На правах рукописи

Гусев Сергей Валентинович

РЕШЕТКА МНОГООБРАЗИЙ МОНОИДОВ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2019

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина».

Научный руководитель:	Верников Борис Муневич, доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет», профессор кафедры алгебры и математической логики
	Коробков Сергей Самсонович, кандидат физико-математических наук, доцент Федеральное государственное бюджетное учреждение высшего образования «Уральский государственный педагогический университет», доцент кафедры высшей математики и методики преподавания математики
Ведущая организация:	Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Омский государственный педагогический университет»

Защита диссертации состоится 23 августа 2019 г. в 15:30 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН» по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН», http://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «__» __________ 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из основных направлений современной общей алгебры является изучение многообразий алгебр. Этому направлению посвящено большое количество монографий и обзорных статей. Совокупность всех многообразий алгебр одного и того же типа образует решетку относительно включения. Исследование этой решетки относится к числу важнейших направлений изучения многообразий. Отметим, что исследование решеток многообразий естественно вписывается в более общий подход, связанный с рассмотрением производных решеток алгебраических объектов — таких, как решетки подалгебр, конгруэнций и т.п.

В частности, с начала 60-х годов прошлого века активно изучается решетка многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через $\mathbb{SEM}$. Число работ, полностью или частично посвященных этой решетке, в настоящее время исчисляется несколькими сотнями. Результаты, полученные на начальном этапе изучения решетки $\mathbb{SEM}$, приведены в обзорах [1, 9]. Более поздний обзор [6] отражает состояние дел в обсуждаемой области, близкое к современному. Не так давно вышел еще один обзор [26], посвященный не всей решетке $\mathbb{SEM}$, а только ее специальным элементам.

На этом фоне резким контрастом выглядит крайне незначительное число работ, в которых изучается решетка всех многообразий моноидов, которую мы будем обозначать через $\mathbb{MON}$ (говоря о многообразиях моноидов, мы имеем в виду, что 0-арная операция, выделяющая единицу, входит в сигнатуру). По существу, можно назвать всего несколько работ, полностью или в существенной степени посвященных этой решетке. Речь идет о заметке Т.Хида [12], в которой описана решетка многообразий коммутативных моноидов, статье Д.Поллака [21], в которой, среди прочих результатов, построен пример многообразия моноидов, не имеющего покрытий в решетке $\mathbb{MON}$, и работе Ш.Висмат [30], в которой описана решетка многообразий идемпотентных моноидов.

В последнее время ситуация начала постепенно меняться. В работах ряда авторов (в первую очередь, М.Джексона и Э.Ли), посвященных в основном изучению тождеств в моноидах, появляются и промежуточные результаты, относящиеся к решеткам многообразий (см., например, [13, 16–20, 31]). В основном они представляют собой описание решеток подмногообразий некоторых конкретных многообразий моноидов. В частности, в [16] построен, по-видимому, первый пример многообразия моноидов с немодулярной решеткой подмногообразий. А в недавней статье М.Джексона и Э.Ли [14] получен уже некоторый результат о решетке многообразий моноидов, представляющий несомненный самостоятельный интерес. А именно, в этой работе построены многообразия моноидов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ такие, что решетки их подмногообразий конечны, а решетка подмногообразий их объединения $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ континуальна и не удовлетворяет условию максимальности. Более того, из доказательств работы [14] легко вытекает, что последняя решетка не удовлетворяет и условию минимальности.

При изучении решетки многообразий полугрупп большое внимание уделялось рассмотрению ограничений, формулируемых в терминах тождеств (см. [6, §11]). Поэтому изучение решетки $\mathbb{MON}$ естественно начать с рассмотрения такого типа ограничений.

Как мы уже упоминали выше, решетка $\mathbb{MON}$ не является модулярной. Однако до последнего времени не было известно, удовлетворяет ли эта решетка какому-либо нетривиальному тождеству. Первый из основных результататов данной диссертации дает отрицательный ответ на этот вопрос (см. теорему 1 и следствие 1 ниже).

Обсудим этот результат подробнее. Многообразие моноидов называется *надкоммутативным*, если оно содержит многообразие всех коммутативных моноидов. Ясно, что совокупность всех надкоммутативных многообразий моноидов образует подрешетку в решетке всех многообразий моноидов. Мы будем обозначать эту подрешетку через $\mathbb{OC}$. Как и в случае полугрупп, решетка $\mathbb{MON}$ является дизъюнктным объединением решетки $\mathbb{OC}$ и решетки *периодических* многообразий (т.е. многообразий, состоящих из периодических моноидов). В диссертации доказано отсутствие нетривиальных тождеств в решетке $\mathbb{OC}$, откуда, в частности, следует отсутствие нетривиальных тождеств во всей решетке $\mathbb{MON}$.

Для сравнения заметим, что отсутствие нетривиальных тождеств в решетке многообразий полугрупп было доказано еще в 1971 г. в двух работах С.Барриса и Э.Нельсон [7, 8]. Решетка надкоммутативных многообразий полугрупп также не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству — это доказано М.В.Волковым в [28].

После доказательства отсутствия нетривиальных тождеств в решетке $\mathbb{MON}$ естественно начать изучение многообразий моноидов с модулярной или дистрибутивной решеткой подмногообразий. Поскольку решетка $\mathbb{MON}$ пока изучена слабо, трудно рассчитывать на полное решение соответствующих задач в ближайшее время. В качестве первого шага в этом направлении представляется естественным рассмотреть предельное усиление тождества дистрибутивности, а именно — свойство быть цепью. Многообразие, решетка подмногообразий которого является цепью, принято называть *цепным*. Для большинства классических типов алгебр задача описания цепных многообразий решена 35–40 и более лет назад. В частности, негрупповые цепные многообразия полугрупп описаны Е.В.Сухановым в 1982 г. [5], а локально конечные цепные многообразия групп — В.А.Артамоновым в 1978 г. [2]. Отметим, что задача описания произвольных цепных многообразий групп представляется трансцендентно сложной. Это вытекает из результатов П.А.Кожевникова [15], согласно которым существует континуум периодических не локально конечных многообразий групп, решетка подмногообразий которых является 3-элементной цепью.

Отдельные нетривиальные примеры цепных многообразий моноидов появлялись в некоторых работах в процессе доказательств основных результатов (см., в частности, [13, 16, 19]). Однако систематически цепные многообразия моноидов до последнего времени не изучались. В диссертации получено полное описание негрупповых цепных многообразий моноидов (см. теорему 2 и следствие 2 ниже). Отметим, что этот результат оказался весьма трудоемким: его доказательство занимает около 70 страниц.

В диссертации рассматривается еще несколько ограничений, связанных с тождествами дистрибутивности и модулярности. Речь идет о специальных элементах в решетке $\mathbb{MON}$. Напомним определения тех типов специальных элементов, которые будут возникать ниже.

Элемент x решетки L называется *нейтральным*, если

$$\forall\, y, z \in L\colon\ \ (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x);$$

костандартным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z);$$

кодистрибутивным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$$

модулярным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon \quad y \leq z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y;$$

верхнемодулярным, если

$$\forall\, y, z \in L\colon \quad y \leq x \longrightarrow x \wedge (y \vee z) = y \vee (x \wedge z).$$

Нижнемодулярные элементы определяются двойственно к верхнемодулярным. Хорошо известно, что элемент $x \in L$ нейтрален тогда и только тогда, когда для всех $y, z \in L$ подрешетка в L, порожденная x, y и z, дистрибутивна (см., например, [10, теорема 254]). Нейтральные элементы играют важную роль в общей теории решеток. В частности, элемент a является нейтральным элементом решетки L тогда и только тогда, когда L разложима в подпрямое произведение главного идеала и главного фильтра, порожденных элементом a (см, например, [10, теорема 254]). Таким образом, знание нейтральных элементов решетки позволяет судить о строении этой решетки в целом. Очевидно, что всякий нейтральный элемент нижнемодулярен и костандартен одновременно; всякий костандартный модулярен; всякий кодистрибутивный верхнемодулярен. Хорошо известно также, что всякий костандартный элемент кодистрибутивен (см., например, [10, теорема 253]). Некоторую дополнительную информацию о специальных элементах в произвольных решетках можно найти в [10, раздел III.2].

К настоящему времени получено много интересных и глубоких результатов о специальных элементах решетки $\mathbb{SEM}$ (см. обзоры [6, § 14] и [26], а также недавние работы [11, 22–24, 27]). В частности, нейтральные элементы решетки $\mathbb{SEM}$ были полностью описаны М.В.Волковым в [29, предложение 4.1], а Б.М.Верников в [4, теорема 1.3] доказал, что многообразие полугрупп является костандартным элементом решетки $\mathbb{SEM}$ тогда и только тогда, когда оно является нейтральным элементом этой решетки. Кодистрибутивные элементы решетки $\mathbb{SEM}$ изучались в работе [4], а верхнемодулярные — в [3, 25].

Специальные элементы решетки $\mathbb{MON}$ до настоящего времени не изучались. В диссертации полностью описаны нейтральные и костандартные элементы этой решетки (теоремы 3 и 4 ниже). Кроме того, нами получена существенная информация о кодистрибутивных и верхнемодулярных элементах этой решетки (предложения 1 и 2 ниже).

Целью работы является исследование тождеств и родственных им ограничений в решетке многообразий моноидов, в том числе специальных элементов этой решетки.

Задачи исследования. Исходя из сказанного выше, можно выделить следующие конкретные задачи, решению которых посвящена диссертация:

1) выяснить, удовлетворяет ли решетка многообразий моноидов какому-либо нетривиальному тождеству;
2) описать негрупповые цепные многообразия моноидов;
3) описать нейтральные элементы решетки многообразий моноидов;
4) описать костандартные элементы той же решетки.

Методология и методы исследования. В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Степень достоверности. Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием научно-обоснованных методов с опорой на основополагающие теоретические положения в области математики, на фундаментальные работы по теории полугрупп, теории решеток и теории многообразий, использованием общеалгебраических и специальных методов исследований в области теории полугрупп, универсальной алгебры, теории решеток и комбинаторики слов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории многообразий. Результаты, полученные в диссертации, значительно расширяют круг наших знаний о строении решетки многообразий моноидов. Для решения рассмотренных в диссертации задач потребовалось найти критерии выполнимости тождества (т.е. решить проблему равенства слов) в целом ряде конкретных многообразий моноидов. Для этого в диссертации разработан метод, основанный на целом ряде понятий, связанных с комбинаторикой слов (k-разложение слова, k-блоки и k-разделители слова, глубина буквы в слове и др.). Эти понятия введены и изучены в диссертации (рассмотрению их свойств посвящен раздел 1.2). Нам представляется, что потенциал этого подхода к изучению многообразий моноидов далеко не исчерпан задачами, рассмотренными в диссертации. Он может оказаться полезным как при рассмотрении других задач, связанных с решеткой многообразий моноидов, так и при изучении вопросов о конечной и бесконечной базируемости моноидов.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся:

1) утверждение об отсутствии нетривиальных тождеств в решетке надкоммутативных многообразий моноидов, а значит, и в решетке всех моноидных многообразий; опубликовано в статье [32];

2) полное описание всех негрупповых цепных многообразий моноидов; опубликовано в статье [34];
3) полное описание нейтральных элементов решетки всех многообразий моноидов; опубликовано в статье [33];
4) полное описание костандартных элементов той же решетки; опубликовано в статье [33].

Апробация результатов работы. Результаты диссертации были представлены на Международной конференции «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015), Международной конференции «Группы и графы, метрики и многообразия» (Екатеринбург, 2017), Международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2017), Международной молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2018), 56-й летней школе по алгебре и упорядоченным множествам (Шпиндлерув Млын, Чехия, 2018). Кроме того, все результаты диссертации докладывались на Екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы» (2016–2019).

Публикации. По теме диссертации опубликовано семь работ [32–38]. Из них три работы опубликованы в журналах из списка ВАК [32–34]. Одна работа написана совместно с Б.М.Верниковым [34]. В этой работе постановка задачи, указание на основные идеи и методы доказательства и усовершенствование первоначального варианта изложения принадлежат Б.М.Верникову, а само доказательство найдено диссертантом.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех параграфов, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 105 страниц. Библиографический список содержит 75 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении приводится обзор исследований по проблематике, которой посвящена диссертация, определены цели и задачи работы, кратко описаны результаты, полученные автором в решении поставленных задач.

В §1 приводятся все необходимые определения, обозначения и предварительные результаты. Некоторые из этих результатов являются новыми и принадлежат диссертанту. В частности, в этом параграфе вводится ряд новых понятий, связанных с комбинаторикой слов (таких, как k-разложение слова в произведение k-блоков и k-разделителей, глубина буквы в слове и др.), и изучены их свойства. Эти понятия и результаты играют ключевую роль в §3 диссертации

Основным результатом §2 является

Теорема 1. *Решетка надкоммутативных многообразий моноидов не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.*

Очевидно, что из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Решетка* $\mathbb{MON}$ *не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству.*

В §3 диссертации дается полное описание негрупповых цепных многообразий моноидов. Для формулировки этого результата нам необходимо ввести некоторые определения и обозначения. Через F обозначается абсолютно свободная полугруппа счетного ранга над некоторым алфавитом. Как обычно, элементы полугруппы F будем называть *словами*, а элементы алфавита — *буквами*. И слова, и буквы будут обозначаться маленькими латинскими буквами, но, в отличие от букв, слова, заведомо не являющиеся буквами или не обязанные ими быть, выделяются жирным шрифтом. Через F^1 будем обозначать полугруппу F с внешнеприсоединенной единицей, которую мы будем трактовать как пустое слово. Две части тождества мы будем соединять знаком $\approx$, а обычным знаком равенства будет, среди прочего, обозначаться отношение равенства на моноиде F^1. Для произвольного $q \in \mathbb{N}$ обозначим через S_q симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \dots, q\}$. Если $\pi, \tau \in S_q$, то положим

$$\mathbf{w}_q(\pi,\tau) = \Big(\prod_{i=1}^{q} z_i t_i\Big) x \Big(\prod_{i=1}^{q} z_{\pi(i)} z_{q+\tau(i)}\Big) x \Big(\prod_{i=q+1}^{2q} t_i z_i\Big),$$
$$\mathbf{w}'_q(\pi,\tau) = \Big(\prod_{i=1}^{q} z_i t_i\Big) x^2 \Big(\prod_{i=1}^{q} z_{\pi(i)} z_{q+\tau(i)}\Big) \Big(\prod_{i=q+1}^{2q} t_i z_i\Big).$$

Через σ_1 обозначим тождество $xyzxty \approx yxzxty$, а через σ_2 — двойственное к нему тождество. Через $\operatorname{var}\Sigma$ обозначается многообразие моноидов, заданное системой тождеств Σ. Зафиксируем обозначения для следующих многообразий:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{C}_n = \operatorname{var}\{x^n \approx x^{n+1},\ xy \approx yx\},\\
&\mathbf{D} = \operatorname{var}\{x^2 \approx x^3,\ x^2y \approx yx^2,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ xzxyty \approx xzyxty\},\\
&\mathbf{K} = \operatorname{var}\{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx\},\\
&\mathbf{L} = \operatorname{var}\{x^2y \approx yx^2,\ xyxzx \approx x^2yz,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\\
&\qquad\qquad \mathbf{w}_q(\pi,\tau) \approx \mathbf{w}'_q(\pi,\tau) \mid q \in \mathbb{N},\ \pi,\tau \in S_q\},\\
&\mathbf{LRB} = \operatorname{var}\{xy \approx xyx\},\\
&\mathbf{N} = \operatorname{var}\{x^2y \approx yx^2,\ x^2yz \approx xyxzx,\ \sigma_2,\ xzxyty \approx xzyxty\},\\
&\mathbf{RRB} = \operatorname{var}\{yx \approx xyx\},
\end{aligned}$$

где $n \geq 2$. Через $\overleftarrow{\mathbf{X}}$ обозначается многообразие моноидов, *двойственное* к многообразию $\mathbf{X}$ (т.е. состоящее из моноидов, антиизоморфных моноидам из $\mathbf{X}$).

Основным результатом §3 является

Теорема 2. *Негрупповое многообразие моноидов является цепным тогда и только тогда, когда оно содержится в одном из многообразий $\mathbf{C}_n$ для некоторого $n \geq 2$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{K}$, $\overleftarrow{\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{LRB}$, $\mathbf{N}$, $\overleftarrow{\mathbf{N}}$ и $\mathbf{RRB}$.*

Из доказательства теоремы 2 можно извлечь полный список всех негрупповых цепных многообразий моноидов. Для того, чтобы сформулировать соответствующее утверждение, нам потребуется еще несколько обозначений. Во всех этих обозначениях $k \in \mathbb{N}$ и $1 \leq m \leq k$.

Положим $\mathbf{b}_{k,m} = x_{k-1}x_kx_{k-2}x_{k-1}\cdots x_{m-1}x_m$ и $\mathbf{b}_k = \mathbf{b}_{k,1}$; будем полагать также, что $\mathbf{b}_0$ является пустым словом. Введем обозначения для следующих четырех счетных серий тождеств:

$$\begin{aligned}
\alpha_k &: \ x_ky_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1} \approx y_kx_kx_{k-1}x_ky_k\mathbf{b}_{k-1},\\
\beta_k &: \ xx_kx\mathbf{b}_k \approx x_kx^2\mathbf{b}_k,\\
\gamma_k &: \ y_1y_0x_ky_1\mathbf{b}_k \approx y_1y_0y_1x_k\mathbf{b}_k,\\
\delta_k^m &: \ y_{m+1}y_mx_ky_{m+1}\mathbf{b}_{k,m}y_m\mathbf{b}_{m-1} \approx y_{m+1}y_my_{m+1}x_k\mathbf{b}_{k,m}y_m\mathbf{b}_{m-1}.
\end{aligned}$$

Наконец, зафиксируем обозначения для следующих многообразий:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{D}_k = \mathrm{var}\{x^2 \approx x^3,\ x^2y \approx yx^2, \sigma_1, \sigma_2, \gamma_1, x^2y_1y_2\cdots y_k \approx xy_1xy_2x\cdots xy_kx\},\\
&\mathbf{E} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x^3,\ x^2y \approx xyx,\ x^2y^2 \approx y^2x^2\},\\
&\mathbf{F}_k = \mathrm{var}\{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx,\ \alpha_k\},\\
&\mathbf{H}_k = \mathrm{var}\{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx,\ \beta_k\},\\
&\mathbf{I}_k = \mathrm{var}\{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx,\ \gamma_k\},\\
&\mathbf{J}_k^m = \mathrm{var}\{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx,\ \delta_k^m\},\\
&\mathbf{K} = \mathrm{var}\{xyx \approx xyx^2,\ x^2y^2 \approx y^2x^2,\ x^2y \approx x^2yx\},\\
&\mathbf{M} = \mathrm{var}\{x^2y \approx yx^2,\ x^2yz \approx xyxzx,\ \sigma_2,\ \gamma_1, \alpha_1\},\\
&\mathbf{SL} = \mathrm{var}\{x \approx x^2,\ xy \approx yx\}.
\end{aligned}$$

Следствие 2. *Многообразия* $\mathbf{C}_n$, $\mathbf{D}_k$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\overleftarrow{\mathbf{E}}$, $\mathbf{F}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{F}_k}$, $\mathbf{H}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{H}_k}$, $\mathbf{I}_k$, $\overleftarrow{\mathbf{I}_k}$, $\mathbf{J}_k^m$, $\overleftarrow{\mathbf{J}_k^m}$, $\mathbf{K}$, $\overleftarrow{\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}$, $\mathbf{LRB}$, $\mathbf{M}$, $\overleftarrow{\mathbf{M}}$, $\mathbf{N}$, $\overleftarrow{\mathbf{N}}$, $\mathbf{RRB}$, $\mathbf{SL}$, *где* $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leq m \leq k$, *и только они являются негрупповыми цепными многообразиями моноидов.*

Множество всех негрупповых цепных многообразий моноидов, упорядоченных по включению, вместе с тривиальным многообразием, которое обозначается через $\mathbf{T}$, изображено на рис. 1.

В [5, следствие 2] отмечается, что всякое негрупповое цепное многообразие полугрупп содержится в некотором максимальном цепном многообразии, а всякое негрупповое не цепное многообразие полугрупп содержит некоторое *почти цепное* (т.е. минимальное не цепное) подмногообразие. Для многообразий моноидов аналоги каждого

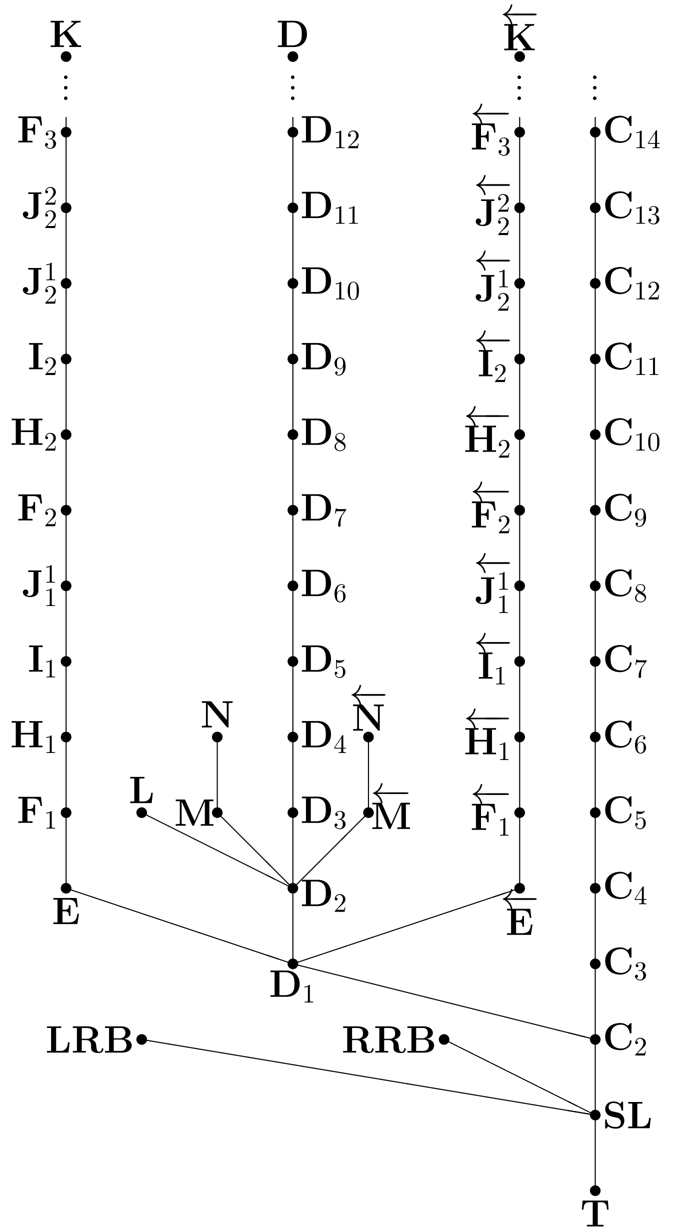

Рис. 1: все негрупповые цепные многообразия моноидов

из этих свойств неверны. Из рис. 1 видно, что цепное многообразие $\mathbf{C}_n$ при $n > 2$ не содержится ни в каком максимальном цепном многообразии. Положим $\mathbf{O} = \mathrm{var}\{x^2y \approx yx^2,\ x^2yz \approx xyxzx, \sigma_1, \sigma_2\}$. Из доказательства теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Если* $\mathbf{X}$ *— такое многообразие моноидов, что* $\mathbf{L} \subset \mathbf{X} \subseteq \mathbf{O}$, *то* $\mathbf{X}$ *не является цепным многообразием и не содержит никакое почти цепное подмногообразие.*

Чтобы сформулировать еще одно следствие, напомним, что многообразие универсальных алгебр называется *локально конечным*, если все его конечно порожденные алгебры конечны, и *конечно порожденным*, если оно порождается конечной алгеброй. Ясно, что если многообразие содержится в некотором конечно порожденном многообразии, то оно локально конечно. Из доказательства теоремы 2 вытекает

Следствие 4. *Произвольное негрупповое цепное многообразие моноидов содержится в некотором конечно порожденном многообразии и, в частности, является локально конечным.*

Отметим, что, в силу упоминавшихся выше результатов работы [15], существует континуум не локально конечных цепных многообразий групп.

В §4 диссертации изучаются специальные элементы в решетке $\mathbb{MON}$. Многообразие всех моноидов будем обозначать через $\mathbf{MON}$. Основными результатами §4 являются следующие две теоремы.

Теорема 3. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *— модулярный, нижнемодулярный и верхнемодулярный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *— нейтральный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$, $\mathbf{SL}$ *и* $\mathbf{MON}$.

Теорема 4. *Для многообразия моноидов* $\mathbf{V}$ *следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mathbf{V}$ *— модулярный и верхнемодулярный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(ii) $\mathbf{V}$ *— костандартный элемент решетки* $\mathbb{MON}$*;*

(iii) $\mathbf{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathbf{T}$*,* $\mathbf{SL}$*,* $\mathbf{C}_2$ *и* $\mathbf{MON}$.

Как мы уже отмечали выше, элемент решетки $\mathbb{SEM}$ является нейтральным тогда и только тогда, когда он является костандартным [4, теорема 1.3]. Теоремы 3 и 4 показывают, что в решетке $\mathbb{MON}$ эти свойства не эквивалентны.

Следующее утверждение дает существенную информацию о верхнемодулярных элементах решетки $\mathbb{MON}$. Многообразие моноидов называют *собственным*, если оно не совпадает с многообразием всех моноидов. Как и в случае полугрупп, мы будем называть многообразие моноидов *вполне регулярным*, если оно состоит из *вполне регулярных* моноидов (объединений групп).

Предложение 1. *Если собственное многообразие моноидов* $\mathbf{V}$ *является верхнемодулярным элементом решетки* $\mathbb{MON}$*, то* $\mathbf{V}$ *либо коммутативно, либо вполне регулярно.*

Поскольку кодистрибутивный элемент произвольной решетки является ее верхнемодулярным элементом, из предложения 1 следует, что любое собственное многообразие моноидов, являющееся кодистрибутивным элементом решетки $\mathbb{MON}$, либо коммутативно, либо вполне регулярно. Оказывается, что справедливо следующее

Предложение 2. *Всякое коммутативное многообразие моноидов является кодистрибутивным элементом решетки* $\mathbb{MON}$.

Предложения 1 и 2 сводят изучение верхнемодулярных и кодистрибутивных элементов решетки $\mathbb{MON}$ к вполне регулярному случаю.

В заключении диссертации изложены итоги выполненного исследования, рекомендации, перспективы дальнейшей разработки темы.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Б.М.Верникову за постановки задач, постоянное внимание к его работе, многочисленные полезные обсуждения и большую помощь при подготовке текстов статей и диссертации.

Список литературы

[1] Айзенштат, А. Я. *О решетке многообразий полугрупп* / А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46.

[2] Артамонов, В. А. *Цепные многообразия групп* / В. А. Артамонов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1978. – Вып. 3. – С. 3–8.

[3] Верников, Б. М. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II / Б. М. Верников // Фундам. и прикл. математика. – 2008. – Т. 14, No. 7. – С. 43–51.

[4] Верников, Б. М. *Кодистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* / Б. М. Верников // Изв. вузов. Математика. – 2011. – No. 7. – С. 13–21.

[5] Суханов, Е. В. *Почти линейные многообразия полугрупп* / Е. В. Суханов // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32, No. 4. – С. 469–476.

[6] Шеврин, Л. Н. *Решетки многообразий полугрупп* / Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков // Изв. вузов. Математика. – 2009. – No. 3. – С. 3–36.

[7] Burris, S. *Embedding the dual of* Π_m *in the lattice of equational classes of commutative semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30, No. 1. – P. 37–39.

[8] Burris, S. *Embedding the dual of* Π_∞ *in the lattice of equational classes of semigroups* / S. Burris, E. Nelson // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1, No. 2. – P. 248–254.

[9] Evans, T. *The lattice of semigroup varieties* / T. Evans // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2, No. 1. – P. 1–43.

[10] Grätzer, G. Lattice Theory: Foundation. / G. Grätzer. – Basel: Springer Basel AG, 2011. – xxix+613 pp.

[11] Gusev, S. V. *Cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / S. V. Gusev, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Algebra and Discrete Math. – 2018. – Vol. 26, No. 1. – P. 34–46.

[12] Head, T. J. *The varieties of commutative monoids* / T. J. Head // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. – 1968. – Vol. 16. – P. 203–206.

[13] Jackson, M. *Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. – 2005. – Vol. 70, No. 2. – P. 159–187; *Erratum to: Finiteness properties of varieties and the restriction to finite algebras* / M. Jackson // Semigroup Forum. 2018. – Vol. 96, No. 1. – P. 197–198.

[14] Jackson, M. *Monoid varieties with extreme properties* / M. Jackson, E. W. H. Lee // Trans. Amer. Math. Soc. – 2018. – Vol. 370, No. 7. – P. 4785–4812.

[15] Kozhevnikov, P. A. *On nonfinitely based varieties of groups of large prime exponent* / P. A. Kozhevnikov // Commun. Algebra. – 2012. – Vol. 40, No. 7. – P. 2628–2644.

[16] Lee, E. W. H. *Varieties generated by* 2*-testable monoids* / E. W. H. Lee // Studia Sci. Math. Hungar. – 2012. – Vol. 49. – P. 366–389.

[17] Lee, E. W. H. *Maximal Specht varieties of monoids* / E. W. H. Lee // Moscow Math. J. – 2012. – Vol. 12, No. 3. – P. 787–802.

[18] Lee, E. W. H. *Almost Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Beiträge zur Algebra und Geometrie. – 2013. – Vol. 54, No. 1. – P. 121–129.

[19] Lee, E. W. H. *Inherently non-finitely generated varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Записки научных семинаров ПОМИ. – 2014. – Т. 423. – С. 166–182.

[20] Lee, E. W. H. *On certain Cross varieties of aperiodic monoids with central idempotents* / E. W. H. Lee // Results Math. – 2014. – Vol. 66, No. 2. – P. 491–510.

[21] Pollák, Gy. *Some lattices of varieties containing elements without cover* / Gy. Pollák // Quad. Ric. Sci. – 1981. – Vol. 109. – P. 91–96.

[22] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattices of varieties of semigroups and epigroups* / V. Yu. Shaprynskiĭ, D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Электрон. ресурс. https://arxiv.org/abs/1810.01610 [P. 1–15.]

[23] Shaprynskiĭ, V. Yu. *Cancellable elements of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov // Электрон. ресурс. https://arxiv.org/abs/1902.04576 [P. 1–9.]

[24] Skokov, D. V. *On modular and cancellable elements of the lattice of semigroup varieties* / D. V. Skokov, B. M. Vernikov // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 175–186.

[25] Vernikov, B. M. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 59, No. 3–4. – P. 405–428.

[26] Vernikov, B. M. *Special elements in lattices of semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2015. – Vol. 81, No. 1–2. – P. 79–109.

[27] Vernikov, B. M. *Upper-modular and related elements of the lattice of commutative semigroup varieties* / B. M. Vernikov // Semigroup Forum. – 2017. – Vol. 94, No. 3. – P. 696–711.

[28] Volkov, M. V. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* / M. V. Volkov // In: P. M. Higgins (ed.), Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex. Colchester: University of Essex. – 1994. – P. 99–110.

[29] Volkov, M. V. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* / M. V. Volkov // Contrib. General Algebra. – 2005. – Vol. 16. – P. 275–288.

[30] Wismath, S. L. *The lattice of varieties and pseudovarieties of band monoids* / S. L. Wismath // Semigroup Forum. – 1986. – Vol. 33, No. 1. – P. 187–198.

[31] Zhang, W. T. *A new example of limit variety of aperiodic monoids* / W. T. Zhang, Y. F. Luo // Электрон. ресурс. https://arxiv.org/abs/1901.02207 [P. 1–16.]

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[32] Гусев, С. В. *О решетке надкоммутативных многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Изв. вузов. Математика. – 2018. – No. 5. – С. 28–32.

[33] Gusev, S. V. *Special elements of the lattice of monoid varieties* / S. V. Gusev // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 97, No. 2. – Article 29. – P. 1-12.

[34] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev, B. M. Vernikov // Dissert. Math. – 2018. – Vol. 534. – P. 1–73.

Другие публикации

[35] Гусев, С. В. *Нейтральные и костандартные элементы решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Междунар. конф. «Мальцевские чтения»: Тез. докл. Новосибирск. – 2017. – С. 145.

[36] Гусев, С. В. *О кодистрибутивных и верхнемодулярных элементах решетки многообразий моноидов* / С. В. Гусев // Соврем. проблемы математики и ее приложений: тезисы Междунар. (49-й Всеросс.) молодёжной школы-конф. Екатеринбург. – 2018. – С. 12.

[37] Gusev, S. V. *Chain varieties of monoids* / S. V. Gusev // Groups and graphs, algorithms and automata: Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School. Ekaterinburg. – 2015. – P. 52.

[38] Gusev, S. V. *On the lattice of overcommutative varieties of monoids* / S. V. Gusev // Groups and graphs, metrics and manifolds: Abstracts of the Int. Conf. and PhD-Master Summer School. Ekaterinburg. – 2017. – P. 54.