, что* $\mathbf{L} \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$, *то* **X** *не является цепным многообразием и не содержит никакое почти цепное подмногообразие.*

Доказательство. Из теоремы 3.1 следует, что не существует цепных многообразий моноидов, строго содержащих **L**. Отсюда вытекает, что **X** не является цепным. Нам остается проверить, что **X** не содержит никакого почти цепного многообразия. Рассуждая от противного, предположим, что $\mathbf{X}$ содержит почти цепное многообразие $\mathbf{Y}$. В силу теоремы 3.1, любое цепное подмногообразие многообразия $\mathbf{O}$ содержится в $\mathbf{L}$. В частности, $\mathbf{O}$ (а значит и $\mathbf{Y}$) не содержит несравнимых цепных подмногообразий. С другой стороны, будучи нецепным многообразием, $\mathbf{Y}$ содержит по крайней мере два несравнимых подмногообразия. Эти два многообразия являются собственными подмногообразиями многообразия $\mathbf{Y}$. Следовательно, они обязаны быть цепными, что невозможно. □

Напомним, что многообразие универсальных алгебр называется *локально конечным*, если все его конечно порожденные алгебры конечны. Многообразие называется *конечно порожденным*, если оно порождается конечной алгеброй. Ясно, что если многообразие содержится в некотором конечно порожденном многообразии, то оно локально конечно.

Следствие 3.38. *Произвольное негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором конечно порожденном многообразии и, в частности, является локально конечным.*

Доказательство. Нам достаточно проверить, что каждое из многообразий, перечисленных в теореме 3.1, содержится в некотором конечно порожденном многообразии. Хорошо известно, что любое собственное многообразие идемпотентных моноидов конечно порождено [27]. В частности, многообразия $\mathbf{LRB}$ и $\mathbf{RRB}$ обладают этим свойством. Очевидно, что моноид $S(\mathbf{w})$ конечен для любого слова $\mathbf{w}$. Поэтому леммы 1.8 и 3.7 обеспечивают требуемое заключение для многообразий $\mathbf{C}_n$ и $\mathbf{L}$ соответственно. Многообразие $\overleftarrow{\mathbf{N}}$ является конечно порожденным в силу примера 1 из исправления к работе [31]. В силу симметрии, остается рассмотреть многообразия $\mathbf{D}$ и $\mathbf{K}$.

Многообразие $\mathbf{D}$ не является конечно порожденным в силу [40, теорема 2], однако в [41, пример 5.3] показано, что $\mathbf{D}$ является подмногообразием многообразия, порожденного хорошо известным 6-элементным моноидом Брандта $B_2^1 = B_2 \cup \{1\}$, где

$$B_2 = \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 0,\ aba = a,\ bab = b \rangle = \{a, b, ab, ba, 0\}.$$

Наконец, нетрудно заметить, что если моноид M принадлежит $\mathbf{K}$ и состоит из k элементов, то M удовлетворяет тождеству α_k. Поэтому любое конечно порожденное подмногообразие в $\mathbf{K}$ содержится в $\mathbf{F}_k$ для некоторого k. В частности, многообразие $\mathbf{K}$ не является конечно порожденным. Однако из леммы 3.16 следует, что $\mathbf{K} \subseteq \mathrm{var}\{xyxzx \approx xyxz,\ \sigma_2\}$. Чтобы завершить доказательство, остается заметить, что многообразие $\mathrm{var}\{xyxzx \approx xyxz,\ \sigma_2\}$ порождается 5-элементным моноидом

$$\langle a, b \mid a^2 = ab = a,\ b^2a = b^2 \rangle \cup \{1\} = \{a, b, ba, b^2, 1\}.$$

Последний факт доказан в [43, следствие 6.6]. □

Отметим, что аналог следствия 3.38 для произвольных цепных многообразий моноидов не имеет места. Действительно, как мы уже отмечали во введении, в работе [37] доказано, что существует континуум не локально конечных цепных многообразий групп. Однако явные примеры таких многообразий до сих пор не известны.

§ 4. Специальные элементы

В этом параграфе мы сначала сформулируем все основные результаты, а потом перейдем к их доказательству. Многообразие всех моноидов будем обозначать через **MON**. Первым результатом диссертации о специальных элементах решетки $\mathbb{MON}$ является описание нейтральных элементов этой решетки.

Теорема 4.1. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *— модулярный, нижнемодулярный и верхнемодулярный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *— нейтральный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *и* $\mathbf{MON}$.

Следующий результат посвящен описанию костандартных элементов решетки $\mathbb{MON}$.

Теорема 4.2. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *— модулярный и верхнемодулярный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *— костандартный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$, $\mathbf{C}_2$ *и* $\mathbf{MON}$.

Следующее утверждение дает существенную информацию о верхнемодулярных элементах решетки $\mathbb{MON}$.

Предложение 4.3. *Если собственное многообразие моноидов* $\mathbf{V}$ *является верхнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*, то* $\mathbf{V}$ *либо коммутативно, либо вполне регулярно.*

Поскольку кодистрибутивный элемент произвольной решетки является ее верхнемодулярным элементом, из предложения 4.3 следует, что любое собственное многообразие моноидов, являющееся кодистрибутивным элементом решетки $\mathbb{MON}$, либо коммутативно, либо вполне регулярно. Оказывается, что справедливо

Предложение 4.4. *Всякое коммутативное многообразие моноидов является кодистрибутивным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*.*

Как мы увидим в конце параграфа, из сформулированных выше результатов легко вытекает

Следствие 4.5. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$*, не содержащего многообразия* $\mathbf{D}_1$*, следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *— модулярный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ — *костандартный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *и* $\mathbf{C}_2$.

Отметим, что это следствие охватывает два важных класса многообразий моноидов: коммутативные и вполне регулярные многообразия.

Прежде чем переходить к доказательству сформулированных утверждений, докажем некоторые вспомогательные факты о специальных элементах решетки $\mathbb{MON}$.

Очевидно, что многообразия $\mathbf{T}$ и $\mathbf{MON}$ являются нейтральными элементами решетки $\mathbb{MON}$. В [65, предложение 2.4] было установлено, что $\mathbf{SL}$ является нейтральным элементом решетки $\mathbb{SEM}$. Учитывая предложение 1.1, мы можем заключить, что справедлива

Лемма 4.6. *Многообразия* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *и* $\mathbf{MON}$ *являются нейтральными элементами решетки* $\mathbb{MON}$. □

Лемма 4.7. *Пусть* $\mathbf{V}$ — *некоммутативное вполне регулярное многообразие моноидов. Тогда*

$$\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1 \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V}).$$

В частности, $\mathbf{V}$ *не является модулярным, а* $\mathbf{C}_2$ — *нижнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$.

Доказательство. Из леммы 1.12 вытекает, что решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{D}_1$ является цепью $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1$. Отсюда следует, что $\mathbf{SL}$ является максимальным вполне регулярным подмногообразием многообразия $\mathbf{D}_1$. Многообразие $\mathbf{V} \wedge \mathbf{D}_1$ вполне регулярно. Следовательно $\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{V} \subseteq \mathbf{SL}$. Поэтому $\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{D}_1 \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{C}_2$. С другой стороны, $\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V}$ является некоммутативным и не вполне регулярным многообразием, поскольку $\mathbf{V}$ некоммутативно, а $\mathbf{C}_2$ не вполне регулярно. Тогда из леммы 1.18 следует, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V}$, откуда $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_1 \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{V})$. □

Зафиксируем обозначения для следующих двух слов:

$$\mathbf{s} = yxyzxz \quad \text{и} \quad \mathbf{t} = yxzxyxz.$$

Положим $\mathbf{B}_{2,3} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x^3\}$ и $\mathbf{Q} = \mathrm{var}\{\mathbf{s} \approx \mathbf{t}\}$. Ясно, что $\mathbf{Q} \subset \mathbf{B}_{2,3}$.

Лемма 4.8. *Если* $\mathbf{V}$ — *коммутативное многообразие моноидов, содержащее нетривиальную группу, то*

$$\mathbf{Q} \vee (\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V}) \subset \mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}).$$

В частности, $\mathbf{V}$ *не является модулярным, а* $\mathbf{Q}$ — *нижнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$.

Доказательство. Из предложения 1.6 следует, что $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{Q}$. Поскольку $\mathbf{V}$ коммутативно, отсюда вытекает, что $\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_2$. Следовательно,

$$\mathbf{Q} \vee (\mathbf{B}_{2,3} \wedge \mathbf{V}) = \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}).$$

Требуется показать, что последнее включение — строгое. Для этого достаточно установить, что в $\mathbf{B}_{2,3} \wedge (\mathbf{Q} \vee \mathbf{V})$ не выполнено тождество $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$. В противном случае существует последовательность попарно различных слов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ такая, что $\mathbf{w}_0 = \mathbf{s}$, $\mathbf{w}_k = \mathbf{t}$ и для любого $0 \le i < k$ тождество $\mathbf{w}_i \approx \mathbf{w}_{i+1}$ выполнено либо в $\mathbf{B}_{2,3}$, либо в $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$. Рассмотрим тождество $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$. Очевидно, что оно не выполнено в многообразии $\mathbf{B}_{2,3}$, так как $\mathbf{s}$ является изотермом для $\mathbf{B}_{2,3}$. Следовательно, это тождество выполнено в $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$. Тогда из леммы 1.2 вытекает, что существует вывод тождества $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$ из тождества $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$, т.е. последовательность попарно различных слов (3.17) такая, что $\mathbf{v}_0 = \mathbf{s}$, $\mathbf{v}_m = \mathbf{w}_1$ и для любого $0 \le i < m$ либо $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{s}) \mathbf{b}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{t}) \mathbf{b}_i$, либо $\mathbf{v}_i = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{t}) \mathbf{b}_i$ и $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{a}_i \xi_i(\mathbf{s}) \mathbf{b}_i$ для некоторых слов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ и некоторого эндоморфизма $\xi_i \in \mathrm{End}(F^1)$. Без ограничения общности мы можем считать, что последовательность (3.17) является кратчайшим выводом $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$ из $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$.

Пусть η — произвольный эндоморфизм моноида F^1. В табл. 3 приведены формы слов $\eta(\mathbf{s})$ и $\eta(\mathbf{t})$ в случае, когда η отображает хотя бы одну из букв x, y и z в пустое слово. Мы видим, что во всех случаях слова $\eta(\mathbf{s})$ и $\eta(\mathbf{t})$ содержат подслово вида $\mathbf{w}^2$. Заметим, что слова $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$ не содержат квадратов. Из этого факта и табл. 3 вытекает, что если выполнено равенство $\mathbf{a} = \mathbf{c}\eta(\mathbf{b})\mathbf{d}$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\mathbf{s}, \mathbf{t}\}$, $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in F^1$, а η – эндоморфизм моноида F^1, отображающий хотя бы одну из букв x, y или z в пустое слово, то $\eta(\mathbf{b}) = \lambda$. Этот факт мы будем в дальнейшем неоднократно использовать для получения противоречия.

Таблица 3: вид слов $\eta(\mathbf{s})$ и $\eta(\mathbf{t})$ в зависимости от эндоморфизма η

Слово	Вид слова, если		
	$\eta(x) = \lambda$	$\eta(y) = \lambda$	$\eta(z) = \lambda$
$\eta(\mathbf{s})$	$\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2$	$(\mathbf{pq})^2$	$(\mathbf{pq})^2$
$\eta(\mathbf{t})$	$(\mathbf{pq})^2$	$\mathbf{pqp}^2\mathbf{q}$	$\mathbf{pq}^2\mathbf{pq}$

Рассмотрим тождество $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 \approx \mathbf{v}_1$. Предположим сначала, что $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}) \mathbf{b}_0$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}) \mathbf{b}_0$. Если слова $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ являются пустыми, то эндоморфизм ξ_0 действует тождественно на буквах x, y и z. В этом случае $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$. Пусть теперь хотя бы одно из слов $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{b}_0$ не является пустым. Тогда эндоморфизм ξ_0 отображает одну из букв x, y и z в пустое слово. В предыдущем абзаце мы показали, что в этом случае $\xi_0(\mathbf{s}) = \xi_0(\mathbf{t}) = \lambda$, откуда $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \mathbf{b}_0$. Получаем противоречие с тем, что слова $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{v}_1$ различны.

Предположим теперь, что $\mathbf{s} = \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{t}) \mathbf{b}_0$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_0 \xi_0(\mathbf{s}) \mathbf{b}_0$. Поскольку длина слова $\mathbf{s}$ меньше длины слова $\mathbf{t}$, эндоморфизм ξ_0 должен отображать одну из букв x, y или z в пустое слово. Учитывая доказанное выше, мы снова получаем, что $\xi_0(\mathbf{t}) = \lambda$. В этом случае вновь возникает противоречие с тем, что $\mathbf{v}_0 \ne \mathbf{v}_1$. Таким образом, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{t}$.

Рассмотрим теперь тождество $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 \approx \mathbf{v}_2$. Предположим, что $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1 \xi_1(\mathbf{s}) \mathbf{b}_1$ и $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1 \xi_1(\mathbf{t}) \mathbf{b}_1$. Заметим, что число вхождений буквы x в слово $\xi_1(\mathbf{s})$ не может быть равно 3, и поэтому $x \in \mathrm{con}(\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1)$. Поскольку как первая, так и последняя буква слова $\mathbf{t}$ не совпадает с x, мы получаем, что слово $\mathbf{a}_1\mathbf{b}_1$ имеет длину ≥ 2. Тогда эндоморфизм ξ_1 должен отображать одну из букв x, y или z в пустое слово. В этом случае, как мы показали выше, $\xi_1(\mathbf{s}) = \lambda$, откуда $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Противоречие.

Пусть теперь $\mathbf{t} = \mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1\xi_1(\mathbf{t})\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_1\xi_1(\mathbf{s})\mathbf{b}_1$. Если слова $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$ являются пустыми, то эндоморфизм ξ_1 действует тождественно на буквах x, y и z. В этом случае $\mathbf{v}_2 = \mathbf{s}$. Но этого не может быть, так как последовательность (3.17) является кратчайшим выводом тождества $\mathbf{s} \approx \mathbf{w}_1$ из тождества $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$. Таким образом, хотя бы одно из слов $\mathbf{a}_1$ или $\mathbf{b}_1$ не является пустым. Тогда эндоморфизм ξ_1 отображает одну из букв x, y или z в пустое слово. В этом случае, как мы показали выше, $\xi_1(\mathbf{t}) = \lambda$, откуда $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. Получаем противоречие с тем, что слова $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ различны. Таким образом, мы показали, что единственно возможной ситуацией является случай, когда $m = 1$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1 = \mathbf{t}$. Следовательно, тождество $\mathbf{s} \approx \mathbf{t}$ выполнено в многообразии $\mathbf{Q} \vee \mathbf{V}$. Тогда это многообразие удовлетворяет и тождеству (3.5), что невозможно, так как $\mathbf{V}$ содержит нетривиальную группу. $\square$

Заметим, что $\mathbf{F}_1 \subset \mathbf{B}_{2,3}$.

Лемма 4.9. *Если $n > 2$, то*

$$(\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{F}_1 \subset (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}.$$

В частности, $\mathbf{C}_n$ при $n > 2$ не является модулярным, а $\mathbf{F}_1$ — нижнемодулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$.

Доказательство. Очевидно, что $(\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{F}_1 \subseteq (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$. Покажем, что это включение строгое. Поскольку $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{F}_1$, мы имеем, что $(\mathbf{C}_n \wedge \mathbf{B}_{2,3}) \vee \mathbf{F}_1 = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_1$. Таким образом, нам нужно показать, что $\mathbf{F}_1 \subset (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$. Для этого достаточно установить, что в $(\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ не выполнено тождество (3.9). В противном случае существует последовательность различных слов (3.17) такая, что $\mathbf{v}_0 = xyx$, $\mathbf{v}_m = xyx^2$ и для любого $0 \leq i < m$ тождество $\mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_{i+1}$ выполнено либо в $\mathbf{B}_{2,3}$, либо в $\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1$. Рассмотрим тождество $xyx \approx \mathbf{v}_1$. Очевидно, что оно не выполнено в многообразии $\mathbf{B}_{2,3}$, так как xyx является изотермом для $\mathbf{B}_{2,3}$. С другой стороны, это тождество выполняется в $\mathbf{C}_n$ тогда и только тогда, когда оно следует из коммутативности. Это означает, что $\mathbf{v}_1 \in \{x^2y, yx^2\}$. Если $\mathbf{v}_1 = x^2y$, то $\mathbf{F}_1$ удовлетворяет тождеству $x^2y \approx xyx$, что противоречит тому, что многообразия $\mathbf{E}$ и $\mathbf{F}_1$ различны. Если же $\mathbf{v}_1 = yx^2$, то в $\mathbf{F}_1$ выполнены тождества

$$xyx \approx \mathbf{v}_1 = yx^2 \approx yx^3 \approx xyx^2 \approx x^2yx \approx x^2y,$$

откуда снова выводим то же самое противоречие. Таким образом, многообразие $(\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$ не удовлетворяет тождеству (3.9), откуда $\mathbf{F}_1 \subset (\mathbf{C}_n \vee \mathbf{F}_1) \wedge \mathbf{B}_{2,3}$. $\square$

Лемма 4.10. *Если многообразие моноидов $\mathbf{V}$ не содержит многообразия $\mathbf{D}_1$ и является модулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$, то оно совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ и $\mathbf{C}_2$.*

Доказательство. В силу леммы 1.18, многообразие $\mathbf{V}$ либо коммутативно, либо вполне регулярно. Из леммы 4.7 вытекает, что если $\mathbf{V}$ вполне регулярно, то оно коммутативно. Таким образом, $\mathbf{V}$ в любом случае коммутативно. Учитывая лемму 4.8, получаем, что $\mathbf{V}$ комбинаторно, а значит, удовлетворяет тождеству вида $x^n \approx x^{n+1}$ для некоторого n. Таким образом, $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{C}_n$. Из предложения 3.12 вытекает теперь, что $\mathbf{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ и $\mathbf{C}_m$ для некоторого $2 \le m \le n$. Учитывая лемму 4.9, получаем, что случай, когда $m > 2$, невозможен. Следовательно, $\mathbf{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ и $\mathbf{C}_2$. $\square$

Приступим к доказательству основных результатов параграфа.

Доказательство предложения 4.3. Пусть $\mathbf{V}$ — собственное некоммутативное и не вполне регулярное многообразие моноидов, являющееся верхнемодулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$. Тогда, по лемме 1.18, $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$. В [60, лемма 2.16] доказано, что многообразие всех полугрупп порождается всеми минимальными неабелевыми многообразиями групп. Учитывая это утверждение и предложение 1.1, мы получаем, что существует минимальное неабелево многообразие групп $\mathbf{G}$ такое, что $\mathbf{G} \nsubseteq \mathbf{V}$. Тогда $\mathbf{V} \wedge \mathbf{G} = \mathbf{A}_n$ для некоторого натурального n, откуда $\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{G}) = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{A}_n$. С другой стороны, в силу леммы 4.7, $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{G}$. Принимая во внимание тот факт, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$, мы получаем, что $\mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V} \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{G})$. Многообразие $\mathbf{A}_n \vee \mathbf{C}_2$ коммутативно, в то время как $\mathbf{D}_1$ не является коммутативным, откуда

$$\mathbf{C}_2 \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{G}) \neq \mathbf{V} \wedge (\mathbf{C}_2 \vee \mathbf{G}).$$

Учитывая, что $\mathbf{C}_2 \subset \mathbf{D}_1 \subseteq \mathbf{V}$, мы получаем противоречие с тем, что многообразие $\mathbf{V}$ является верхнемодулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$. $\square$

Доказательство предложения 4.4. Пусть $\mathbf{V}$ — коммутативное многообразие моноидов, а $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ — произвольные многообразия. Положим $\mathbf{X} = \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z})$ и $\mathbf{W} = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z})$. Очевидно, что $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{X}$. Проверим, что $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{W}$. Если $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{Y}$, то

$$\mathbf{X} = \mathbf{V} \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) = \mathbf{V} = \mathbf{V} \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}) = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}) = \mathbf{W},$$

что и требовалось доказать. Следовательно, мы можем предположить, что $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{Y}$. В силу симметрии, $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{Z}$. Если $\mathbf{V}$ является периодическим, то $\mathbf{X}$ также будет периодическим. Если $\mathbf{V}$ не является периодическим, то $\mathbf{V}$ является многообразием всех коммутативных моноидов. Поскольку $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{Y}$ и $\mathbf{V} \nsubseteq \mathbf{Z}$, многообразия $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ являются периодическими, откуда следует периодичность многообразия $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$. Следовательно, $\mathbf{X}$ — коммутативное периодическое многообразие. Тогда из леммы 1.4 вытекает, что $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \vee \mathbf{A}_s$ для некоторого s, где $\mathbf{Q}$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ или $\mathbf{C}_n$ при $n \ge 2$. Очевидно, что $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$ и $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$. Теперь проверим, что либо $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y}$, либо $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$. Если $\mathbf{Q} = \mathbf{T}$, то доказывать нечего. Если $\mathbf{Q} = \mathbf{SL}$, то требуемый факт следует из леммы 1.3. Пусть теперь, что $\mathbf{Q} = \mathbf{C}_n$, где $n \ge 2$. Предположим, что $\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Y}$ и $\mathbf{Q} \nsubseteq \mathbf{Z}$. Тогда из леммы 1.9 следует, что найдутся i и j такие, что в $\mathbf{Y}$ выполнено тождество $x^{n-1} \approx x^{n-1+i}$, в

$\mathbf{Z}$ — тождество $x^{n-1} \approx x^{n-1+j}$. Тогда многообразие $\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$ удовлетворяет тождеству $x^{n-1} \approx x^{n-1+ij}$. Получаем противоречие с тем, что $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$. Таким образом, мы доказали, что либо $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Y}$, либо $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{Z}$. Поскольку $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V}$, мы получаем, что либо $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V} \wedge \mathbf{Y}$, либо $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{V} \wedge \mathbf{Z}$. Следовательно, $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{W}$.

Теперь проверим, что $\mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{W}$. Заметим, что $\mathbf{W}$ является коммутативным периодическим многообразием. Тогда, в силу леммы 1.4, $\mathbf{W} = \mathbf{Q}' \vee \mathbf{A}_r$ для некоторого r, где $\mathbf{Q}'$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ или $\mathbf{C}_n$ при $n \geq 2$. Предположим, что s не делит r. Тогда найдутся такие простое число p и натуральное число k, что p^k делит s, но не делит r. Положим $q = p^k$. Тогда $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{X}$, но $\mathbf{A}_q \nsubseteq \mathbf{A}_r$. Легко видеть, что любое подмногообразие многообразия $\mathbf{W} = \mathbf{Q}' \vee \mathbf{A}_r$, состоящее из групп, содержится в $\mathbf{A}_r$ (это следует, например, из леммы 1.5). Следовательно, $\mathbf{A}_q \nsubseteq \mathbf{W}$. Поскольку $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{X}$, мы получаем, что $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}$. В [6, теорема 1.2] доказано, что любое многообразие периодических абелевых групп является кодистрибутивным элементом решетки $\mathbb{SEM}$. Из этого факта и предложения 1.1 следует, что

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{A}_q \wedge (\mathbf{Y} \vee \mathbf{Z}) = (\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Y}) \vee (\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Z}).$$

Поскольку решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{A}_q$ является цепью, $\mathbf{A}_q$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Y}$ и $\mathbf{A}_q \wedge \mathbf{Z}$, откуда следует, что либо $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Y}$, либо $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{Z}$. Принимая во внимание, что $\mathbf{A}_q \subseteq \mathbf{X} \subseteq \mathbf{V}$, мы получаем противоречие с тем, что $\mathbf{A}_q \nsubseteq \mathbf{W}$. Поэтому s делит r. Тогда $\mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{A}_r \subseteq \mathbf{W}$. Следовательно, $\mathbf{X} = \mathbf{Q} \vee \mathbf{A}_s \subseteq \mathbf{W}$. Предложение 4.4 доказано. □

Доказательство теоремы 4.2. Импликация (ii) $\longrightarrow$ (i) очевидна. Нам остается доказать импликации (i) $\longrightarrow$ (iii) и (iii) $\longrightarrow$ (ii).

(i) $\longrightarrow$ (iii) Пусть $\mathbf{V}$ — собственное многообразие моноидов, являющееся модулярным и верхнемодулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$. Согласно предложению 4.3, $\mathbf{V}$ либо вполне регулярно, либо коммутативно. Из леммы 1.18 вытекает теперь, что $\mathbf{D}_1 \nsubseteq \mathbf{V}$. Остается сослаться на лемму 4.10.

(iii) $\longrightarrow$ (ii) Ввиду леммы 4.6, многообразия $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ и $\mathbf{MON}$ являются нейтральными, а значит и костандартными элементами решетки $\mathbb{MON}$. Нам остается показать, что костандартным элементом этой решетки является также многообразие $\mathbf{C}_2$.

Нетрудно проверить, что элемент решетки является костандартным тогда и только тогда, когда он является модулярным и кодистрибутивным. Это утверждение легко следует, например, из [28, теорема 253] или [53, предложение 1.7]. Ввиду указанного факта и предложения 4.4, достаточно доказать, что $\mathbf{C}_2$ является модулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$. Предположим противное. Тогда из [34, предложение 2.1] вытекает, что существуют многообразия $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ такие, что $\mathbf{U} \subset \mathbf{W}$, $\mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2$ и $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2$. Если $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{U}$, то $\mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_2$, откуда $\mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{W}$. Но тогда $\mathbf{U} = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{U} = \mathbf{C}_2 \vee \mathbf{W} = \mathbf{W}$, что противоречит выбору $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$. Таким образом, $\mathbf{C}_2 \nsubseteq \mathbf{U}$. Аналогично проверяется, что $\mathbf{C}_2 \nsubseteq \mathbf{W}$. Тогда из леммы 1.10 следует, что многообразия $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$ вполне регулярны.

Предположим сначала, что $\mathbf{U}$ является многообразием групп. Тогда $\mathbf{SL} \nsubseteq \mathbf{U}$. Если $\mathbf{W}$ не является групповым многообразием, то из леммы 1.3

следует, что $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{W}$. Тогда $\mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{T}$, но $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2$. Получаем противоречие с равенством $\mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2$. Таким образом, $\mathbf{W}$ является многообразием групп. Из леммы 1.5 следует, что наибольшим групповым подмногообразием многообразия $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2$ является многообразие $\mathbf{U}$. Но это невозможно, так как $\mathbf{W}$ является многообразием групп и $\mathbf{U} \subset \mathbf{W} \subset \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2$. Мы видим, что $\mathbf{U}$ не является многообразием групп. Тогда, в силу леммы 1.3, $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{U}$. Но в этом случае $\mathbf{SL} \subseteq \mathbf{U} \wedge \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \wedge \mathbf{C}_2 \subseteq \mathbf{W}$, и потому $\mathbf{W}$ также не является групповым многообразием. Поскольку $\mathbf{U}$ вполне регулярно, оно удовлетворяет тождеству $x \approx x^{n+1}$ для некоторого натурального n. Пусть n — наименьшее число с таким свойством, а Σ — базис тождеств многообразия $\mathbf{U}$. Обозначим через ζ эндоморфизм моноида F^1, переводящий каждую букву x в слово x^{n+1}. Положим

$$\Sigma^* = \{\zeta(\mathbf{u}) \approx \zeta(\mathbf{v}) \mid \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \in \Sigma\}.$$

Очевидно, что $\mathbf{U} = \mathrm{var}\{x \approx x^{n+1}, \Sigma^*\}$. Если $\mathbf{p} \approx \mathbf{q} \in \Sigma^*$, то из леммы 1.3 следует, что $\mathrm{con}(\mathbf{p}) = \mathrm{con}(\mathbf{q})$. Тогда, согласно предложению 1.6, все тождества из Σ^* выполнены в $\mathbf{C}_2$. Принимая во внимание, что $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2$, получаем, что многообразие $\mathbf{W}$ также удовлетворяет системе тождеств Σ^*. Поскольку $\mathbf{C}_2$ удовлетворяет тождеству $x^2 \approx x^3$, а $\mathbf{U}$ — тождеству $x \approx x^{n+1}$, в многообразии $\mathbf{U} \vee \mathbf{C}_2 = \mathbf{W} \vee \mathbf{C}_2$ выполнено тождество $x^2 \approx x^{n+2}$. Принимая во внимание, что $\mathbf{W}$ вполне регулярно, получаем, что в $\mathbf{W}$ выполнено тождество $x \approx x^{n+1}$. Из сказанного следует, что $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$, что противоречит выбору $\mathbf{U}$ и $\mathbf{W}$. Таким образом, мы доказали, что $\mathbf{C}_2$ является модулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Импликация (iii) $\longrightarrow$ (ii) является следствием леммы 4.6, а импликация (ii) $\longrightarrow$ (i) очевидна. Нам остается доказать импликацию (i) $\longrightarrow$ (iii). Пусть $\mathbf{V}$ — модулярный, нижнемодулярный и верхнемодулярный элемент решетки $\mathbb{MON}$. Из теоремы 4.2 вытекает, что многообразие $\mathbf{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$, $\mathbf{C}_2$ и $\mathbf{MON}$. Согласно лемме 4.7, многообразие $\mathbf{C}_2$ не является нижнемодулярным элементом решетки $\mathbb{MON}$. Отсюда следует, что $\mathbf{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ и $\mathbf{MON}$. $\square$

Доказательство следствия 4.5. Условия (ii) и (iii) этого следствия эквивалентны в силу теоремы 4.2, импликация (ii) $\longrightarrow$ (i) очевидна, а импликация (i) $\longrightarrow$ (iii) справедлива в силу леммы 4.10. $\square$

Заключение

Диссертация посвящена изучению решетки многообразий моноидов, о которой ранее почти ничего известно не было. В ней рассмотрен ряд ограничений на решетки моноидных многообразий, формулируемых в терминах, так или иначе связанных с решеточными тождествами.

Итогом проведенного исследования являются следующие результаты:

1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов (теорема 2.1), а значит, и в решетке всех моноидных многообразий (следствие 2.2);
2) полное описание всех негрупповых цепных многообразий моноидов (теорема 3.1 и следствие 3.34);
3) полное описание нейтральных элементов решетки всех многообразий моноидов (теорема 4.1);
4) полное описание костандартных элементов той же решетки (теорема 4.2).

Кроме того, получена существенная информация о верхнемодулярных и кодистрибутивных элементах решетки всех многообразий моноидов (предложения 4.3 и 4.4 соответственно).

Разработанный в диссертации метод исследования решеток многообразий моноидов с помощью таких комбинаторных понятий как k-разложение слова, k-блоки, k-разделители, глубина буквы в слове, представляется весьма перспективным и может быть рекомендован для решения других задач о многообразиях моноидов, связанных как с различными свойствами решеток многообразий, так и с вопросами конечной и бесконечной базируемости моноидов.

В дальнейшем мы планируем рассмотреть новые типы специальных элементов в решетке многообразий моноидов (прежде всего, дистрибутивные элементы), расширить круг рассматриваемых ограничений на решетки многообразий за счет условий конечности (прежде всего — условий максимальности и минимальности) и попытаться применить разработанную в диссертации комбинаторную технику к вопросам о конечной и бесконечной базируемости многообразий моноидов.

Список литературы

[1] Айзенштат, А. Я. *О решетке многообразий полугрупп* / А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46.

[2] Артамонов, В. А. *Цепные многообразия групп* / В. А. Артамонов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1978. – Вып. 3. – С. 3–8.

[3] Бахтурин, А. Ю. Тождества в алгебрах Ли / А. Ю. Бахтурин. – М: Наука, 1985. – 448 с.

[4] Бирюков, А. П. *Многообразия идемпотентных полугрупп* / А. П. Бирюков // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9, No. 3. – С. 255–273.

[5] Верников, Б. М. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II / Б. М. Верников // Фундам. и прикл. математика. – 2008. – Т. 14, No. 7. – С. 43–51.

[6] Верников, Б. М. *Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* / Б. М. Верников // Изв. вузов. Математика. – 2011. – No. 7. – С. 13–21.

[7] Волков, М. В. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* / М. В. Волков // Докл. Акад. наук. – 1992. – Т. 326, No. 3. – С. 409–413.

[8] Гретцер, Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М.: Мир, 1982. – 456 с.

[9] Гусев, С. В. *Два маленьких многообразия моноидов с большим объединением* / С. В. Гусев // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. – 2018. – С. 189.

[10] Нейманн, Х. Многообразия групп / Х. Нейманн. – М: Мир, 1969. – 264 с.

[11] Пинус, А. Г. Конгруэнц-модулярные многообразия алгебр / А. Г. Пинус. – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та., 1986. – 132 с.

[12] Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп. – Под ред. Л. Н. Шеврина. 2-е изд. – Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. – 41 с.

[13] Судзуки М. Строение группы и строение структуры ее подгрупп / М. Судзуки. – М: ИЛ, 1960. – 158 с.

[14] Суханов, Е. В. *Почти линейные многообразия полугрупп* / Е. В. Суханов // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, No. 4. – С. 469–476.

[15] Трахтман, А. Н. *О покрывающих элементах в структуре многообразий алгебр* / А. Н. Трахтман // Матем. заметки. – 1974. – Т. 15, No. 2. – С. 307–312.

[16] Хобби, Д. Строение конечных алгебр / Д. Хобби, Р. Маккензи. – М: Мир, 1993. – 284 с.

[17] Шапрынский, В. Ю. *Периодичность специальных элементов решетки многообразий полугрупп* / В. Ю. Шапрынский // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, No. 3. – С. 282–286.

[18] Шеврин, Л. Н. *Решетки многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 2009. – No. 3. – С. 3–36.

[19] Шеврин, Л. Н. *Тождества полугрупп* / Л. Н. Шеврин, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 1985. – No. 11. – С. 3–47.

[20] Шеврин, Л. Н. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов // Изв. вузов. Математика. – 1989. – No. 6. – С. 3–39.

[21] Almeida, J. Finite Semigroups and Universal Algebra / J. Almeida. – Singapore: World Scientific, 1994. – xvii+511 pp.

[22] Burris, S. *Embedding the dual of* Π_m *in the lattice of equational classes of commutative semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, No. 1. – P. 37–39.

[23] Burris, S. *Embedding the dual of* Π_∞ *in the lattice of equational classes of semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1, No. 2. – P. 248–254.

[24] Evans, T. *The lattice of semigroup varieties* / T. Evans // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, No. 1. – P. 1–43.

[25] Fennemore, C. F. *All varieties of bands.* I, II / C. F. Fennemore // Math. Nachr. – 1971. – Vol. 48, No. 1–6. – P. 237–262.

[26] Gerhard, J. A. *The lattice of equational classes of idempotent semigroups* / J. A. Gerhard // J. Algebra. – 1970. – Vol. 15, No. 2. – P. 195–224.

[27] Gerhard, J. A. *Some subdirectly irreducible idempotent semigroups* / J. A. Gerhard // Semigroup Forum. – 1972. – Vol. 5, No. 1. – P. 362–369.

[28] Grätzer, G. Lattice Theory: Foundation. / G. Grätzer. – Basel: Springer Basel AG, 2011. – xxix+613 pp.

[29] Gusev, S. V. *Cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / S. V. Gusev, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Algebra and Discrete Math. – 2018. – Vol. 26, No. 1. – P. 34–46.

[30] Head, T. J. *The varieties of commutative monoids* / T. J. Head // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. – 1968. – Vol. 16. – P. 203–206.

[31] Jackson, M. *Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70, No. 2. – P. 159–187; *Erratum to: Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. 2018. – Vol. 96, No. 1. – P. 197–198.

[32] Jackson, M. *Monoid varieties with extreme properties* / M. Jackson, E. W. H. Lee // Trans. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 370, No. 7. – P. 4785–4812.

[33] Jackson, M. *Finitely based, finite sets of words* / M. Jackson, O. Sapir // Int. J. Algebra and Comput. – 2000. – Vol. 10, No. 6. – P. 683–708.

[34] Ježek, J. *The lattice of equational theories. Part* I: *modular elements* / J. Ježek // Czechosl. Math. J. – 1981. – Vol. 31, No. 1. – P. 127–152.

[35] Jipsen, P. Varieties of Lattices. / P. Jipsen, H. Rose. – Lect. Notes Math. – Vol.1533. Berlin: Springer-Verlag, 1992. – x+162pp.

[36] Kharlampovich, O. G. *Algorithmic problems in varieties* / O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir // Int. J. Algebra and Comput. – 1995. – Vol. 5, No. 4–5. – P. 379–602.

[37] Kozhevnikov, P. A. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* / P. A. Kozhevnikov // Commun. Algebra. – 2012. – Vol. 40, No. 7. – P. 2628–2644.

[38] Lee, E. W. H. *Varieties generated by* 2*-testable monoids* / E. W. H. Lee // Studia Sci. Math. Hungar. – 2012. – Vol. 49. – P. 366–389.

[39] Lee, E. W. H. *Maximal Specht varieties of monoids* / E. W. H. Lee // Moscow Math. J. – 2012. – Vol. 12, No. 3. – P. 787–802.

[40] Lee, E. W. H. *Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Beiträge zur Algebra und Geometrie. – 2013. – Vol. 54, No. 1. – P. 121–129.

[41] Lee, E. W. H. *Inherently non-finitely generated varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 166–182.

[42] Lee, E. W. H. *On certain Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Results Math. – 2014. – Vol. 66, No. 2. – P. 491–510.

[43] Lee, E. W. H. *Minimal non-finitely based monoids* / E. W. H. Lee, J. R. Li // Dissert. Math. – 2011. – Vol. 475. – P. 1–65.

[44] Mitsch, H. *Semigroups and their lattice of congruences* / H. Mitsch // Semigroup Forum. – 1983. – Vol. 26, No. 1. – P. 1–63.

[45] Pastijn, F. J. *The lattice of completely regular semigroup varieties* / F. J. Pastijn // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1990. – Vol. 49, No. 1. – P. 24–42.

[46] Pastijn, F. J. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* / F. J. Pastijn // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 323, No. 1. – P. 79–92.

[47] Perkins, P. *Bases for equational theories of semigroups* / P. Perkins // J. Algebra. – 1969. – Vol. 11, No. 2. – P. 298–314.

[48] Petrich, M. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* / M. Petrich, N. R. Reilly // Glasgow Math. J. – 1990. – Vol. 32, No. 2. – P. 137–152.

[49] Pollák, Gy. *Some lattices of varieties containing elements without cover* / Gy. Pollák // Quad. Ric. Sci. – 1981. – Vol. 109. – P. 91–96.

[50] Sapir, M. V. *On Cross semigroup varieties and related questions* / M. V. Sapir // Semigroup Forum. – 1991. – Vol. 42, No. 1. – P. 345–364.

[51] Sapir, O. *Non-finitely based monoids* / O. Sapir // Semigroup Forum. – 2015. – Vol. 90, No. 3. – P. 557–586.

[52] Schmidt, R. Subgroup Lattices of Groups / R. Schmidt. – Berlin: Walter de Gruyter, 1994. – xv+572 pp.

[53] Šešelja, B. Weak Congruences in Universal Algebra / B. Šešelja, A. Tepavčević. – Novi Sad: Institute of Mathematics. Symbol, 2001. – 150 pp.

[54] Ševrin, L. N. *Attainability and solvability for classes of algebras* / L. N. Ševrin, L. M. Martynov // Semigroups. Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. – 1985. – Vol. 39. – P. 397–459.

[55] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattices of varieties of semigroups and epigroups* / V. Yu. Shaprynskiĭ, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Электрон. ресурс. https://arxiv.org/abs/1810.01610 [P. 1–15.]

[56] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov // Электрон. ресурс. https://arxiv.org/abs/1902.04576 [P. 1–9.]

[57] Shevrin, L. N. Semigroups and Their Subsemigroup Lattices / L. N. Shevrin, A. J. Ovsyannikov. – Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1996. – xii+380 pp.

[58] Skokov, D. V. *On modular and cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Сибирские электронные матем. изв. — 2019. — Т. 16. — С. 175–186.

[59] Vachuska, C. *On the lattice of completely regular monoid varieties* / C. Vachuska // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46, No. 1. – P. 168–186.

[60] Vernikov, B. M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 59, No. 3–4. – P. 405–428.

[61] Vernikov, B. M. *Special elements in lattices of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2015. – Vol. 81, No. 1–2. – P. 79–109.

[62] Vernikov, B. M. *Upper-modular and related elements of the lattice of commutative semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Semigroup Forum. – 2017. – Vol. 94, No. 3. – P. 696–711.

[63] Volkov, M. V. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / M. V. Volkov // In: P. M. Higgins (ed.), Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex. Colchester: University of Essex. – 1994. – P. 99–110.

[64] Volkov, M. V. *The finite basis problem for finite semigroups* / M. V. Volkov // Math. Jpn. – 2001. – Vol. 53, No. 1. – P. 171–199.

[65] Volkov, M. V. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* / M. V. Volkov // Contrib. General Algebra. – 2005. – Vol. 16. – P. 275–288.

[66] Wismath, S. L. *The lattice of varieties and pseudovarieties of band monoids* / S. L. Wismath // Semigroup Forum. – 1986. – Vol. 33, No. 1. – P. 187–198.

[67] Wismath, S. L. *The lattice of varieties of ∗-regular band monoids* / S. L. Wismath // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46, No. 1. – P. 130–133.

[68] Zhang, W. T. *A new example of limit variety of aperiodic monoids* / W. T. Zhang, Y. F. Luo // Электрон. ресурс. https://arxiv.org/abs/1901.02207 [P. 1–16.]

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[69] Гусев, С. В. *О решетке надкоммутативных многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Изв. вузов. Математика. – 2018. – No. 5. – С. 28–32.

[70] Gusev, S. V. *Special elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 97, No. 2. – Article 29. – P. 1-12.

[71] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Dissert. Math. – 2018. – Vol. 534. – P. 1–73.

Другие публикации

[72] Гусев, С. В. *Нейтральные и костандартные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. – 2017. – С. 145.

[73] Гусев, С. В. *О кодистрибутивных и верхнемодулярных элементах решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Соврем. проблемы математики и ее приложений: тезисы Междунар. (49-й Всеросс.) молодёжной школы-конф. Екатеринбург. – 2018. – С. 12.

[74] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev // Groups and graphs, algorithms and automata: Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School. Ekaterinburg. – 2015. – P. 52.

[75] Gusev, S. V. *On the lattice of overcommutative varieties of monoids* / S. V. Gusev // Groups and graphs, metrics and manifolds: Abstracts of the Int. Conf. and PhD-Master Summer School. Ekaterinburg. – 2017. – P. 54.