Формула Грина

Теорема 1. Пусть

- D – **правильная, односвязная** (т.е. без дырок) **область** на ПЛОСКОСТИ,
- ограниченная **кусочно-гладкой замкнутой кривой** Г (**контуром**), ориентированной **против часовой стрелки,**
- $\vec{a}$ – **непререрывно-дифференцируемое** в D **векторное поле**.

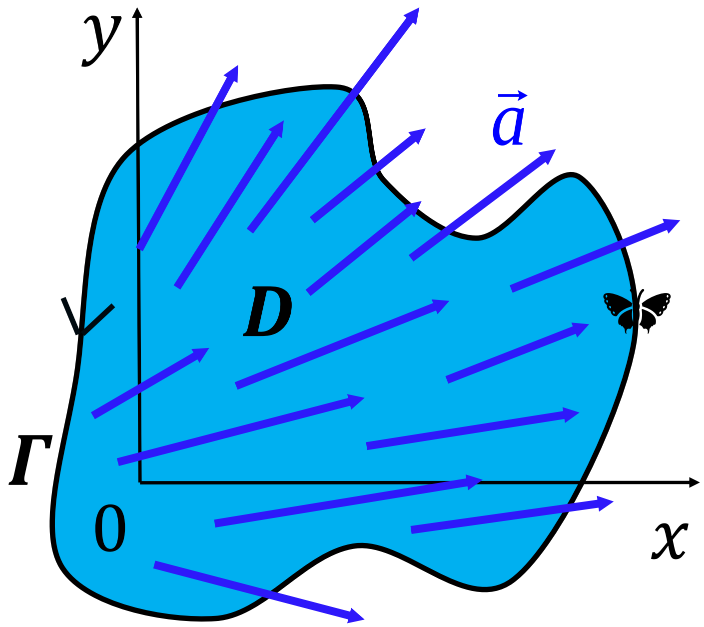
Формула Грина

Тогда

$$\boxed{\oint_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r}) = \oint_{\Gamma} a_x dx + a_y dy = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy}$$

Криволинейный интеграл по контуру вычисляется сведением к двойному по области внутри контура!

Формула Грина. Иллюстрация



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

Задача 1. (*II* способ: по формуле Грина).
Найти работу силы тяжести по произвольному замкнутому контуру Г, действующих на груз единичной массы (циркуляцию) против часовой стрелки.

Решение. Дано векторное поле:

$$\vec{a} = -\vec{g} = (0, -g) = \left(a_x, a_y\right)$$

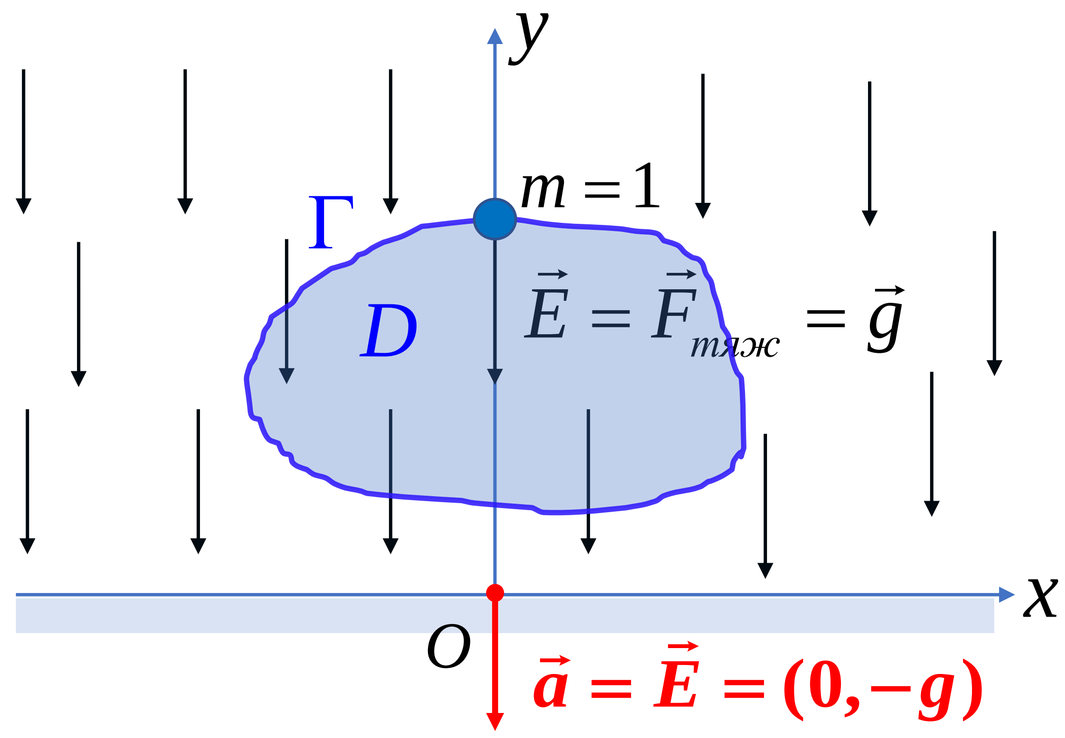
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

$$A = \oint\limits_{\Gamma} \left(\vec{a}, d\vec{r}\right) = \oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial a_y}{\partial x} &= (-g)'\Big|_x = 0, \\ \frac{\partial a_x}{\partial y} &= (0)'\Big|_y = 0 \end{aligned} \right| \Rightarrow A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Получили
тот же ответ, что и I способом!

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1. Иллюстрация



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

<u>Задача 2</u>. (*II* способ: по формуле Грина). Найти работу электростатических сил точечного заряда q по перемещению единичного заряда вдоль единичной окружности (циркуляцию) против часовой стрелки.

<u>Решение</u> (см. задачу 2 лекции 7):

$$\vec{a} = k \cdot q \left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \right) = (a_x, a_y)$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

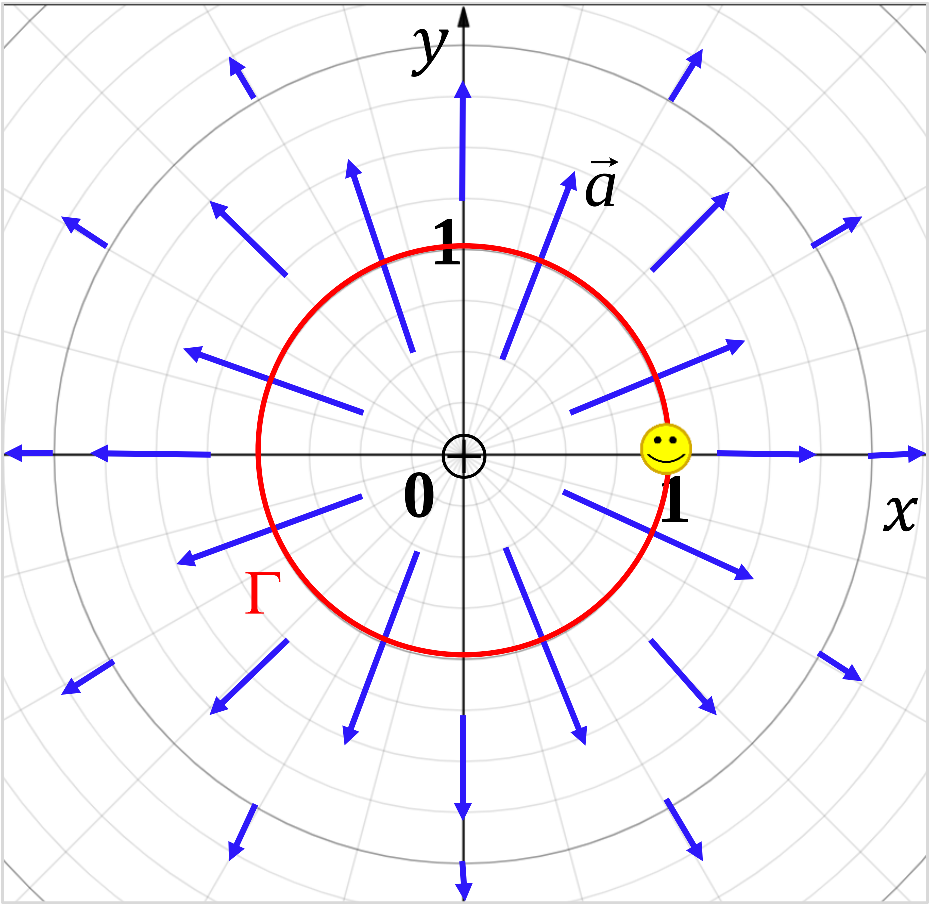
По формуле Грина

$$A = \oint\limits_{\Gamma} \left(\vec{a}, d\vec{r} \right) = \oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

Упр.:

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} = -\frac{3kqxy}{\left(x^2 + y^2 \right)^{5/2}}$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

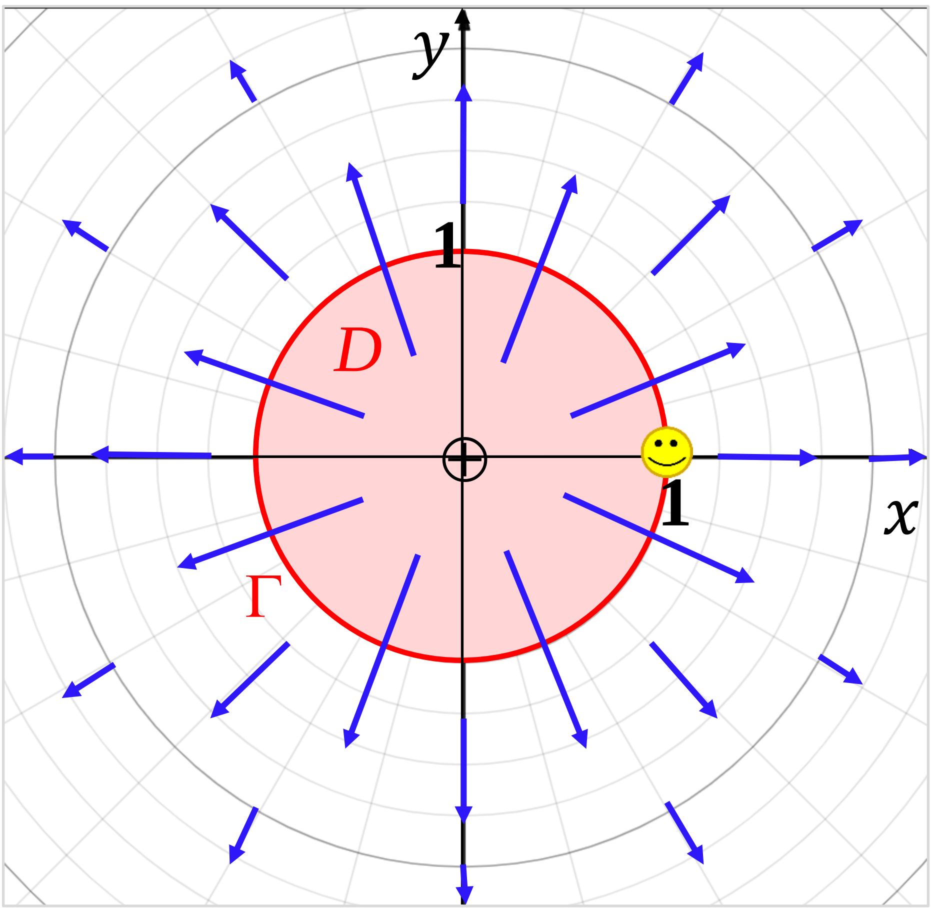


$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



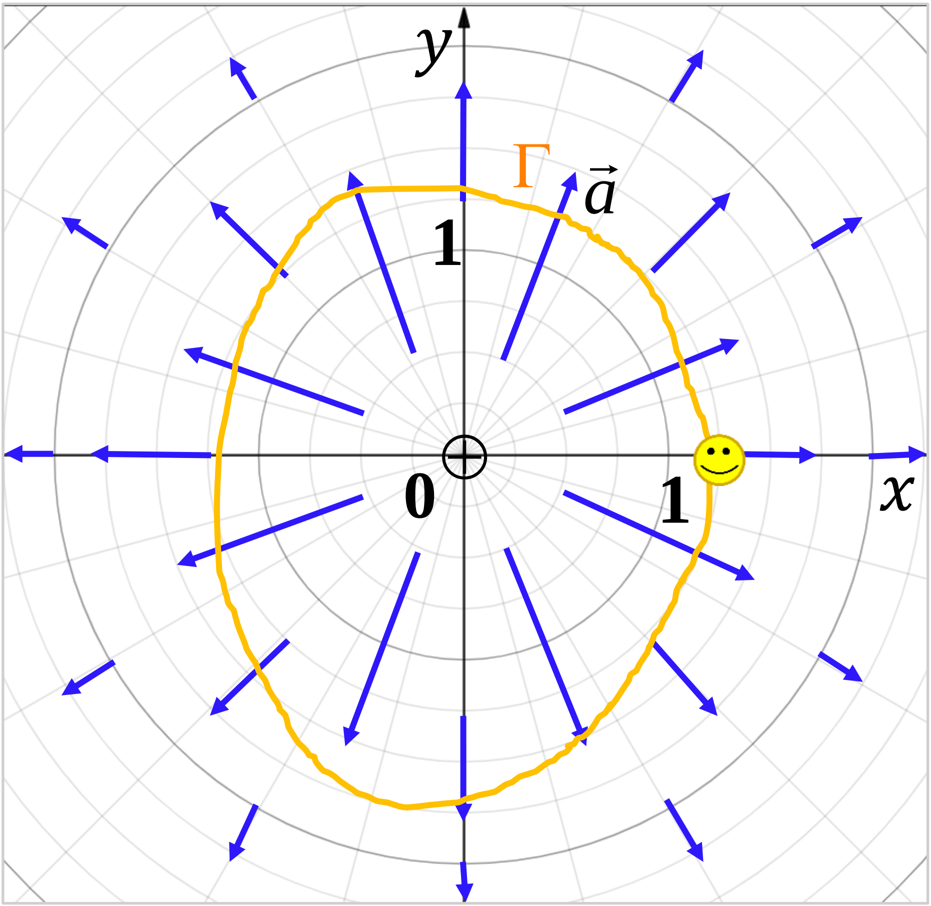
$$\frac{\partial a_x}{\partial y} = \frac{\partial a_y}{\partial x}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \oint_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Получили тот же результат, что и I способом!

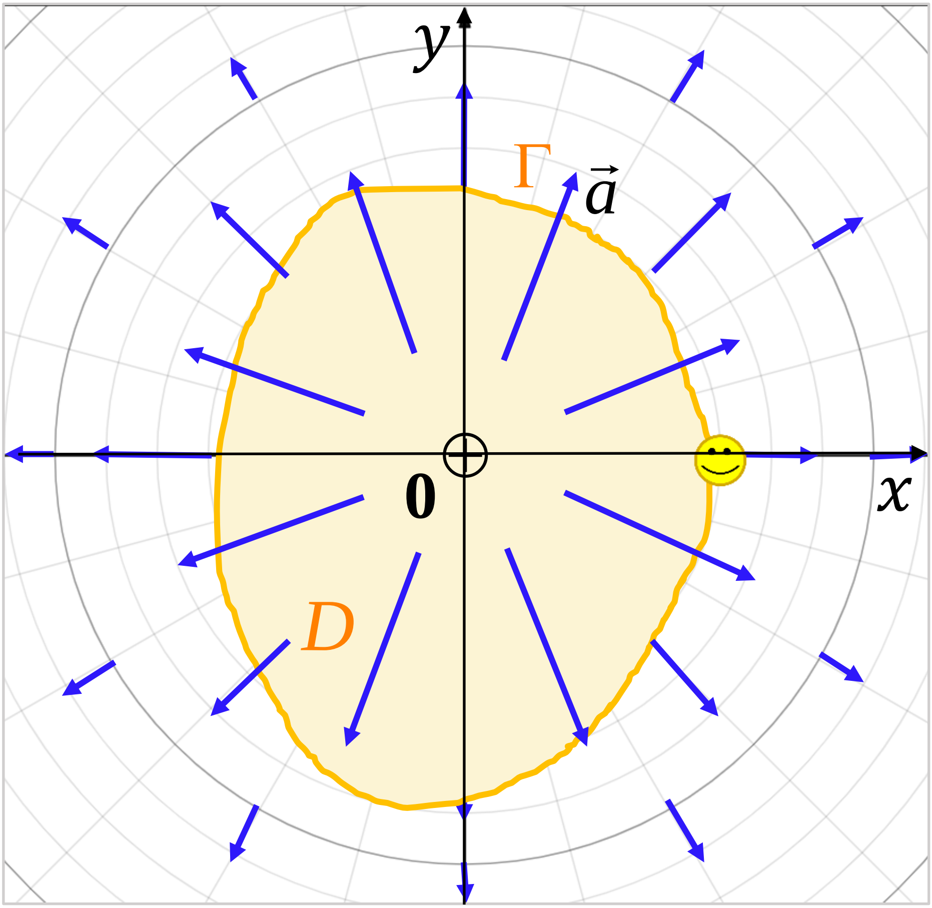
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



Заметим, что контур Г может быть произвольным:

$$A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2



Заметим, что контур Г может быть произвольным:

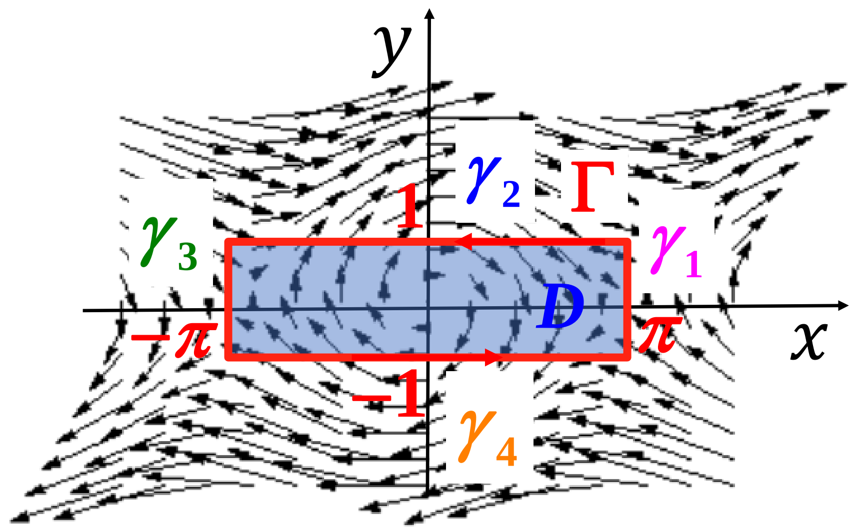
$$A = \oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3

Задача 3. Найти двумя способами криволинейный интеграл II рода данного поля по замкнутому контуру Г (циркуляцию), являющегося границей прямоугольника, изображенного на рисунке если движение идет против часовой стрелки.

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

Решение: *I* способ: непосредственное вычисление.



$$\vec{a} = (y, -\sin x) = \left(a_x, a_y\right)$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

$$\gamma_1:\begin{cases} x=\pi \\ y=t \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$$

$$-1\to t\to 1$$

$$\gamma_2:\begin{cases} x=t \\ y=1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$$

$$\pi\to t\to -\pi$$

$$\gamma_3:\begin{cases} x=-\pi \\ y=t \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$$

$$1\to t\to -1$$

$$\gamma_4:\begin{cases} x=t \\ y=-1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases}$$

$$-\pi\to t\to \pi$$

$$\oint\limits_{\Gamma}(\vec{a},\overrightarrow{dr})=\int\limits_{\gamma_1}(\vec{a},\overrightarrow{dr})+\int\limits_{\gamma_2}(\vec{a},\overrightarrow{dr})+\int\limits_{\gamma_3}(\vec{a},\overrightarrow{dr})+\int\limits_{\gamma_4}(\vec{a},\overrightarrow{dr})$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

$$\int_{\gamma_1} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = \int_{\gamma_1} a_x dx + a_y dy = \int_{\gamma_1} y dx - \sin x dy =$$

$$= \int_{-1}^{1} (t \cdot 0 + \sin \pi dt) = \int_{-1}^{1} 0\, dt = 0$$

$$\int_{\gamma_2} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = \int_{\gamma_2} a_x dx + a_y dy = \int_{\gamma_2} y dx - \sin x dy =$$

$$= \int_{\pi}^{-\pi} (1 \cdot dt - \sin t \cdot 0) = t\Big|_{\pi}^{-\pi} = (-\pi) - \pi = -2\pi$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *I*-м способом

Аналогично, $\int\limits_{\gamma_3} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0,$

$\int\limits_{\gamma_4} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = -2\pi$ (упражнение, 1б)

$$\oint\limits_{\Gamma} (\vec{a}, \overrightarrow{dr}) = 0 - 2\pi + 0 - 2\pi = -4\pi$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *II*-м способом

<u>*II* способ</u>: вычисление по формуле Грина.

$$I = \oint\limits_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r}) = \oint\limits_{\Gamma} a_x dx + a_y dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial a_y}{\partial x} = (-\sin x)'\Big|_x = -\cos x, \\ \dfrac{\partial a_x}{\partial y} = (y)'\Big|_y = 1 \end{array}\right| \Rightarrow$$

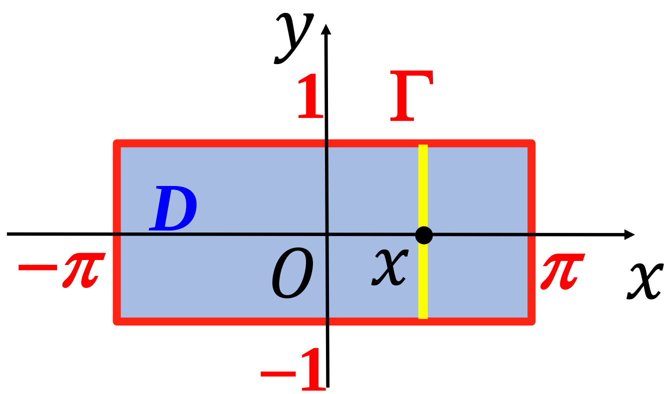
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *II*-м способом

$$I = \iint\limits_D \left(-\cos x - 1\right) dxdy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-1}^{1} \left(-\cos x - 1\right) dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(-\cos x - 1\right) \int_{-1}^{1} dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx \left(-\cos x - 1\right) \left(y\right)\Big|_{-1}^{1} =$$



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 3. Решение *II*-м способом

$$= \int_{-\pi}^{\pi} dx\left(-\cos x - 1\right)\cdot 2 =$$

$$= 2\left(-\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} dx\right) = 2\left(-\sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} - x\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= 2\big((-\sin\pi) - (-\sin(-\pi)) - (\pi - (-\pi))\big) = -4\pi$$

Тот же ответ!

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Опр. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P), P \in D,$ где D – область на плоскости (в пространстве), называется потенциальным, если существует такая дифференцируемая функция $u = u(P)$, что справедливо равенство

$$\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = (u'_x, u'_y)}$$

Функция $u = u(P)$ называется потенциалом поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$.

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Замечание 1. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$, $P \in D$, где D – область на плоскости (в пространстве) является **потенциальным**, если существует такая дифференцируемая функция (потенциал) $u = u(P)$, что справедливо равенство

$$\boxed{du = (\vec{a}, \overrightarrow{dr})}$$

т.е.

$$\boxed{du = a_x dx + a_y dy} \qquad \boxed{(du = a_x dx + a_y dy + a_z dz)}$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)

Теорема 2. Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P), P \in D, -$ гладкое векторное поле, D – односвязная область. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) поле $\vec{a} = \vec{a}(P) -$ *потенциально*;

(2) *интеграл* $\int_{\overset{\frown}{AB}} (\vec{a}(P), d\vec{r})$ *не зависит от пути интегрирования*;

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования)

(3) *циркуляция* $\oint_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r})$ по любому замкнутому контуру Γ, лежащему в области D, *равна нулю*;

(4) *поле* $\vec{a} = \vec{a}(P)$ *безвихревое* ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{0}$), т.е. выполняется условие

$$\boxed{\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}}$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Формула нахождения потенциала для потенциального поля

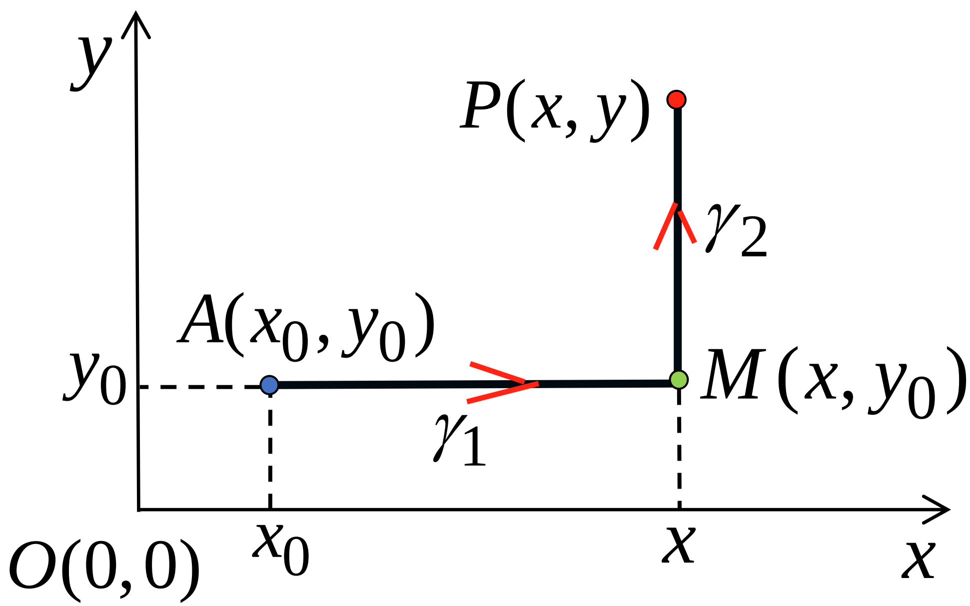
$$\boxed{u(P) = \int\limits_{\overset{\smile}{AP}} a_x dx + a_y dy}$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования

Кривую $\overset{\smile}{AP}$ можно выбирать произвольной, так как *интеграл не зависит от пути интегрирования*.

Обычно выбирают такую, как показано на рисунке.

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 4

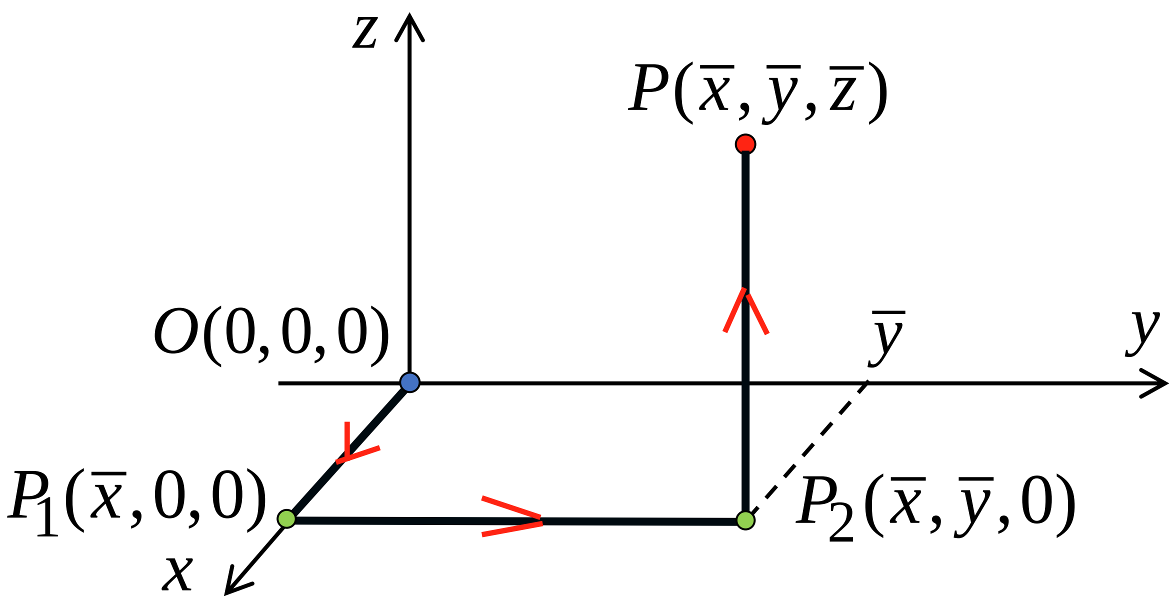
Задача 4. (*III* способ: при помощи потенциала). Найти работу силу тяжести поднятия груза массы $m = 1$ по винтовой лестнице радиуса R шага 1 на высоту h.

Решение: $\vec{a} = m\vec{g} = (0, 0, -g)$

$$L: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t, \quad t \in [0; 2\pi h] \\ z = \dfrac{t}{2\pi} \end{cases}$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 4

Сначала найдем потенциал гравитационного поля $\vec{a}$. Для этого «проложим путь» от т. $O(0,0,0)$ до произвольной т. $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 4

$$OP_1:\ \begin{cases} x = t \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \\ dz = 0 \end{cases} \qquad P_1P_2:\ \begin{cases} x = t \\ y = 0, \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$0 \to t \to \overline{x} \qquad\qquad 0 \to t \to \overline{x}$$

$$P_2P:\ \begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \overline{y}, \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = 0 \\ dz = dt \end{cases}$$

$$0 \to t \to \overline{z}$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 4

$$u(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - gdz =$$

$$= -\int\limits_{\overset{\cup}{OP}} gdz = -\left(\int\limits_{\overset{\cup}{OP_1}} gdz + \int\limits_{\overset{\cup}{P_1P_2}} gdz + \int\limits_{\overset{\cup}{P_1P}} gdz \right) =$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 4

$$= -\left(\int\limits_0^{\bar{x}} g \cdot 0 + \int\limits_0^{\bar{y}} g \cdot 0 + \int\limits_0^{\bar{z}} g \cdot dt \right) = -\int\limits_0^{\bar{z}} g \cdot dt = -g\bar{z}$$

потенциал: $u(x, y, z) = -gz$

Работа силы тяжести поднятия груза массы $m = 1$ на высоту h:

$$A = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A) = -gz\Big|_0^h = -gh = -mgh$$

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Из теоремы 2 и задач 1-2 следует

Замечание 2. Следующие векторные (силовые) поля являются *потенциальными*

- напряженность гравитационного поля у поверхности Земли (потенциал $u = -gh$);
- Напряженность электростатического поля точечного заряда (потенциал? $-$упр.);