Исследование и построение графика трансцендентной функции

«МАТЕМАТИКА»

ИЕНиМ. Департамент Фундаментальной и прикладной химии

Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова О.Е.

2021 г.

План исследования трансцендентной функции

1) Найти *область определения* функции.

2) Найти точки пересечения с осями координат; решить неравенства $y > 0$, $y < 0$.

3) Выяснить, является ли функция *четной*, *нечетной*, *функцией общего вида*.

4) Найти $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$.

5) Найти асимптоты.

План исследования трансценд. функции (продолж.)

5) Найти *интервалы монотонности*;
исследовать функцию на *локальный экстремум*.

5.1) Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $y' = 0$ или не существует.

5.2) Решить неравенства $y' > 0$ ($y' < 0$) методом интервалов.

5.3) Найти точки локального экстремума.

План исследования функции (продолжение)

6) Найти *интервалы выпуклости*, *вогнутости*.

6.1) Найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

6.2) Решить неравенства $y'' > 0$ ($y'' < 0$) методом интервалов.

6.3) Найти точки перегиба.

1. Исследовать функцию и построить ее график $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$

Решение

$y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$ – это трансцендентная функция

1) Область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$$

2) Пересечение с осью Ox:

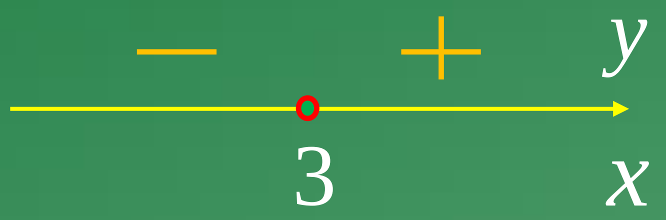
$y \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ *нет* точек пересеч. с осью Ox

Пересечение с осью Oy: $x = 0$

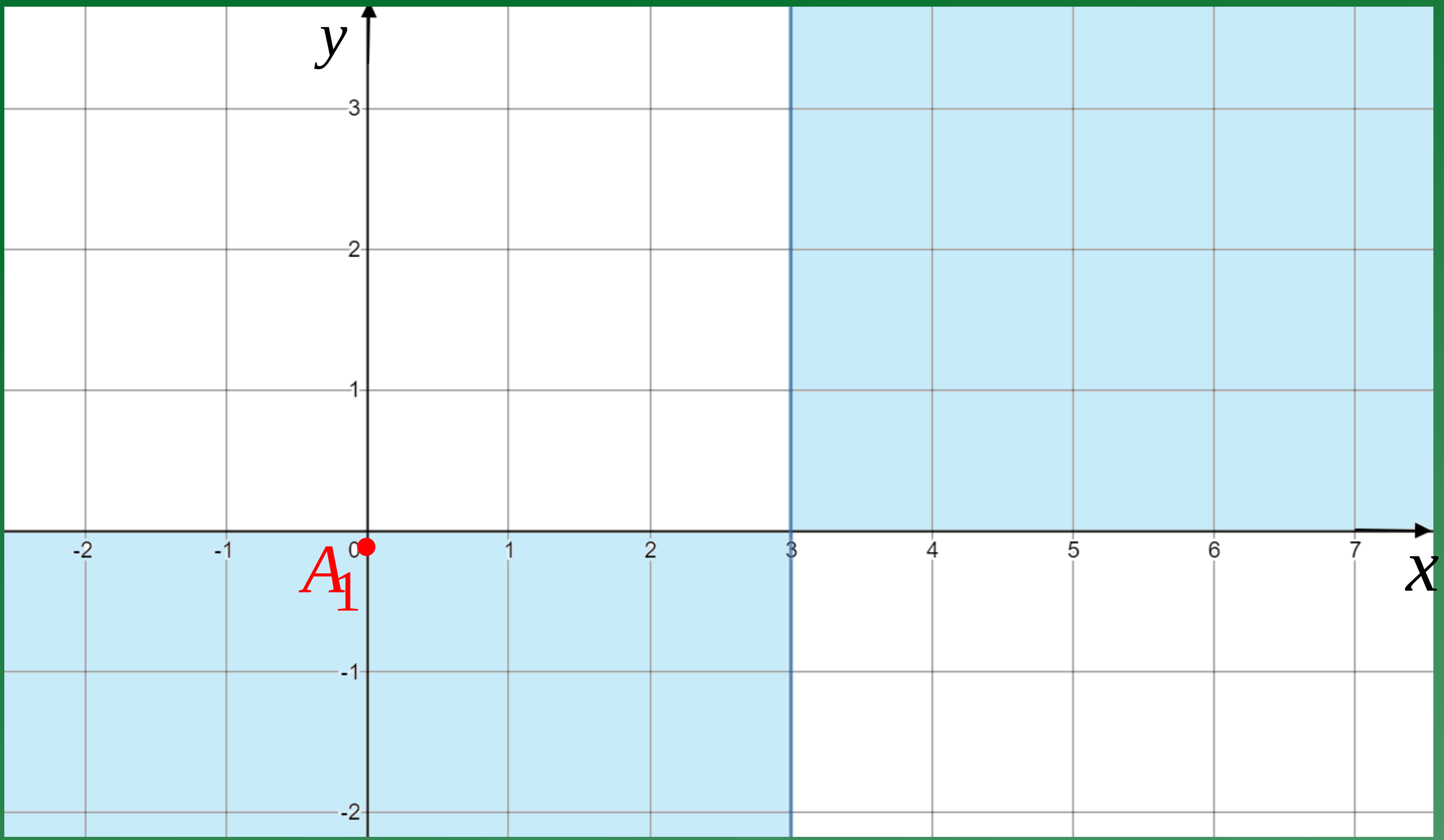
$$\Rightarrow y = \frac{e^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3e^3} \Rightarrow A_1\left(0; -\frac{1}{3e^3}\right)$$

Решаем неравенства: $y > 0$ ($y < 0$) *методом интервалов*

$$\frac{e^{x-3}}{x-3} > 0\ (< 0) \Rightarrow \frac{1}{x-3} > 0\ (< 0)$$



$y > 0$ при $x \in (3; +\infty)$ $\qquad$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 3)$


y
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
x
A_1

3) *Четность / нечетность* функции $y = \dfrac{e^{x-3}}{x-3}$

$$y(-x) = \frac{e^{-x-3}}{-x-3} = -\frac{e^{-x-3}}{x+3} \neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является четной

$$-y(-x) = \frac{e^{-x-3}}{x+3} \neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является нечетной

$\Rightarrow$ функция общего вида

4). Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x), \lim\limits_{x\to-\infty} y(x).$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-3}}{x-3}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\left[\begin{array}{l}\text{Применяем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(x-3)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x-3}}{1}=\left[\frac{+\infty}{1}\right]=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x-3}}{x-3} = \left[\frac{e^{-\infty}}{-\infty}\right] = \left[\frac{0}{-\infty}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ прямая $y=0$ является горизонтальной асимптотой при $x\to-\infty$

Таким образом, наклонная асимптота $y = k\_x + b\_$ при $x\to-\infty$ является горизонтальной асимптотой $y=0$, т.е. $k\_ = 0,\ b\_ = 0.$

5) Найдем *вертикальную* асимптоту графика.

Функция не существует при $x = 3$

$$\Downarrow$$

прямая $x = 3$ может быть вертиклььной асимптотой.

Проверяем:

$$\lim_{x\to 3} y(x) = \lim_{x\to 3} \frac{e^{x-3}}{x-3} = \left[\frac{1}{3-3}\right] = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

$\Rightarrow$ прямая $x = 3$ действительно является вертикальной асимптотой

Для построения графика найдем

$$\lim_{x\to 3+0} y(x), \qquad \lim_{x\to 3-0} y(x)$$

$$\lim_{x\to 3+0} y(x) = \lim_{x\to 3+0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = \left[\frac{1}{+0}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3-0} y(x) = \lim_{x\to 3-0} \frac{e^{x-3}}{x-3} = \left[\frac{1}{-0}\right] = -\infty$$

Найдем *наклонную* (*горизонтальную*) асимптоту графика

$y = k_+ x + b_+$ при $x \to +\infty$

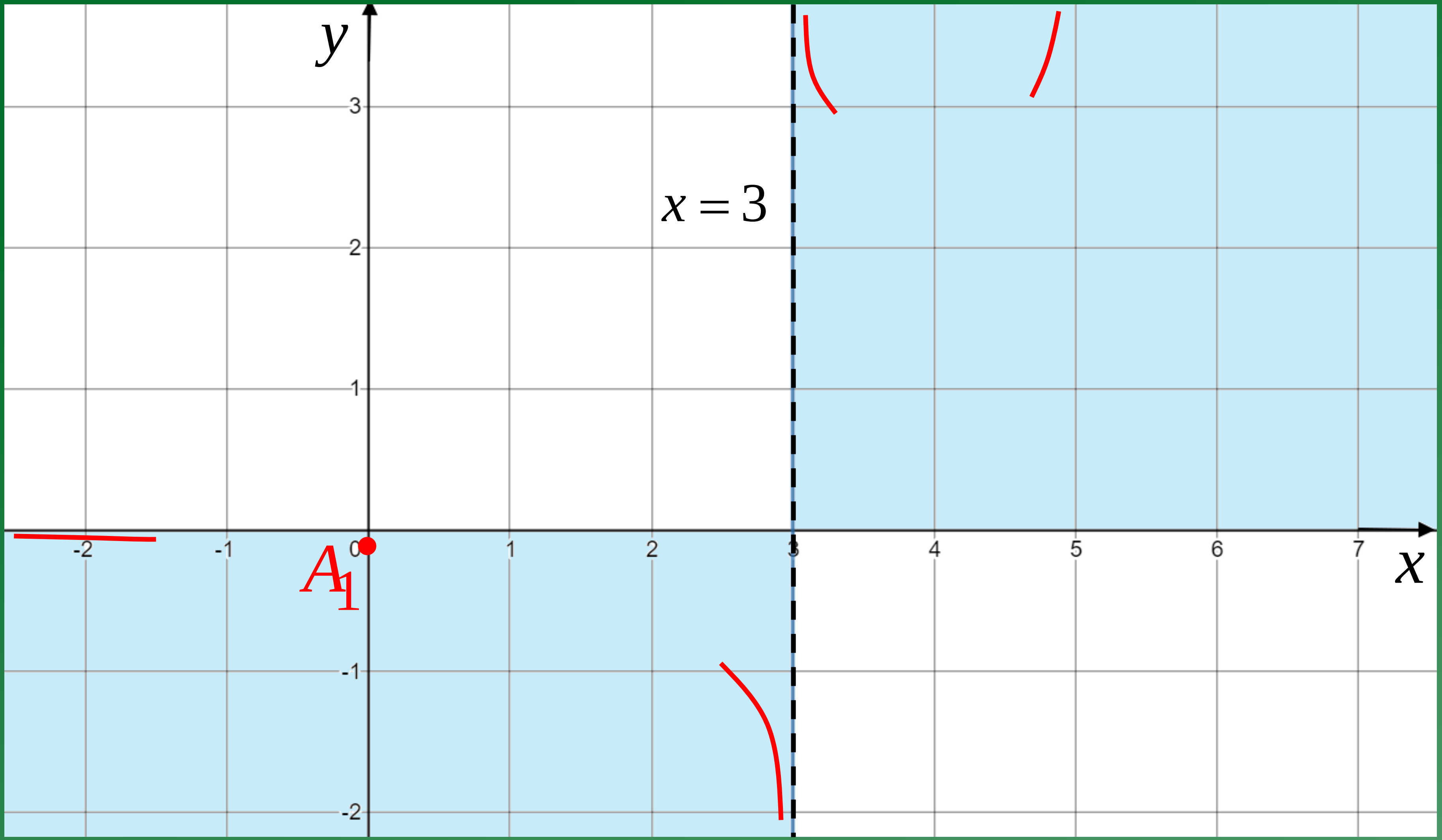
$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{x-3}}{x-3}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x(x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{x^2-3x} =$$

$$= \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \left[\begin{array}{l}\text{Применяем правило}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{\left(x^2-3x\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2x-3} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \left[\begin{matrix}\text{Снова применяем} \\ \text{правило Лопиталя}\end{matrix}\right] =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{x-3}\right)'}{(2x-3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x-3}}{2} = \left[\frac{e^{+\infty}}{2}\right] = \left[\frac{+\infty}{2}\right] = +\infty$$

при $x \to +\infty$ нет *наклонной асимптоты*



y
3
2
1
-1
-2
$x = 3$
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
x
A_1

5) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума.

Для этого найдем y' :

Не стремимся раскрывать скобки! Наоборот, стараемся выносить общий множитель!

$$y' = \left(\frac{e^{x-3}}{x-3}\right)' = \frac{\left(e^{x-3}\right)'(x-3) - e^{x-3}(x-3)'}{(x-3)^2} =$$

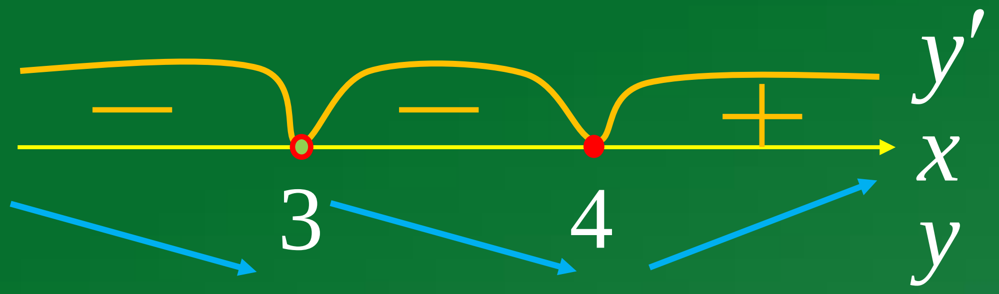
$$=\frac{e^{x-3}(x-3)-e^{x-3}}{(x-3)^2}=\frac{e^{x-3}(x-3-1)}{(x-3)^2}=\frac{e^{x-3}(x-4)}{(x-3)^2}$$

$y'=0$ при $x=4$ $\left(e^{x-3}>0 \text{ для любого } x\right)$

y' не существует при $x=3$

Решаем неравенство $y'>0$ $(y'<0)$

методом интервалов



$$\frac{e^{x-3}(x-4)}{(x-3)^2} > 0\ (<0)\quad \left(:e^{x-3}\right)$$

$$\frac{x-4}{(x-3)^2} > 0\ (<0)$$

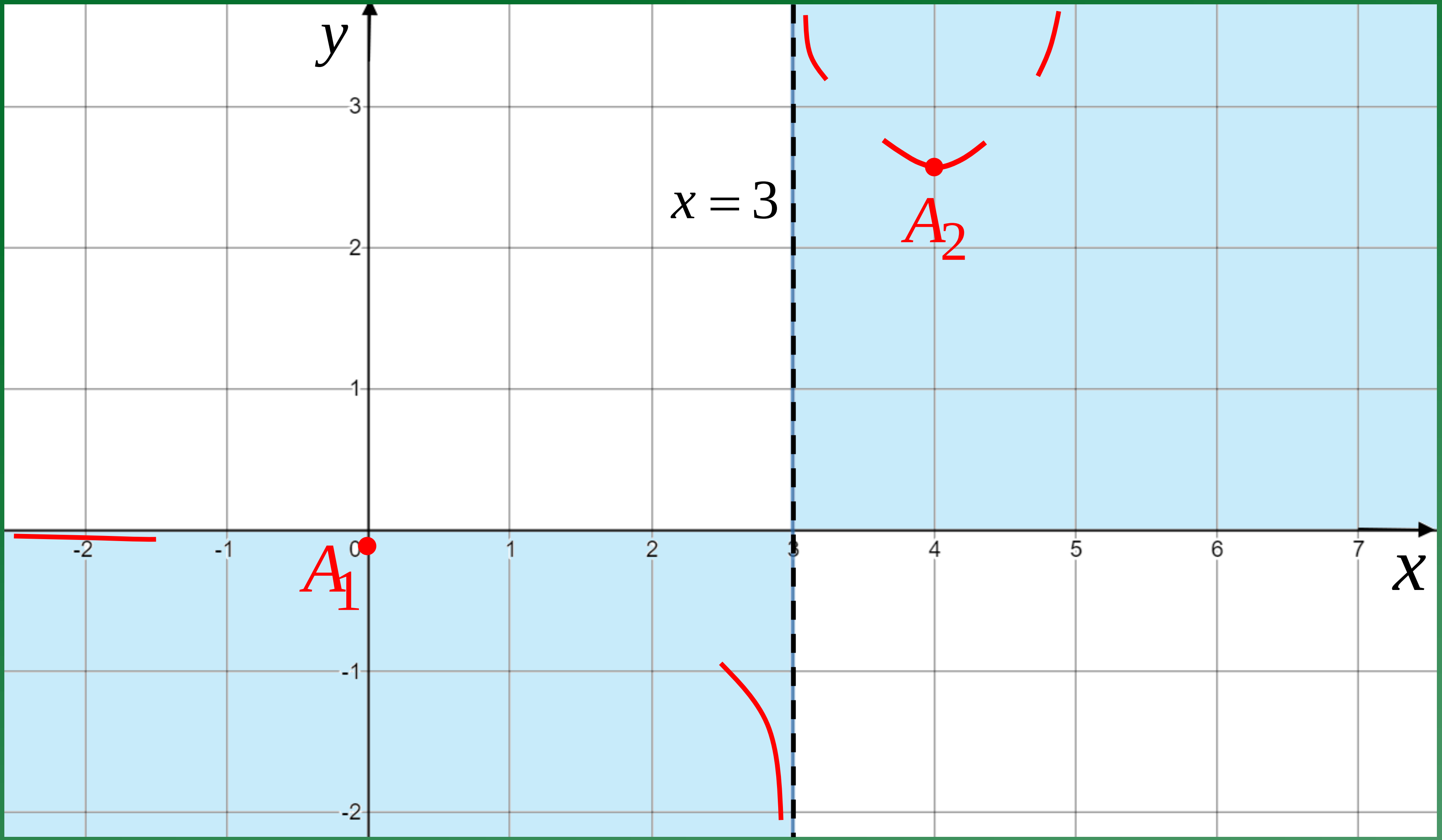
$y\uparrow$ при $x \in (4;+\infty)$

$y\downarrow$ при $x \in (-\infty;3)\cup(3;4)$

$$y(4) = \frac{e^{4-3}}{(4-3)^2} = e$$

$x = 4 - $ *точка loc* min

$A_2(4;e) - $ *точка loc* min на графике


y
x
x = 3
A1
A2
3
2
1
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

6) Найдем промежутки выпуклости, вогнутости.

и точки перегиба.

Для этого найдем y'':

$$y''=\left(\frac{e^{x-3}(x-4)}{(x-3)^2}\right)'=\frac{\left(e^{x-3}(x-4)\right)'(x-3)^2-e^{x-3}(x-4)\left((x-3)^2\right)'}{\left((x-3)^2\right)^2}$$

$$\left(e^{x-3}(x-4)\right)'=\left(e^{x-3}\right)'(x-4)+e^{x-3}(x-4)'=$$

$$= e^{x-3}(x-4) + e^{x-3} = e^{x-3}(x-3)$$

$$y'' = \frac{e^{x-3}(x-3)(x-3)^2 - e^{x-3}(x-4)\cdot 2(x-3)}{\left(x-3\right)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}\cancel{(x-3)}\left((x-3)^2 - 2(x-4)\right)}{\left(x-3\right)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{e^{x-3}\left(x^2 - 6x + 9 - 2x + 8\right)}{\left(x-3\right)^3} =$$

$$= e^{x-3}(x-4) + e^{x-3} = e^{x-3}(x-3)$$

$$y'' = \frac{e^{x-3}(x-3)(x-3)^2 - e^{x-3}(x-4)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{e^{x-3}\cancel{(x-3)}\left((x-3)^2 - 2(x-4)\right)}{(x-3)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{e^{x-3}\left(x^2 - 8x + 17\right)}{(x-3)^3}$$

$y'' \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$

$\left(e^{x-3} > 0,\ \ x \in \mathbb{R}\right)$ $\left(x^2 - 8x + 17 > 0,\ x \in \mathbb{R}\text{, поскольку } D < 0\right)$

y'' не существует при $x = 3$

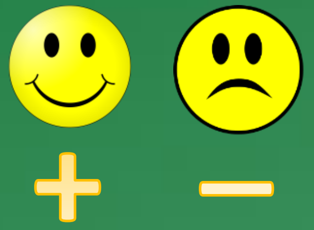
$$\frac{\cancel{e^{x-3}}\cancel{\left(x^2 - 8x + 17\right)}}{(x-3)^3} > 0\ (< 0)$$

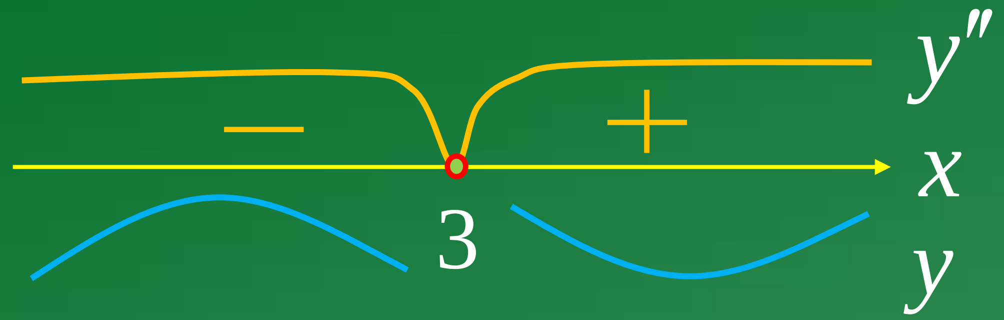
$y'' \neq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\left(e^{x-3} > 0, \quad x \in \mathbb{R}\right) \quad \left(x^2 - 8x + 17 > 0, \; x \in \mathbb{R}, \text{ поскольку } D < 0\right)$$

y'' не существует при $x = 3$

$$\frac{1}{(x-3)^3} > 0 \; (< 0)$$

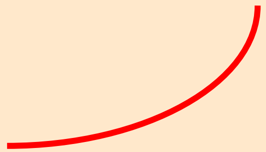
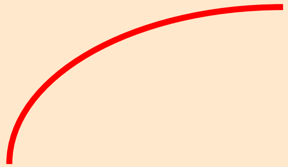
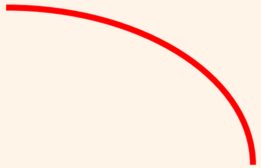


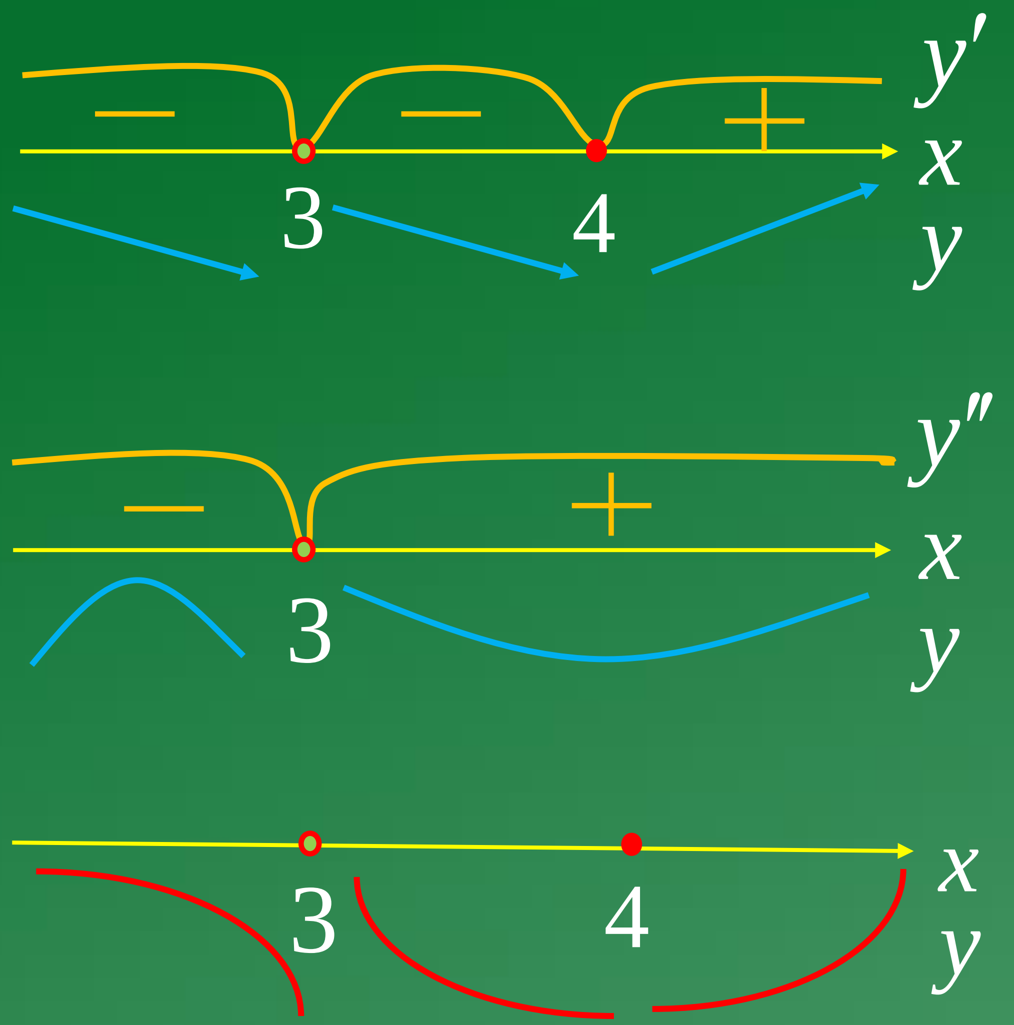


$y \cup$ при $x \in (3; +\infty)$ $\qquad$ $y \cap$ при $x \in (-\infty; 3)$

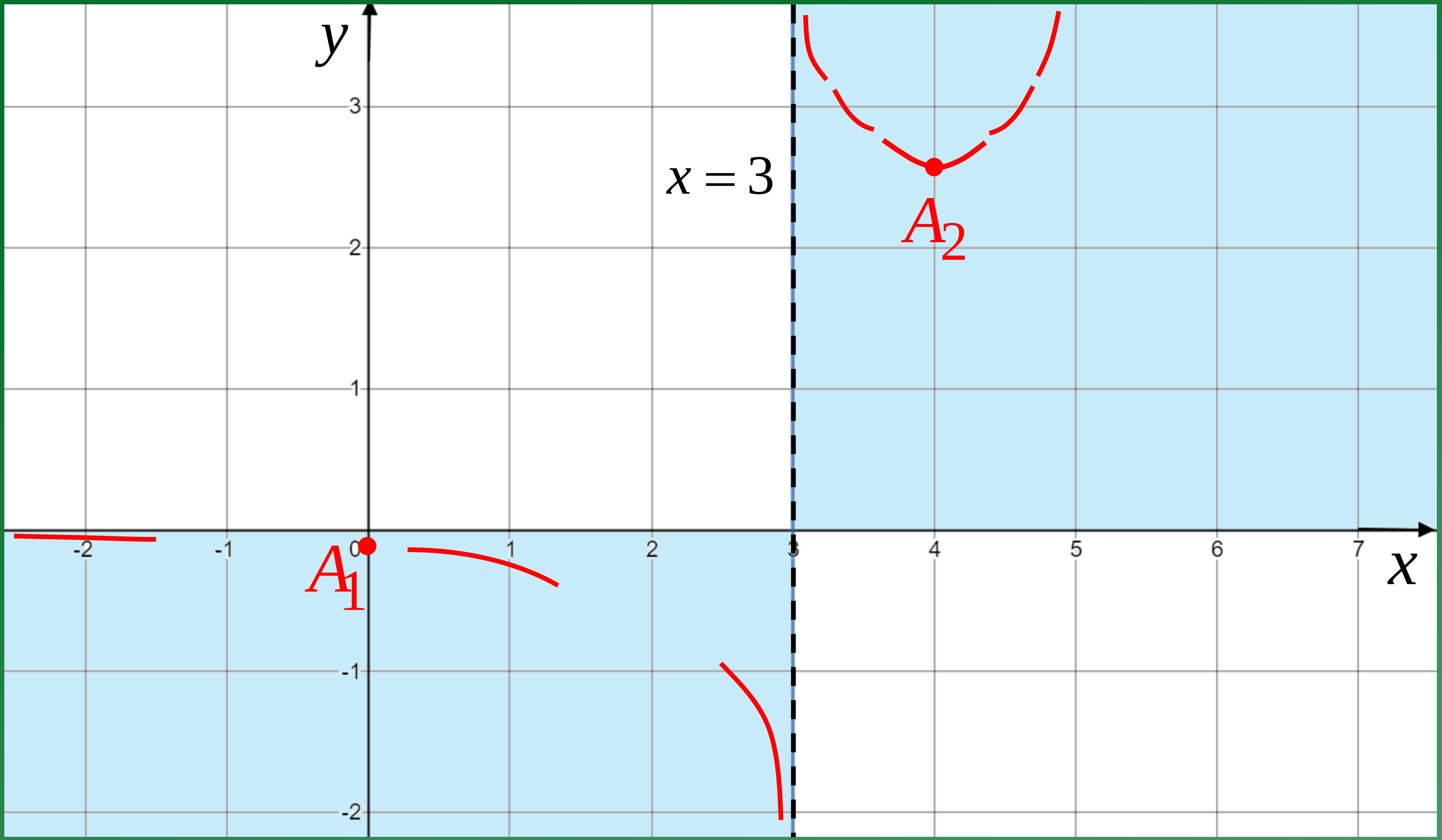
Точка *x*=3 не является точкой перегиба т.к. в этой точке функция y(x) разрывна (разрыв II рода)

Вид графика функции в окрестности точки в зависимости от знака первой и второй производных

	$y'' > 0$	$y'' < 0$
$y' > 0$		
$y' < 0$		



y'
$-$
$-$
$+$
x
3
4
y
y''
$-$
$+$
x
3
y
x
3
4
y



y
x
x = 3
A1
A2
3
2
1
-1
-2
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

Выводы

1) $D(y)=(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$

2) Пересечение с осью Ox: *нет*

Пересечение с осью Oy: $A_2\left(0;-\dfrac{1}{3e^3}\right)$

$y>0$ при $x\in(3;+\infty)$ $y<0$ при $x\in(-\infty;3)$

3) функция общего вида

4) прямая $x=3$ - вертикльная асимптота

прямая $y=0$ - горизонтальная асимптота при $x\to-\infty$

Выводы (продолжение)

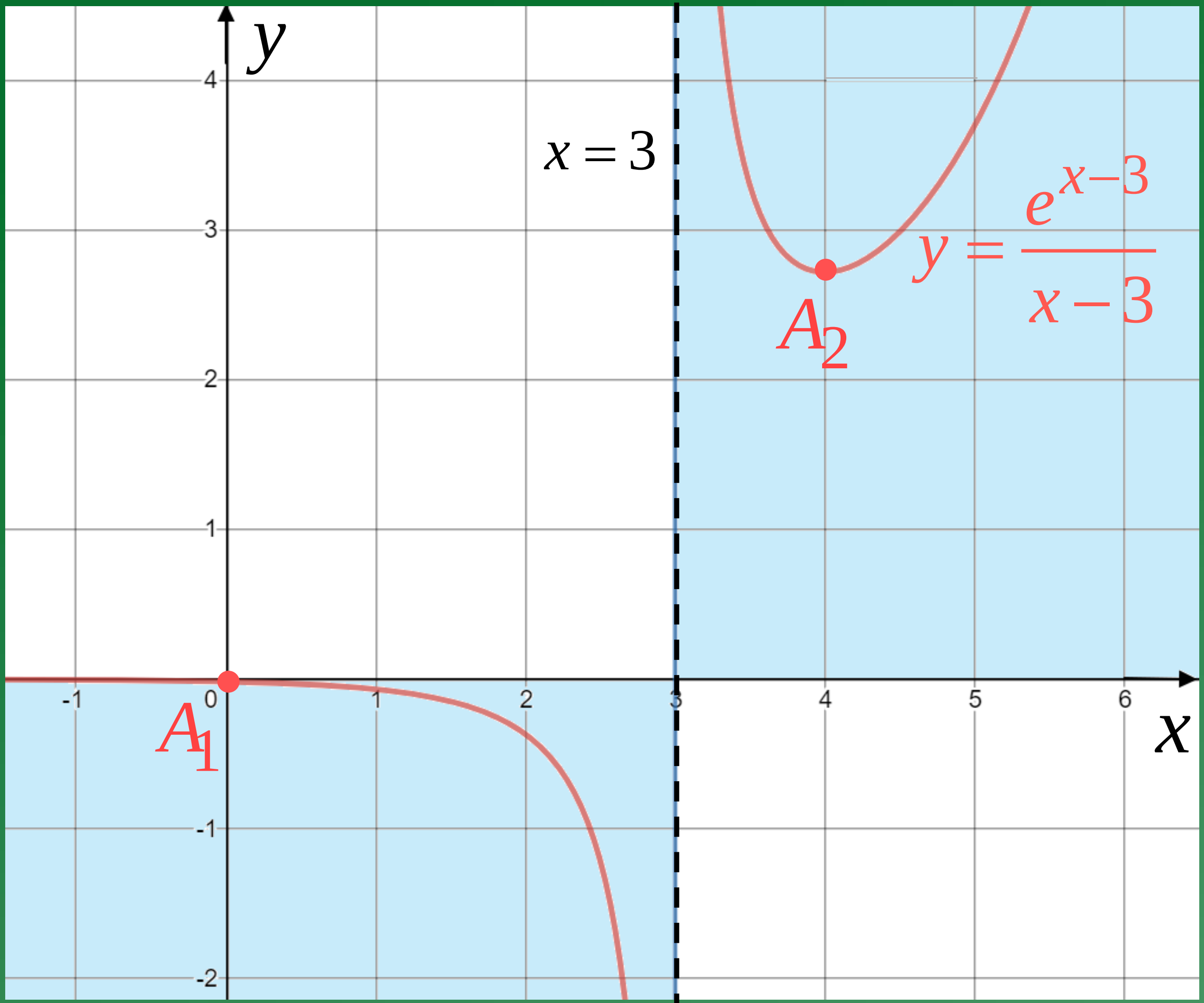
5) $y \uparrow$ при $x \in (4;+\infty)$

$y \downarrow$ при $x \in (-\infty;3) \cup (3;4)$

$A_2(4;e) - \textit{точка loc} \min$ на графике

6) $y \cup$ при $x \in (3;+\infty)$

$y \cap$ при $x \in (-\infty;3)$


y
x
$x = 3$
$y = \frac{e^{x-3}}{x-3}$
A_1
A_2
-1
0
1
2
3
4
5
6
4
3
2
1
-1
-2