ИССЛЕДОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ИРРАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

«МАТЕМАТИКА»

ИЕНиМ. Департамент Фундаментальной и прикладной химии
Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,
к.ф.-м.н., доцент Перминова О.Е.

2021 г.

План исследования иррациональной функции

1) Найти *область определения* функции.

2) Найти точки пересечения с осями координат;

решить неравенства $y > 0$, $y < 0$.

3) Выяснить, является ли функция *четной*, *нечетной*, *функцией общего вида*.

4) Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$.

5) Найти асимптоты.

План исследования иррацион. функции (продолж.)

5) Найти *интервалы монотонности*;

исследовать функцию на *локальный экстремум.*

5.1) Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $y' = 0$ или не существует.

5.2) Решить неравенства $y' > 0$ $(y' < 0)$ методом интервалов.

5.3) Найти точки локального экстремума.

План исследования функции (продолжение)

6) Найти *интервалы выпуклости*, *вогнутости*.

6.1) Найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

6.2) Решить неравенства $y'' > 0$ ($y'' < 0$) методом интервалов.

6.3) Найти точки перегиба.

1. Исследовать функцию $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ и построить ее график

Решение

$y = y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ – это иррациональная функция

1) Область определения функции: $D(y) = (-\infty; +\infty)$

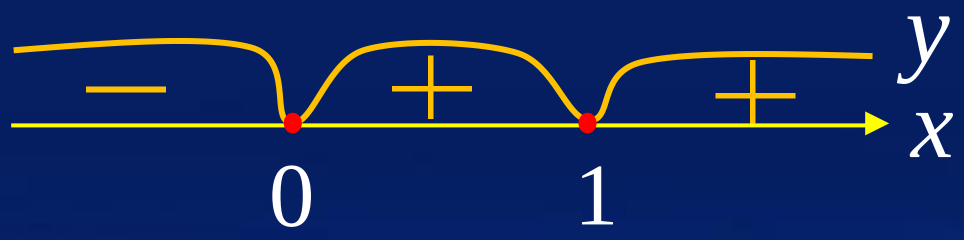
2) Пересечение с осью Ox:

$y = 0$ при $x = 0$ и при $x = 1$ $\Rightarrow A_1(0;0),\ A_2(1;0)$

Пересечение с осью Oy: $x = 0 \Rightarrow A_1(0;0)$

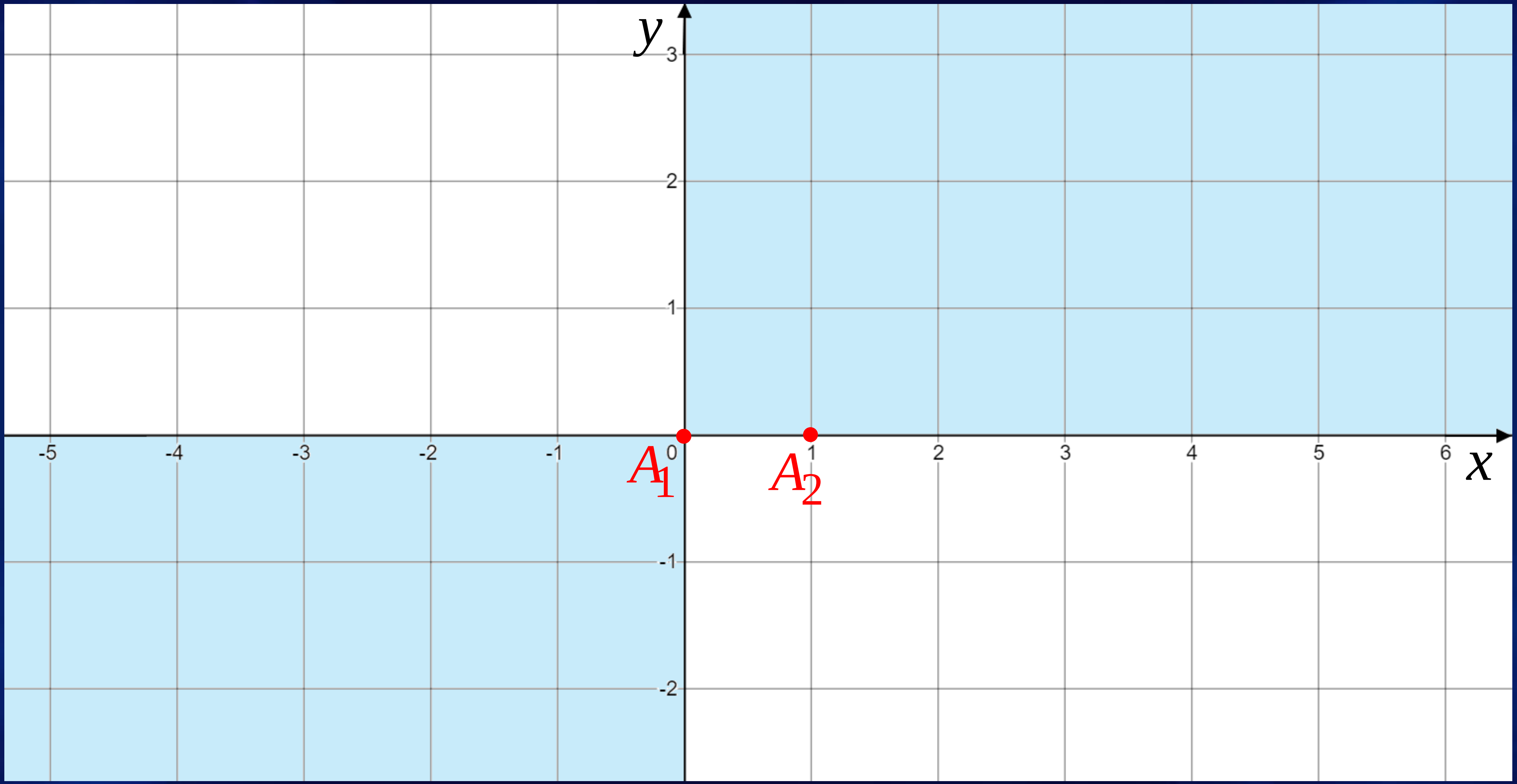
Решаем неравенства: $y > 0$ ($y < 0$) *методом интервалов*

$$\sqrt[3]{x(x-1)^2} > 0 \ (< 0)$$



$y > 0$ при $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$

$y < 0$ при $x \in (-\infty;0)$


y
3
2
1
-1
-2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
x
A1
A2

3) *Четность / нечетность* функции $y=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$

$$y(-x)=\sqrt[3]{-x(-x-1)^2}=-\sqrt[3]{x(x+1)^2}\neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является четной

$$-y(-x)=\sqrt[3]{x(x+1)^2}\neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является нечетной

$\Rightarrow$ функция общего вида

4). Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} = \left[\sqrt[3]{+\infty(+\infty)^2}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x(x-1)^2} = \left[\sqrt[3]{-\infty(-\infty)^2}\right] = -\infty$$

Найдем *наклонную* (*горизонтальную*) асимптоту графика

$y = k_+ x + b_+$ при $x \to +\infty$

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2}} = \left[\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}} \right] = 1$$

Совершенно аналогично имеем $k_- = 1$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-k_+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x^2\right)}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}\right)^3-x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x^2}=$$

Домножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение до разности кубов

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(y(x)-k_+x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x(x-1)^2}-x\right)\left(\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2\right)}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-1)^2-x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4}+x\sqrt[3]{x(x-1)^2}+x^2} =$$

Домножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение до разности кубов

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3} - 2x^2 + x - \cancel{x^3}}{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} =$$

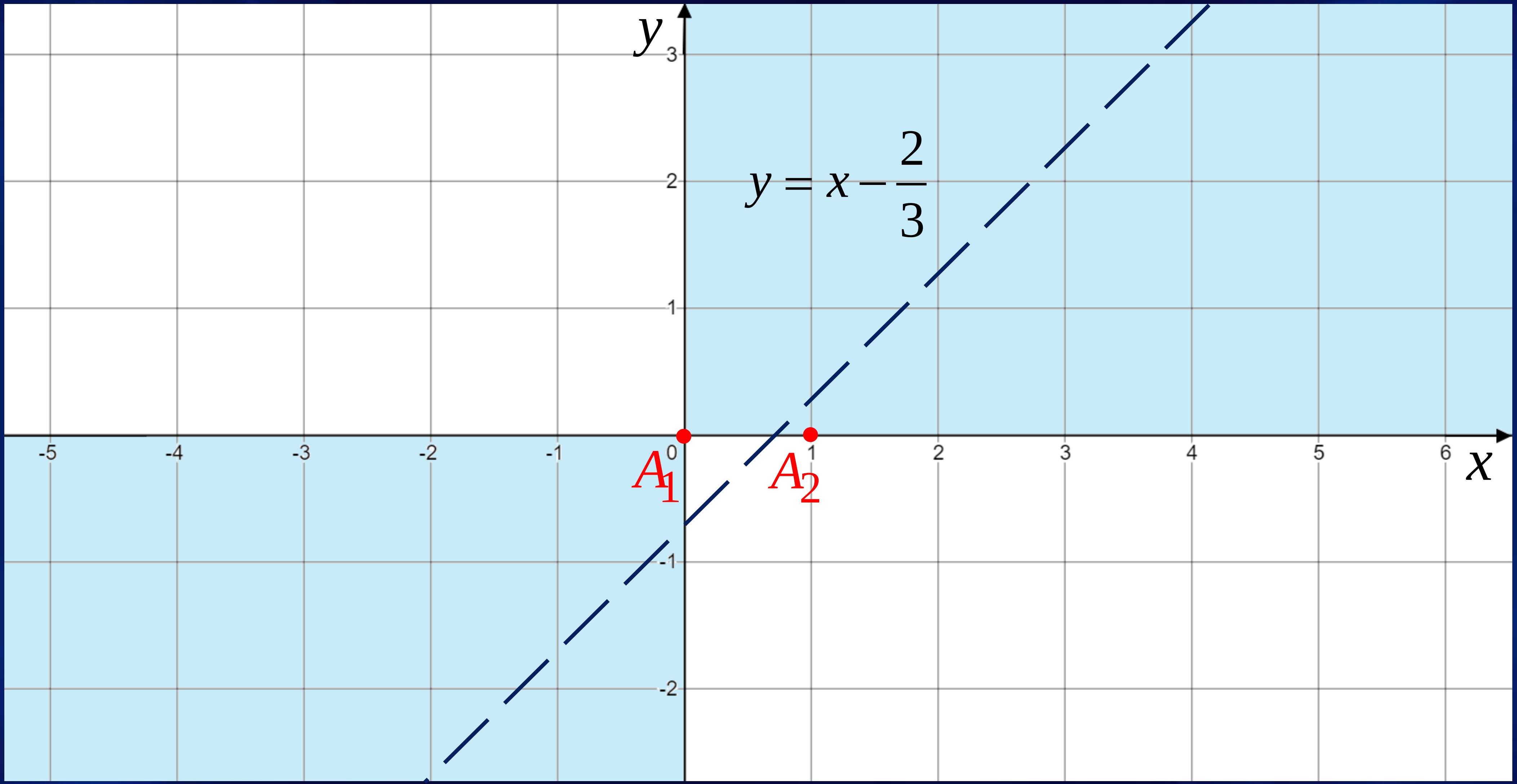
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2 + }{\sqrt[3]{x^2(x-1)^4} + x\sqrt[3]{x(x-1)^2} + x^2} =$$

$$= \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{\sqrt[3]{x^2x^4} + x\sqrt[3]{xx^2} + x^2} \right] = \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{3x^2} \right] = -\frac{2}{3}$$

Совершенно аналогично имеем $b\_ = -2/3$

Таким образом, прямая $y = x - \dfrac{2}{3}$ – *наклонная* асимптота при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$

Вертикальных асимптот НЕТ, поскольку функция $y = y(x)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.



y
$y = x - \frac{2}{3}$
x
A_1
A_2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
3
2
1
-1
-2

6) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума.

Для этого найдем y'.

Для этого применим логарифмическое дифференцирование.

$$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2} \Rightarrow \ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

(При этом считаем, что $y > 0$)

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x} + \ln \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1)$$

$$(\ln y)' = \left(\frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left({}^{x-1\diagup}\frac{1}{x} + {}^{x\diagup}\frac{2}{x-1}\right)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\,\frac{(x-1)+2x}{x(x-1)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$y' = y\,\frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

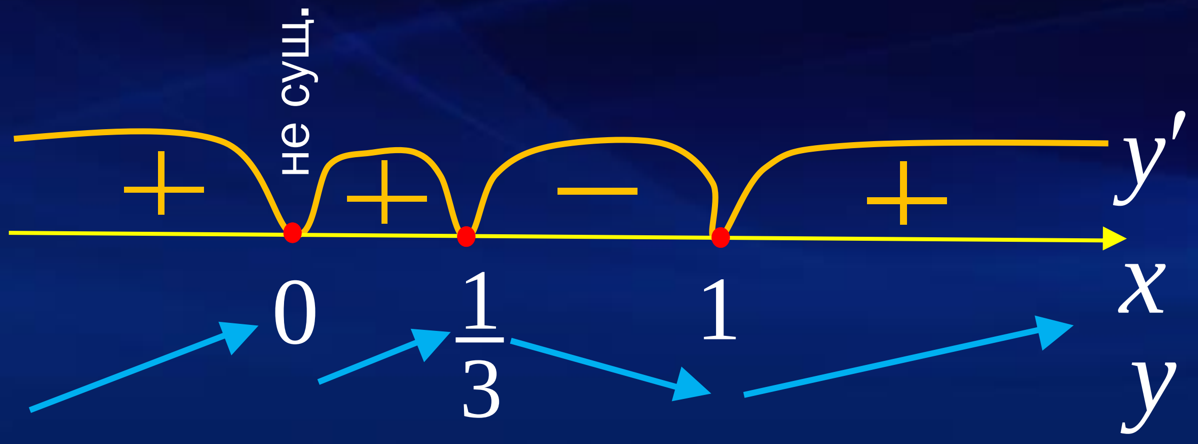
$$y' = \sqrt[3]{x(x-1)^2}\,\frac{3x-1}{3x(x-1)} \Rightarrow \quad y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x-1}}$$

$y' = 0$ при $x = \dfrac{1}{3}$

y' не существует $(y' = \infty)$ при $x = 0$ и при $x = 1$

Решаем неравенство $y' > 0$ $(y' < 0)$

методом интервалов



$$\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x-1}} > 0\ (<0)$$

$y\uparrow$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

$y\downarrow$ при $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

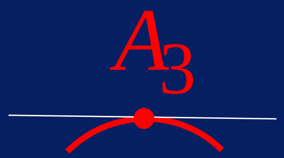
$x = \frac{1}{3}$ – *точка loc* max $\quad y\left(\frac{1}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{4}{27}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$

$A_3\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ – *точка loc* max на графике

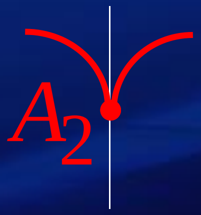
$x = 1 - \textit{точка loc}\min \qquad y(1) = 0$

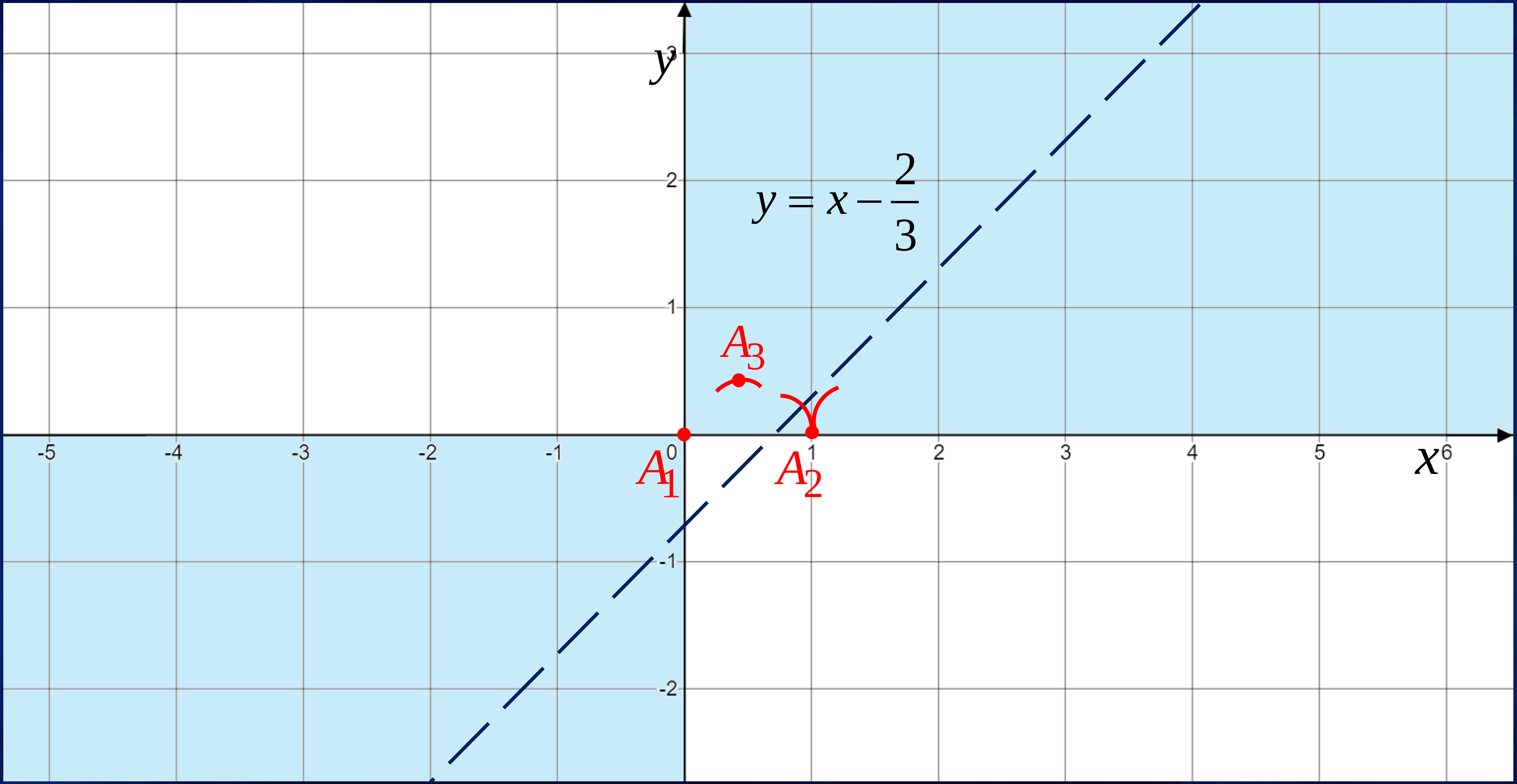
$A_2(1;0) - \textit{точка loc}\min$ на графике

$y'\left(\frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$ в точке $A_3\left(\frac{1}{3};\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right)$ касательная горизонтальна

$\Rightarrow$ 

$y'(1) = \infty \Rightarrow$ в точке $A_3(1;0)$ касательная вертикальна

$\Rightarrow$ 



y
x
$y = x - \frac{2}{3}$
A_1
A_2
A_3
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

6) Найдем промежутки выпуклости, вогнутости.

и точки перегиба.

Для этого найдем y''.

Снова применим логарифмическое

дифференцирование (считая при этом, что $y' > 0$).

$$y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow \ln y' = \ln \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\ln y' = \ln\left(3x-1\right) - \tfrac{1}{3}\ln(x-1) - \ln 3 - \tfrac{2}{3}\ln x$$

$$\left(\ln y'\right)' = \left(\ln\left(3x-1\right) - \tfrac{1}{3}\ln(x-1) - \ln 3 - \tfrac{2}{3}\ln x\right)'$$

$$\frac{1}{y'}\cdot y'' = \frac{3}{3x-1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{\overset{3x(x-1)}{\cancel{3}}}{3x-1} - \frac{\overset{x(3x-1)}{\cancel{1}}}{3(x-1)} - \frac{\overset{(3x-1)(x-1)}{\cancel{2}}}{3x}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{9x(x-1)-x(3x-1)-2(3x-1)(x-1)}{3x(3x-1)(x-1)}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{9x(x-1)-x(3x-1)-2(3x-1)(x-1)}{3x(3x-1)(x-1)}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{9x^2-9x-3x^2+x-2(3x^2-x-3x+1)}{3x(3x-1)(x-1)}$$

$$\frac{y''}{y'} = \frac{9x^2-9x-3x^2+x-6x^2+2x+6x-2}{3x(3x-1)(x-1)}$$

$$\frac{y''}{y'} = -\frac{2}{3x(3x-1)(x-1)}$$

$$y'' = -y'\frac{2}{3x(3x-1)(x-1)}$$

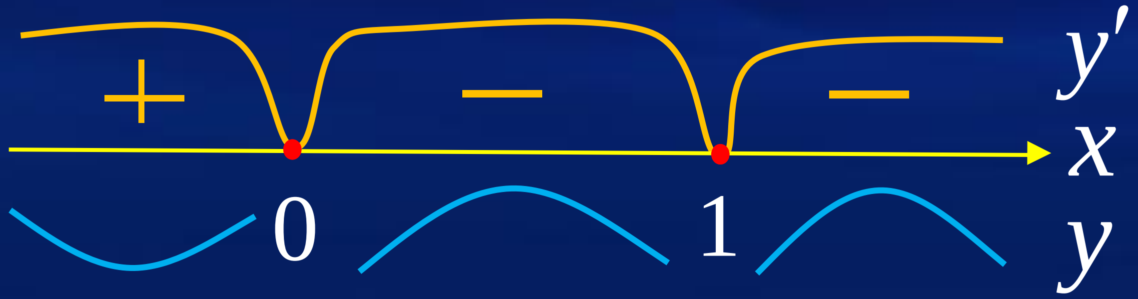
$$y'' = -\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x-1}} \cdot \frac{2}{3x(3x-1)(x-1)}$$

$$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

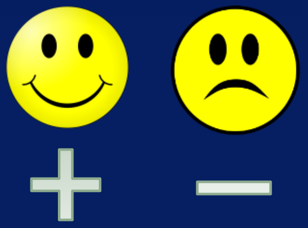
$y'' \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$

y'' не существует при $x = 0$ и при $x = 1$

Решим неравенство $y'' > 0$ $(y'' < 0)$ методом интервалов



$$-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}\sqrt[3]{(x-1)^4}} > 0\ (< 0)$$

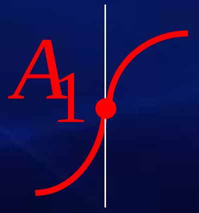


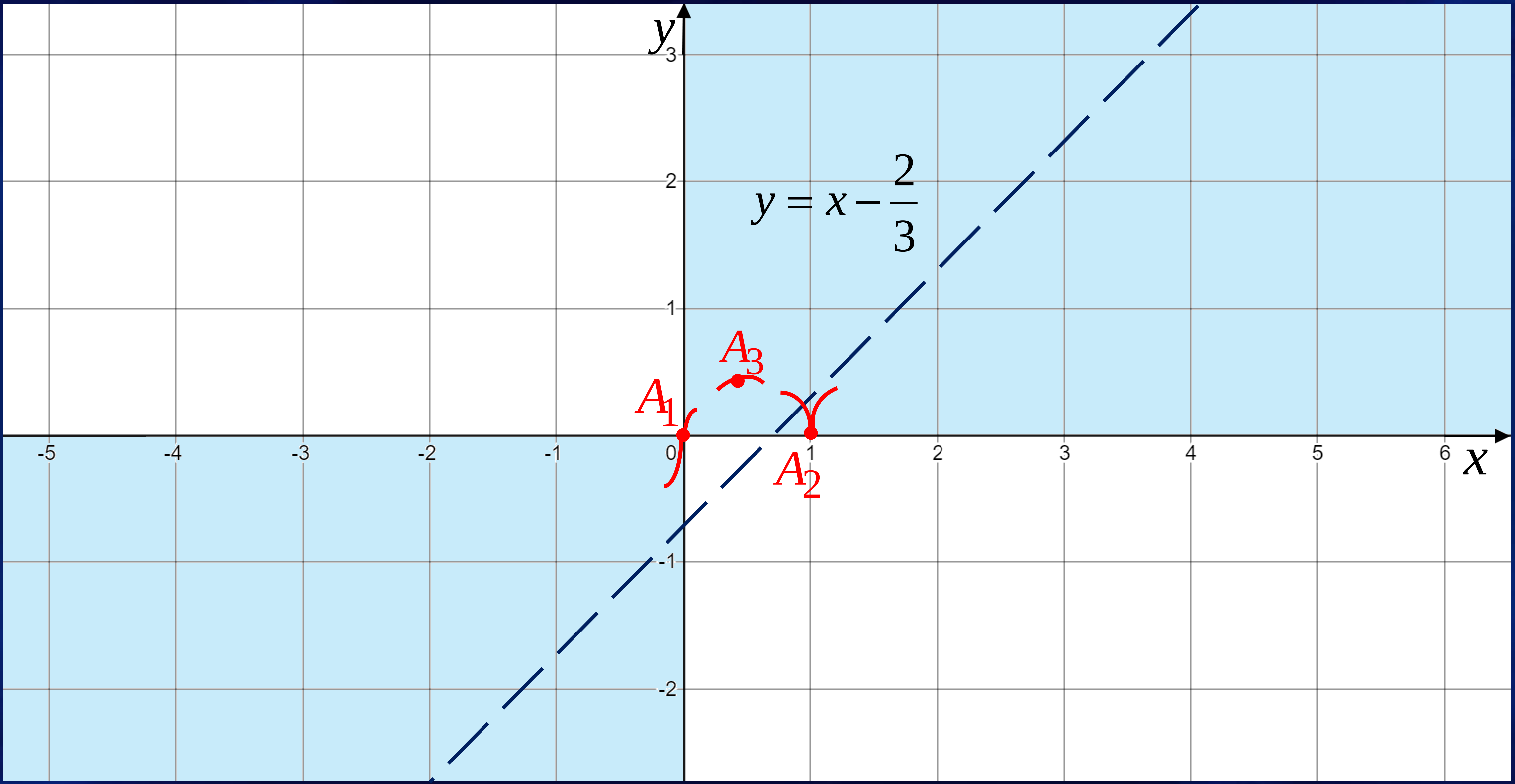
$y\cup$ при $x \in (-\infty; 0)$ $y\cap$ при $x \in (0; +\infty)$

$x = 0$ – точка перегиба $y(0) = 0 \Rightarrow$

$A_1(0;0)$ – точка перегиба на графике

$y'(0) = \infty$ $\Rightarrow$ в точке $A_1(0;0)$ касательная вертикальна $\Rightarrow$

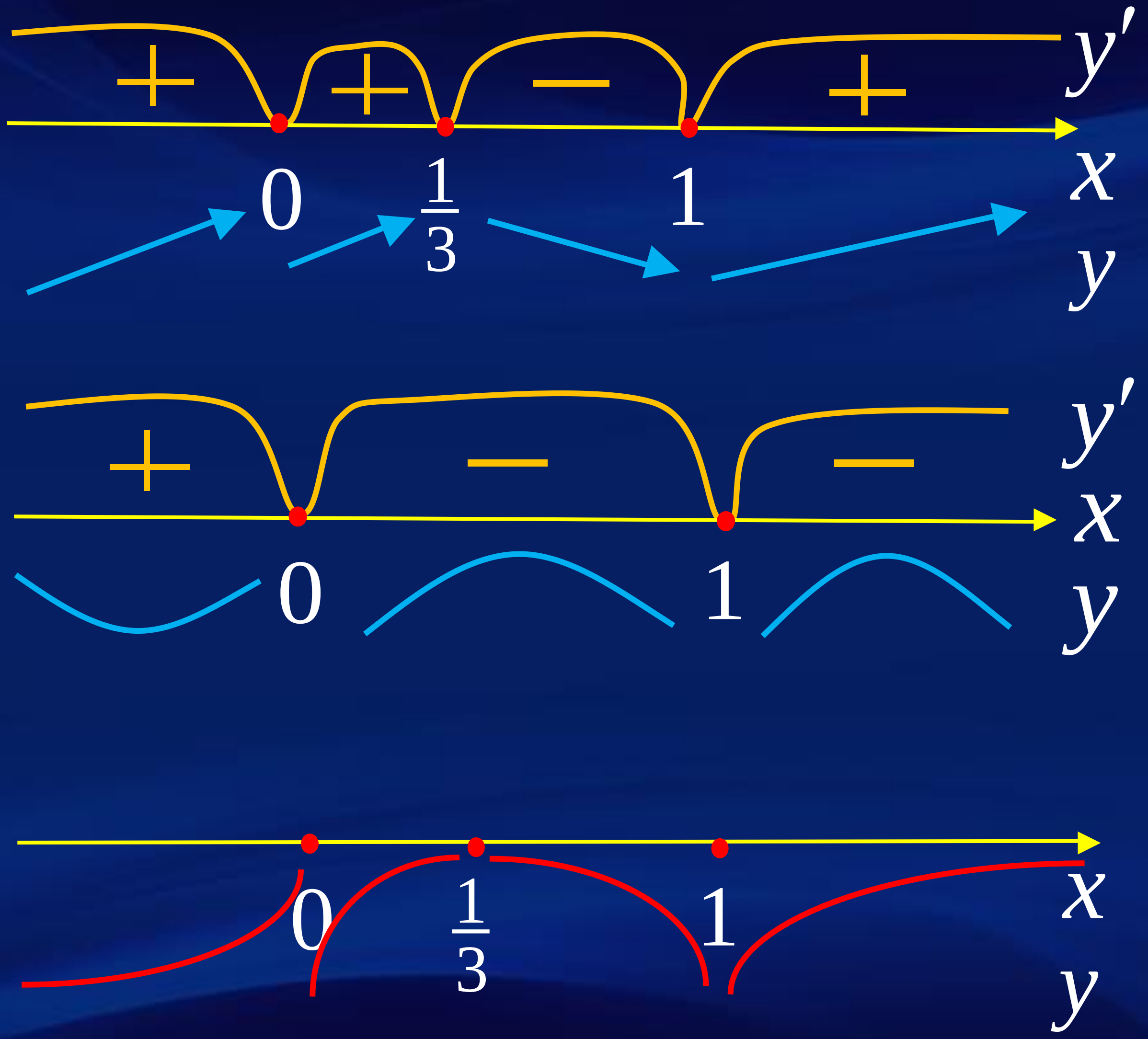




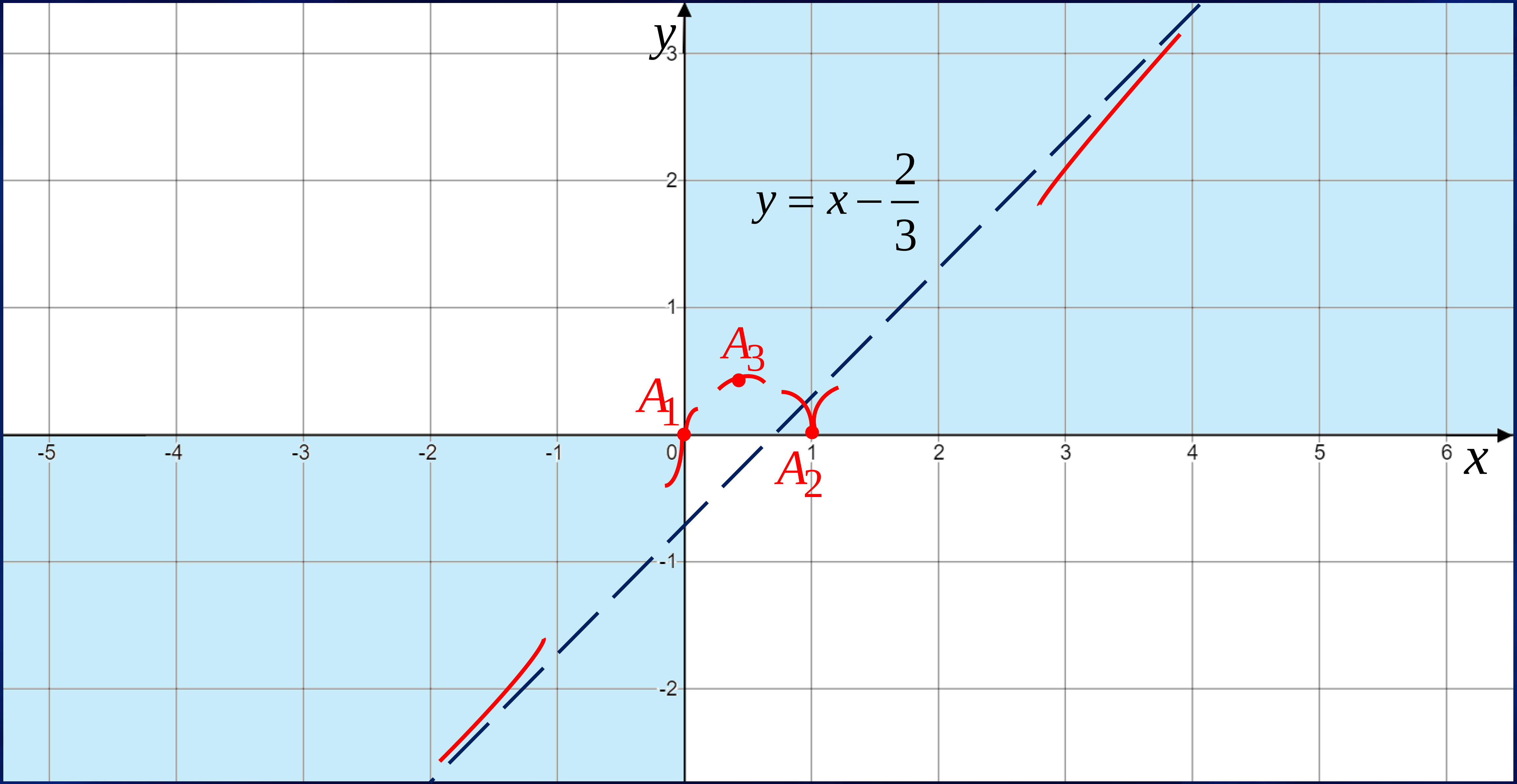
y
x
$y = x - \frac{2}{3}$
A_1
A_2
A_3
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2

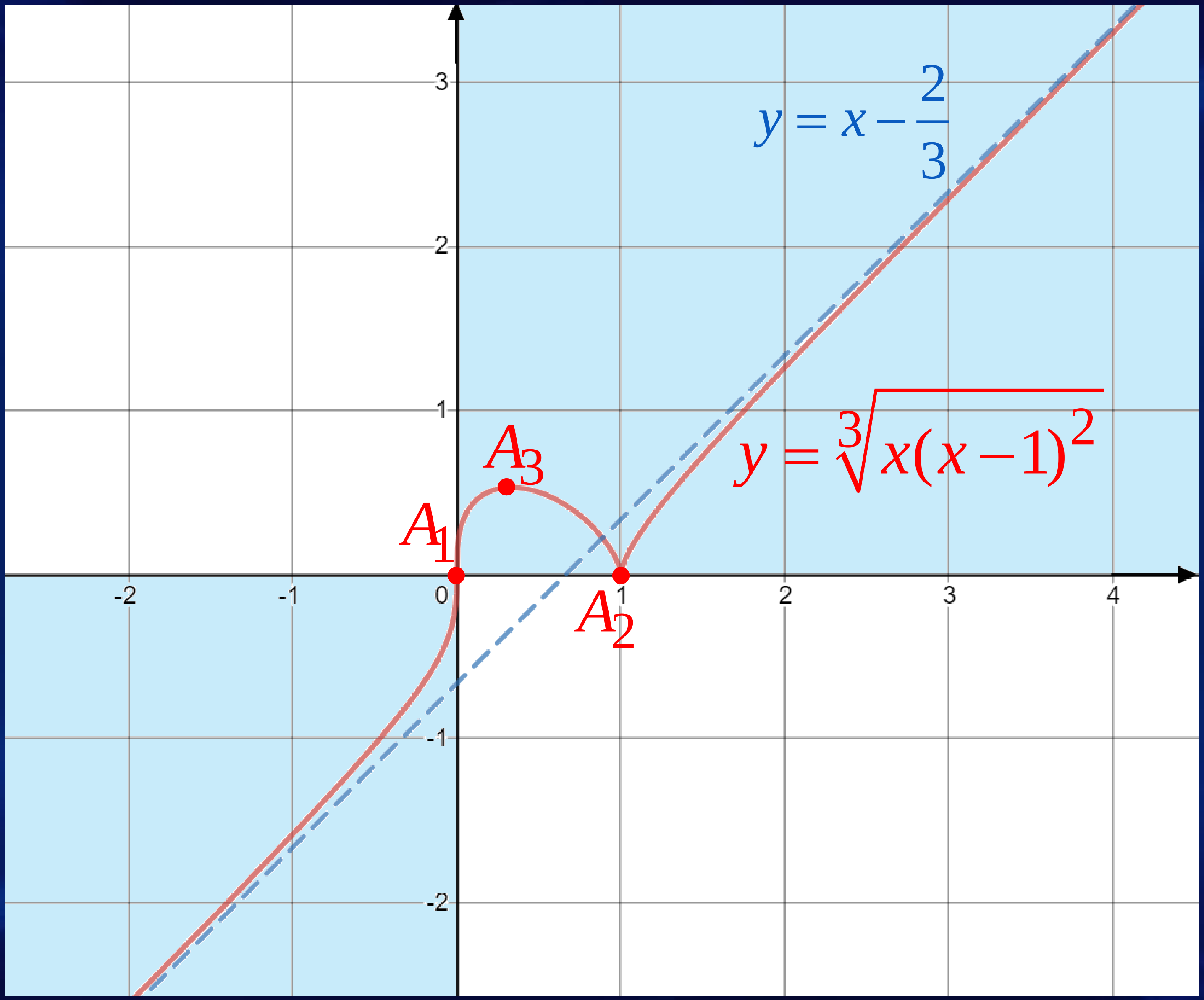
Вид графика функции в окрестности точки в зависимости от знака первой и второй производных

	$y'' > 0$	$y'' < 0$
$y' > 0$		
$y' < 0$		



+ + − +
y'
x
0
1/3
1
y
+ − −
y'
x
0
1
y
x
0
1/3
1
y


y
x
0
1
2
3
4
5
6
-1
-2
-3
-4
-5
$y = x - \frac{2}{3}$
A_1
A_2
A_3


$y = x - \frac{2}{3}$
$y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$
A_1
A_2
A_3
-2
-1
0
1
2
3
4

Выводы

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2) Пересечение с осью Ox: $A_1(0;0)$, $A_2(1;0)$

Пересечение с осью Oy: $A_1(0;0)$

$y > 0$ при $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty;0)$

3) функция общего вида

4) $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = +\infty,$ $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x) = -\infty,$

Выводы (продолжение)

5) Прямая $y = x - \frac{2}{3} - \textit{наклонная}$ асимптота

при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$

6) $y \uparrow$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$

$y \downarrow$ при $x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right)$

$A_3\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt[3]{4}}{3}\right) - \textit{точка loc}\max$ на графике

7) $y \cup$ при $x \in (-\infty; 0)$ $A_1(0;0) -$ точка перегиба

$y \cap$ при $x \in (0; +\infty)$ на графике