Исследование функции-многочлена и построение графика

«МАТЕМАТИКА, II семестр»

ИЕНиМ. Департамент Фундаментальной и прикладной химии

Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В., к.ф.-м.н., доцент Перминова О.Е.

2021 г.

План исследования функции-многочлена

1) Найти *область определения* функции.

2) Найти точки пересечения с осями координат;

решить неравенства $y > 0,\ y < 0$.

3) Выяснить, является ли функция *четной*, *нечетной*, *функцией общего вида*.

4) Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x), \quad \lim\limits_{x \to -\infty} y(x).$

План исследования функции (продолжение)

5) Найти *интервалы монотонности*;
исследовать функцию на *локальный экстремум*.

5.1) Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $y' = 0$.

5.2) Решить неравенства $y' > 0$ ($y' < 0$) методом интервалов.

5.3) Найти точки локального экстремума.

6) Найти *интервалы выпуклости*, *вогнутости*.

6.1) Найти точки, в которых $y'' = 0$.

6.2) Решить неравенства $y'' > 0$ ($y'' < 0$) методом интервалов.

6.3) Найти точки перегиба.

Исследовать функцию $y = 2(x-1)^2(x+2)$
и построить ее график

Решение

$y = 2(x-1)^2(x+2)$ – это многочлен

1) Область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) Пересечение с осью Ox:

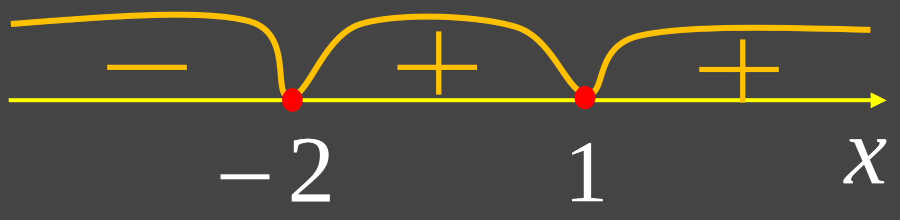
$y = 0$ при $x = -2$ и при $x = 1 \Rightarrow A_1(-2;0),\ A_2(1;0)$

Пересечение с осью Oy:

$x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A_3(0;4)$

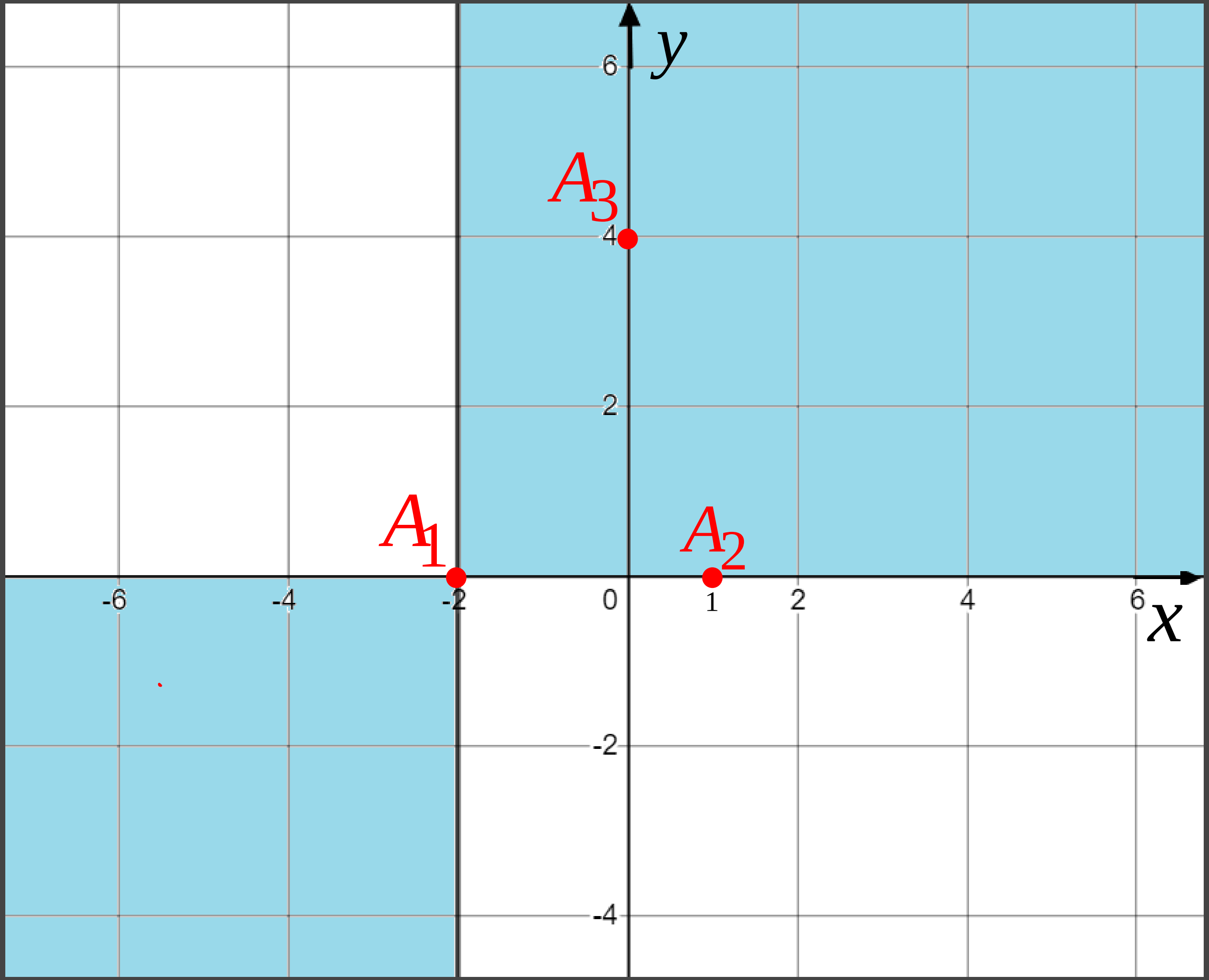
Решаем неравенства: $y > 0$ $(y < 0)$ *методом интервалов*

$2(x-1)^2(x+2) > 0$ $(y < 0)$



$y > 0$ при $x \in (-2;1) \cup (1;+\infty)$

$y < 0$ при $x \in (-\infty;-2)$


y
x
A_3
A_1
A_2
6
4
2
-2
-4
-6
-4
-2
0
1
2
4
6

3) *Четность / нечетность* функции $y = 2(x-1)^2(x+2)$

$$y(-x) = 2(-x-1)^2(-x+2) = -2(x+1)^2(x-2) \neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является четной

$$-y(-x) = 2(x+1)^2(x-2) \neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является нечетной

$\Rightarrow$ функция общего вида

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2(x-1)^2(x+2) = [2 \cdot (+\infty)^2(+\infty)] = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = [2 \cdot (-\infty)^2(-\infty)] = -\infty$

5) Найдем промежутки монотонности

и точки экстремума.

Для этого найдем y':

Раскрывать скобки

НЕ НАДО!

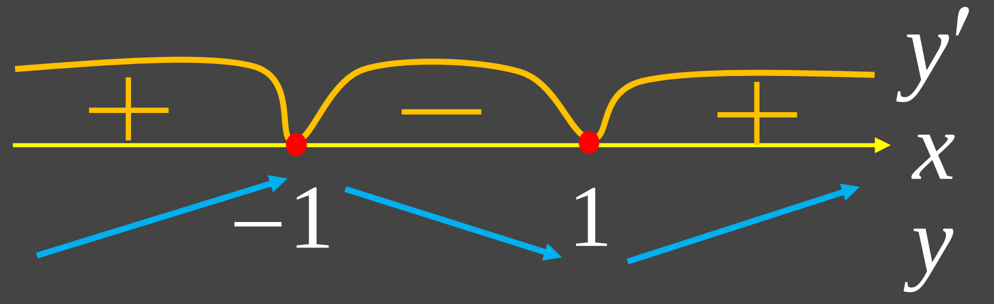
$$y' = \left(2(x-1)^2(x+2)\right)' = 2\left(\left((x-1)^2\right)'(x+2) + (x-1)^2(x+2)'\right) =$$

$$= 2\left(2(x-1)(x+2) + (x-1)^2\right) = 2(x-1)\left(2(x+2) + x - 1\right) =$$

$$= 2(x-1)\left(2x+4+x-1\right) = 2(x-1)\left(3x+3\right) = 6(x-1)\left(x+1\right)$$

$y' = 0$ при $x = -1$ и при $x = 1$

Решаем неравенство $y' > 0$ $(y' < 0)$ *методом интервалов*



$6(x-1)(x+1) > 0$ (< 0)

$y\uparrow$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

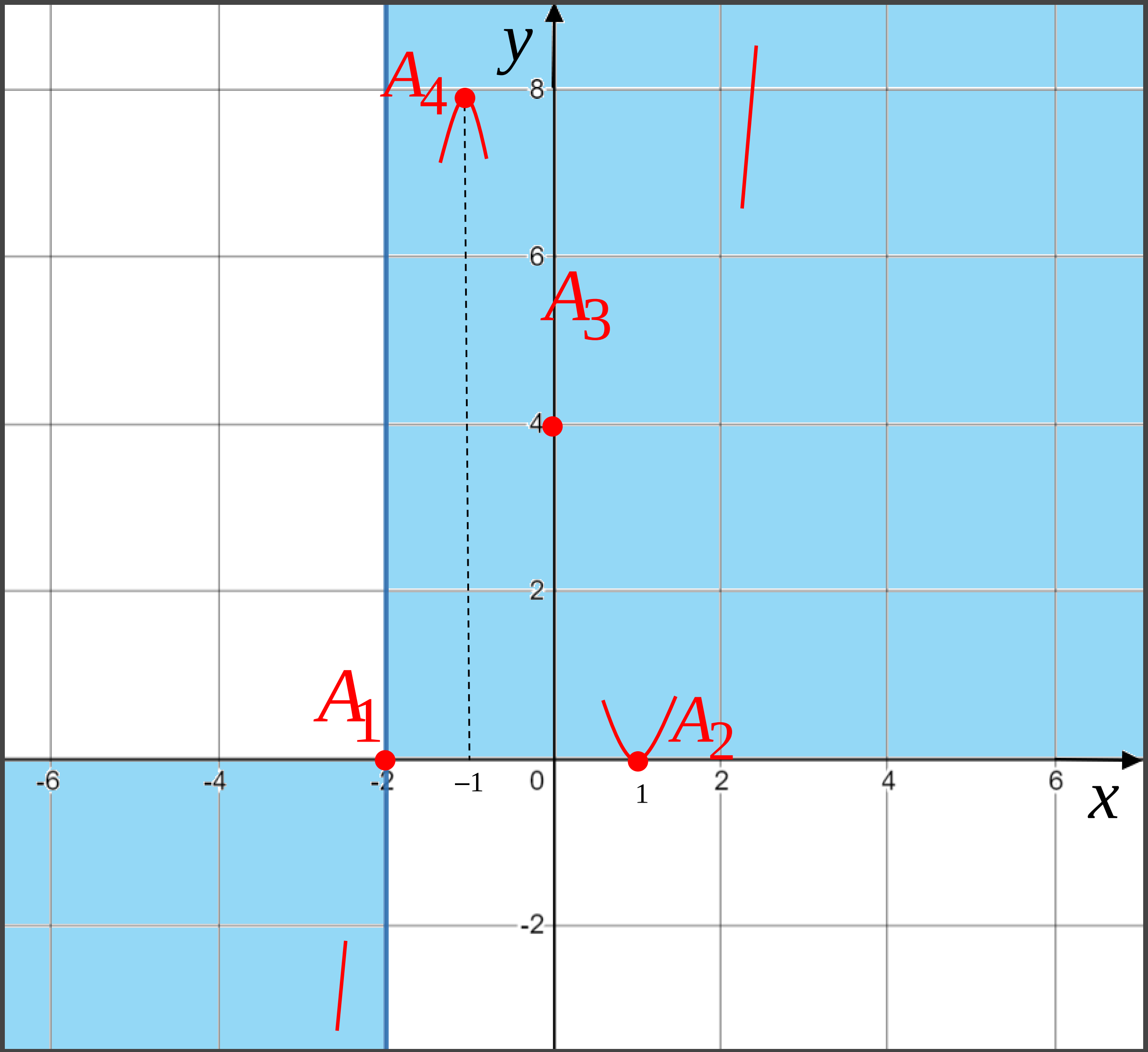
$y\downarrow$ при $x \in (-1; 1)$

$x = -1$ – *точка loc* max $\quad y(-1) = 2(-1-1)^2(-1+2) = 8$

$A_4(-1; 8)$ – *точка loc* max на графике

$x = 1$ – *точка loc* min $\quad y(1) = 2(1-1)^2(1+2) = 0$

$A_2(1; 0)$ – *точка loc* min на графике


y
8
6
4
2
-2
A_4
A_3
A_1
A_2
-6
-4
-2
−1
0
1
2
4
6
x

6) Найдем промежутки выпуклости, вогнутости.

и точки перегиба.

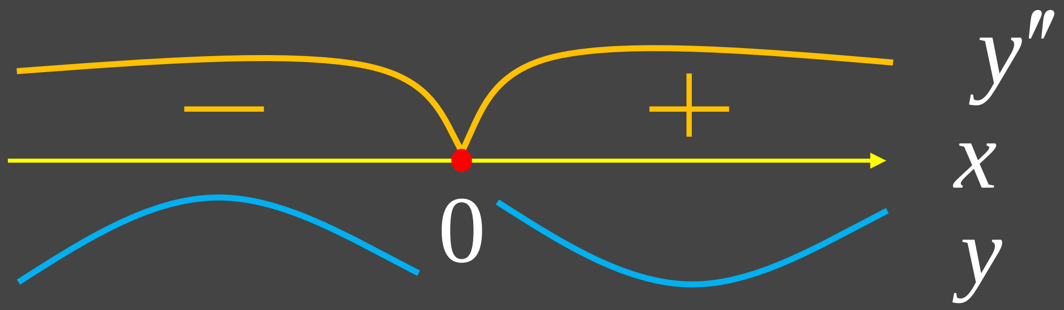
Для этого найдем y'':

$$y'' = \left(6(x-1)\left(x+1\right)\right)' = 6\left(\left(x-1\right)'(x+1)+(x-1)(x+1)'\right) =$$

$$= 6\left((x+1)+(x-1)\right) = 6\cdot 2x = 12x$$

$y'' = 0$ при $x = 0$

Решаем неравенство $y'' > 0$ ($y'' < 0$) *методом интервалов*



$12x > 0\ (< 0)$

$y \cup$ при $x \in (0; +\infty)$

$y \cap$ при $x \in (-\infty; 0)$

$x = 0$ – *точка перегиба* $\quad y(0) = 2(0-1)^2(0+2) = 4$

$A_3(0;4)$ – *точка перегиба* на графике

Выводы

1) $D(y)=(-\infty;+\infty)$

2) Пересечение с осью Ox: $A_1(-2;0)$, $A_2(1;0)$

Пересечение с осью Oy: $A_3(0;4)$

$y>0$ при $x\in(-2;1)\cup(1;+\infty)$ $y<0$ при $x\in(-\infty;-2)$

3) функция общего вида

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=-\infty$

Выводы (продолжение)

5) $y \uparrow$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$y \downarrow$ при $x \in (-1; 1)$

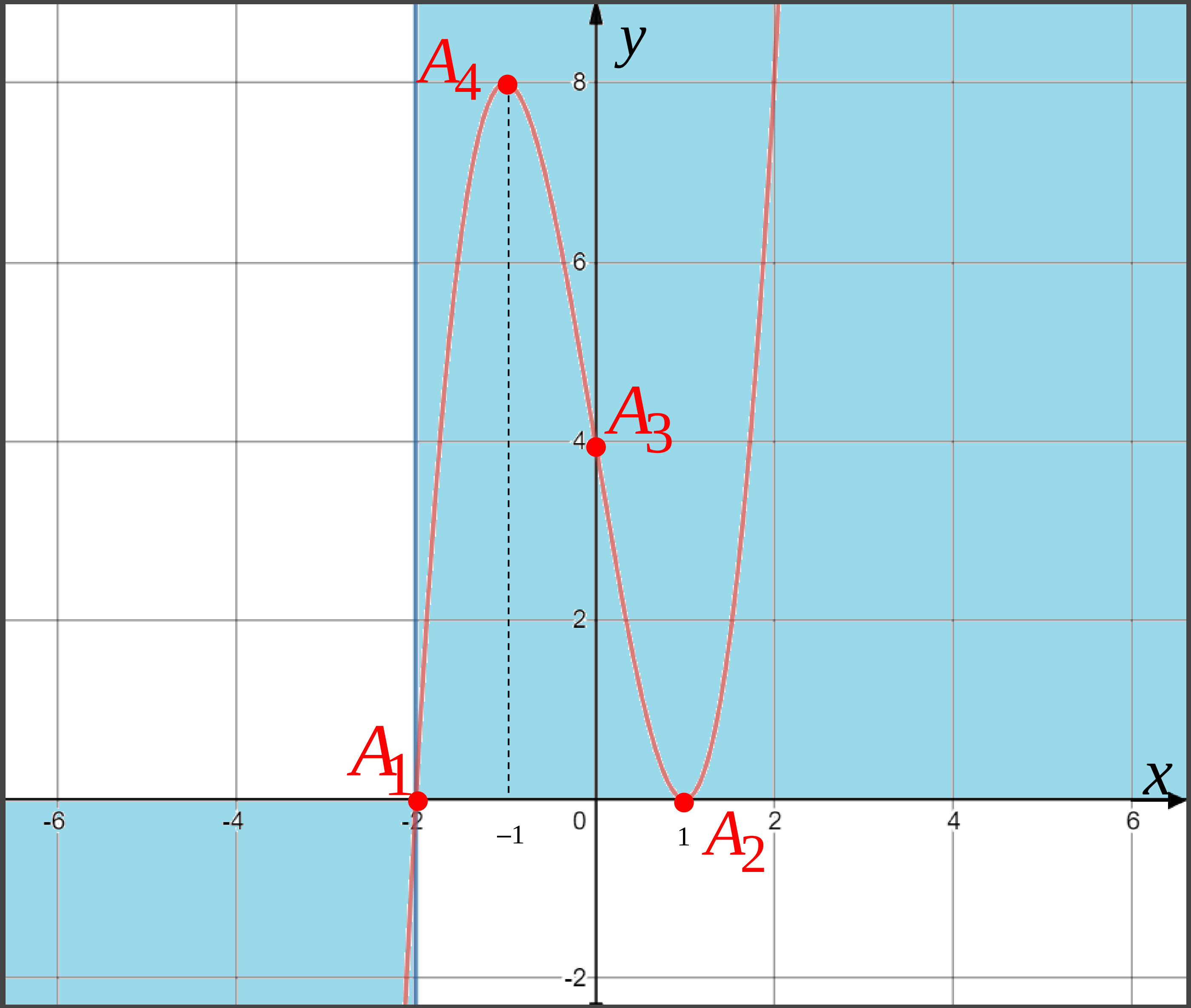
$A_4(-1; 8)$ – *точка loc* max на графике

$A_2(1; 0)$ – *точка loc* min на графике

6) $y \cup$ при $x \in (0; +\infty)$

$y \cap$ при $x \in (-\infty; 0)$

$A_3(0; 4)$ – *точка перегиба* на графике


y
x
A_4
A_3
A_1
A_2
8
6
4
2
-2
-6
-4
-2
−1
0
1
2
4
6