Исследование и построение графика дробно-рациональной функции

«МАТЕМАТИКА»

ИЕНиМ. Департамент Фундаментальной и прикладной химии

Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова О.Е.

2021 г.

План исследования дробно-рациональной функции

1) Найти *область определения* функции.

2) Найти точки пересечения с осями координат;

решить неравенства $y > 0$, $y < 0$.

3) Выяснить, является ли функция *четной*,

нечетной, *функцией общего вида*.

4) Найти асимптоты.

План исследования функции (продолжение)

5) Найти *интервалы монотонности*;
исследовать функцию на *локальный экстремум*.

5.1) Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $y' = 0$ или не существует.

5.2) Решить неравенства $y' > 0$ ($y' < 0$) методом интервалов.

5.3) Найти точки локального экстремума.

План исследования функции (продолжение)

6) Найти *интервалы выпуклости*, *вогнутости*.

6.1) Найти точки, в которых $y'' = 0$ или не существует.

6.2) Решить неравенства $y'' > 0$ $(y'' < 0)$ методом интервалов.

6.3) Найти точки перегиба.

Исследовать функцию и построить ее график $y=\dfrac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2}$

Решение

$y=\dfrac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2}$ – это дробно-рациональная функция

1) Область определения функции:

$$D(y)=(-\infty;8)\cup(8;+\infty)$$

2) Пересечение с осью Ox:

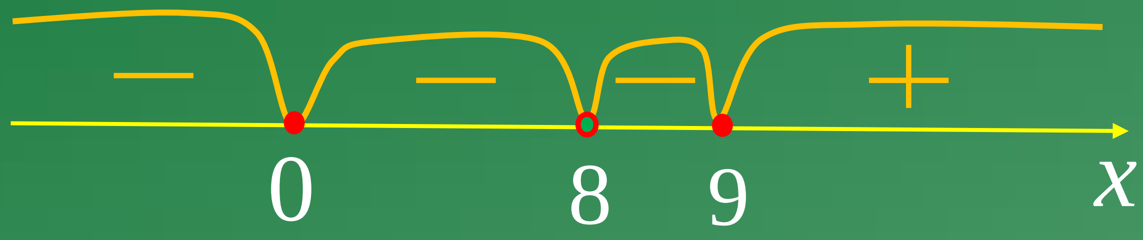
$y = 0$ при $x = 0$ и при $x = 9$ $\Rightarrow A_1(0;0),\ A_2(9;0)$

Пересечение с осью Oy:

$x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow A_1(0;0)$

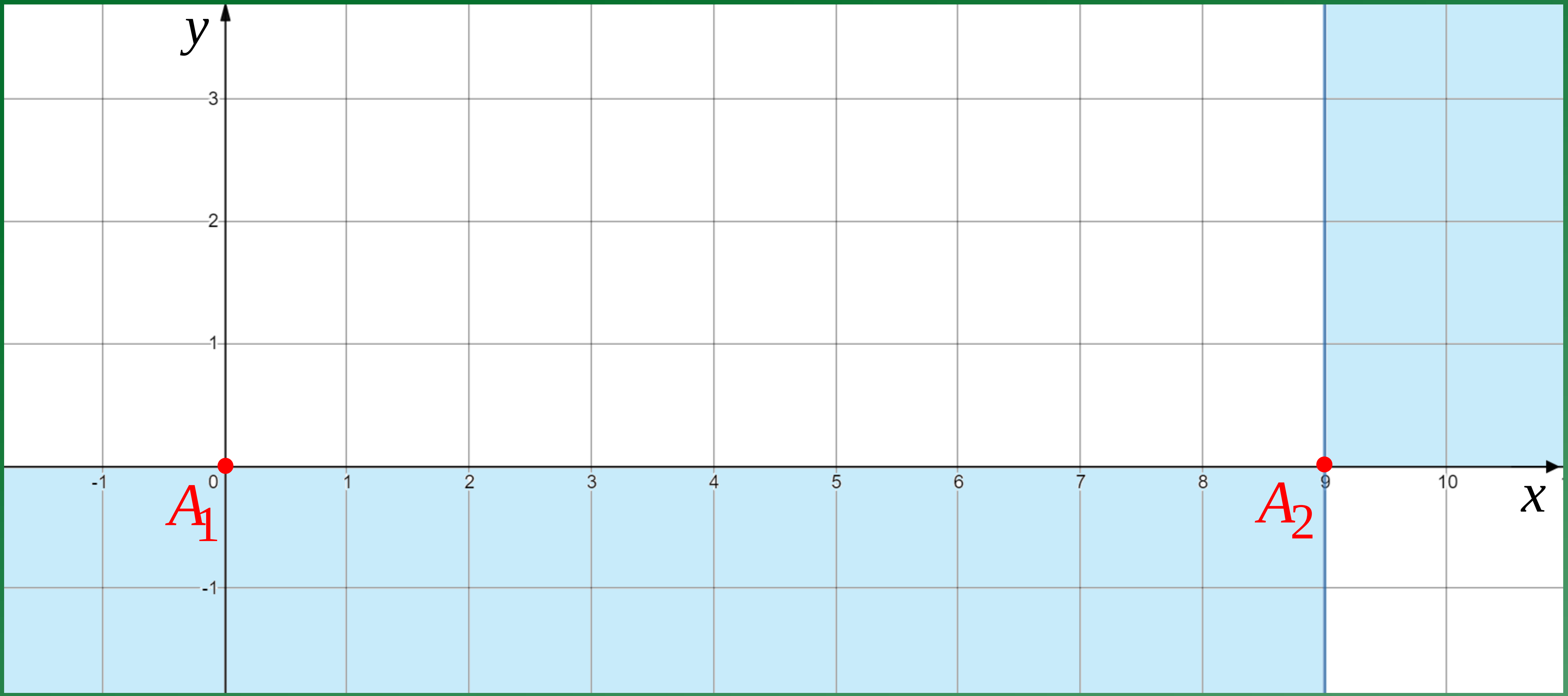
Решаем неравенства: $y > 0$ ($y < 0$) *методом интервалов*

$$\frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2} > 0\ (< 0)$$



$y > 0$ при $x \in (9;+\infty)$

$y < 0$ при $x \in (-\infty;0) \cup (0;8) \cup (8;9)$


y
3
2
1
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
x
A_1
A_2

3) *Четность / нечетность* функции $y=\dfrac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2}$

$$y(-x)=\frac{(-x)^2(-x-9)}{2(-x-8)^2}=-\frac{x^2(x+9)}{2(x+8)^2}\neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является четной

$$-y(-x)=\frac{x^2(x+9)}{2(x+8)^2}\neq y(x)$$

$\Rightarrow$ функция не является нечетной

$\Rightarrow$ функция общего вида

4) Найдем *вертикальную* асимптоту графика.

Функция не существует при $x = 8$

$$\Downarrow$$

прямая $x = 8$ может быть вертикльной асимптотой.

Проверяем:

$$\lim_{x\to 8} y(x) = \lim_{x\to 8} \frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2} = \left[\frac{8^2(8-9)}{2(8-8)^2}\right] = \left[\frac{\text{число}}{0}\right] = \infty$$

$\Rightarrow$ прямая $x = 8$ действительно является вертикальной асимптотой

Для построения графика найдем

$$\lim_{x\to 8+0} y(x), \qquad \lim_{x\to 8-0} y(x)$$

$$\lim_{x\to 8+0} y(x) = \lim_{x\to 8+0} \frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2} = \left[\frac{-64}{2(+0)^2}\right] = \left[\frac{-32}{+0}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 8-0} y(x) = \lim_{x\to 8-0} \frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2} = \left[\frac{-64}{2(-0)^2}\right] = \left[\frac{-32}{+0}\right] = -\infty$$

II. Найдем *наклонную* (*горизонтальную*) асимптоту графика

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x(x-9)}{2(x-8)^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 9x}{2(x^2 - 16x + 64)} = \left[\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{2x^2} \right] = \left[\lim_{x \to \infty} \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(y(x)-kx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(x-9)}{(x-8)^2}-\overset{(x-8)^2}{\cancel{x}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2(x-9)-x(x-8)^2}{(x-8)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(x(x-9)-(x-8)^2\right)}{(x-8)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(x^2-9x-(x^2-16x+64)\right)}{(x-8)^2}\right)=$$

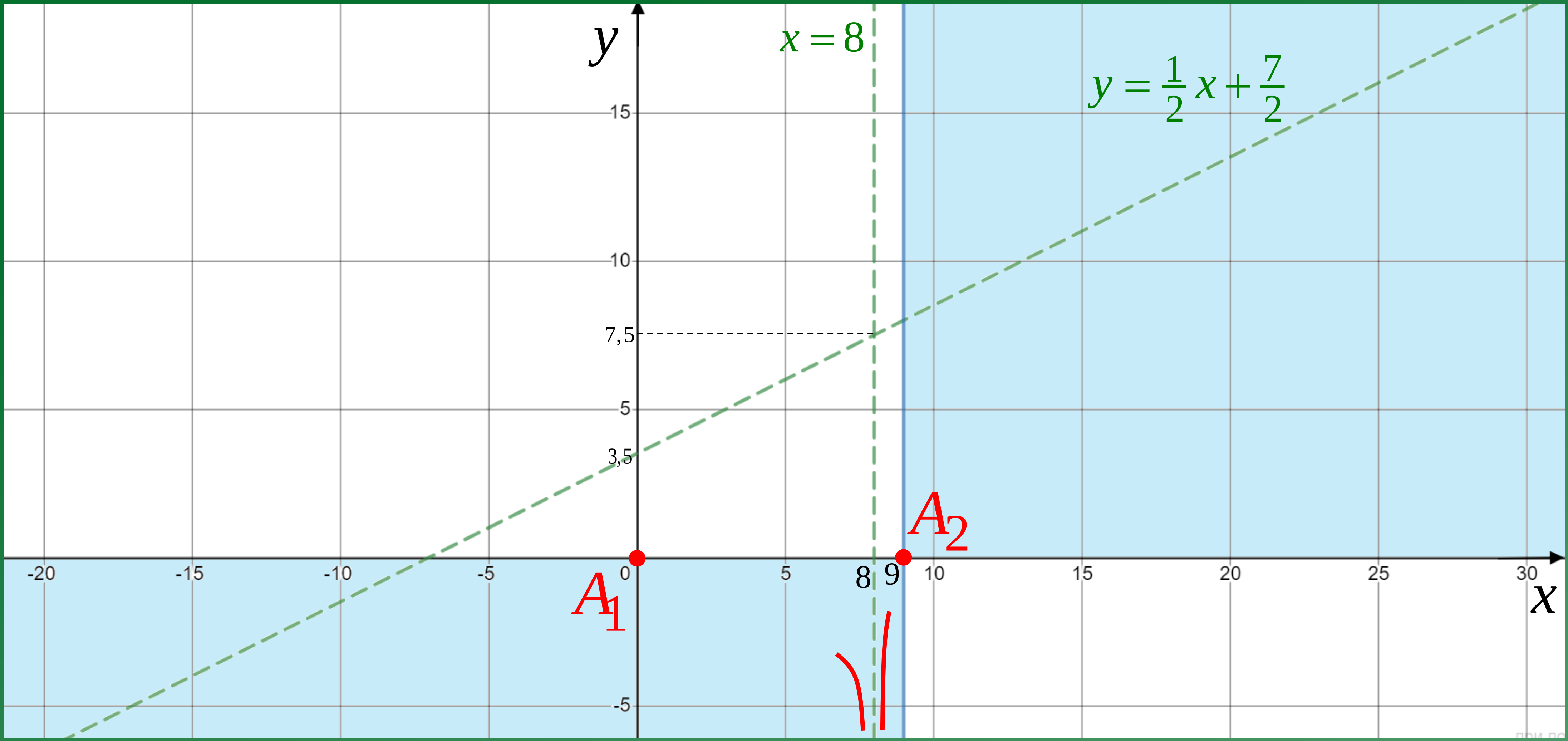
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(x^2-9x-(x^2-16x+64)\right)}{(x-8)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(\cancel{x^2}-9x-\cancel{x^2}+16x-64\right)}{(x-8)^2}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(7x-64\right)}{(x-8)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x^2-64x}{x^2-16x+64}\right)=\left[\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2}{x^2}\right]=\left[\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}7\right]=\frac{7}{2}$$

$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}-$

наклонная асимптота



y
$x = 8$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
15
10
7,5
5
3,5
-5
-20
-15
-10
-5
0
5
8
9
10
15
20
25
30
x
A_1
A_2

5) Найдем промежутки монотонности

и точки экстремума.

Не стремимся раскрывать скобки!
Наоборот, стараемся выносить общий множитель!

Для этого найдем y' :

$$y' = \left(\frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2} \right)' = \frac{1}{2} \frac{\left(x^2(x-9)\right)'(x-8)^2 - x^2(x-9)\left((x-8)^2\right)'}{\left((x-8)^2\right)^2}$$

$$\left(x^2(x-9)\right)' = \left(x^2\right)'(x-9) + x^2(x-9)' = 2x(x-9) + x^2 =$$

$$=2x(x-9)+x^2=x(2(x-9)+x)=x(2x-18+x)=3x(x-6)$$

$$y'=\frac{3x(x-6)(x-8)^2-x^2(x-9)\cdot 2(x-8)}{2(x-8)^4}=$$

$$=\frac{\cancel{(x-8)}x\left(3(x-6)(x-8)-2x(x-9)\right)}{2(x-8)^{\cancel{4}\,3}}=$$

$$=\frac{x\left(3(x-6)(x-8)-2x(x-9)\right)}{2(x-8)^3}=$$

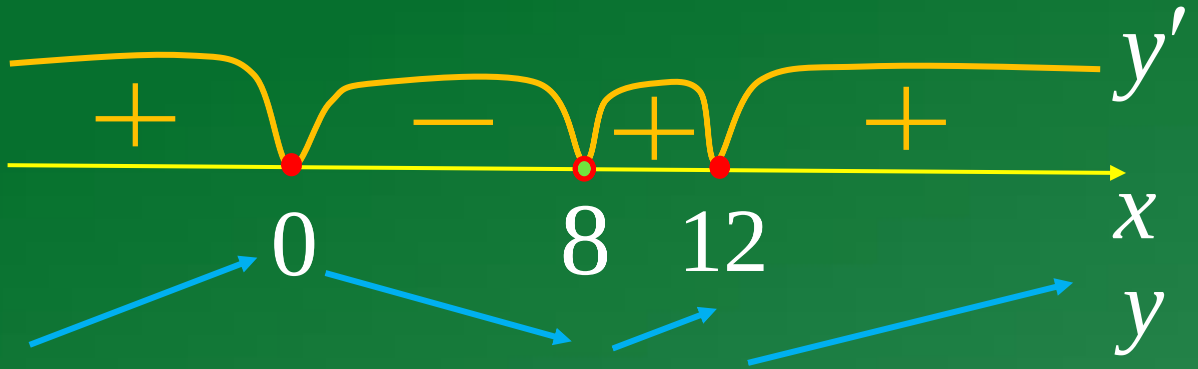
$$=\frac{x\left(3x^2-\cancel{18x}-24x+144-2x^2+\cancel{18x}\right)}{2(x-8)^3}=$$

$$=\frac{x\left(x^2-24x+144\right)}{2(x-8)^3}=\frac{x\left(x-12\right)^2}{2(x-8)^3}$$

$y'=0$ при $x=0$ и при $x=12$

y' не существует при $x=8$

Решаем неравенство $y' > 0$ $(y' < 0)$ *методом интервалов*



$$\frac{x(x-12)^2}{2(x-8)^3} > 0\ (<0)$$

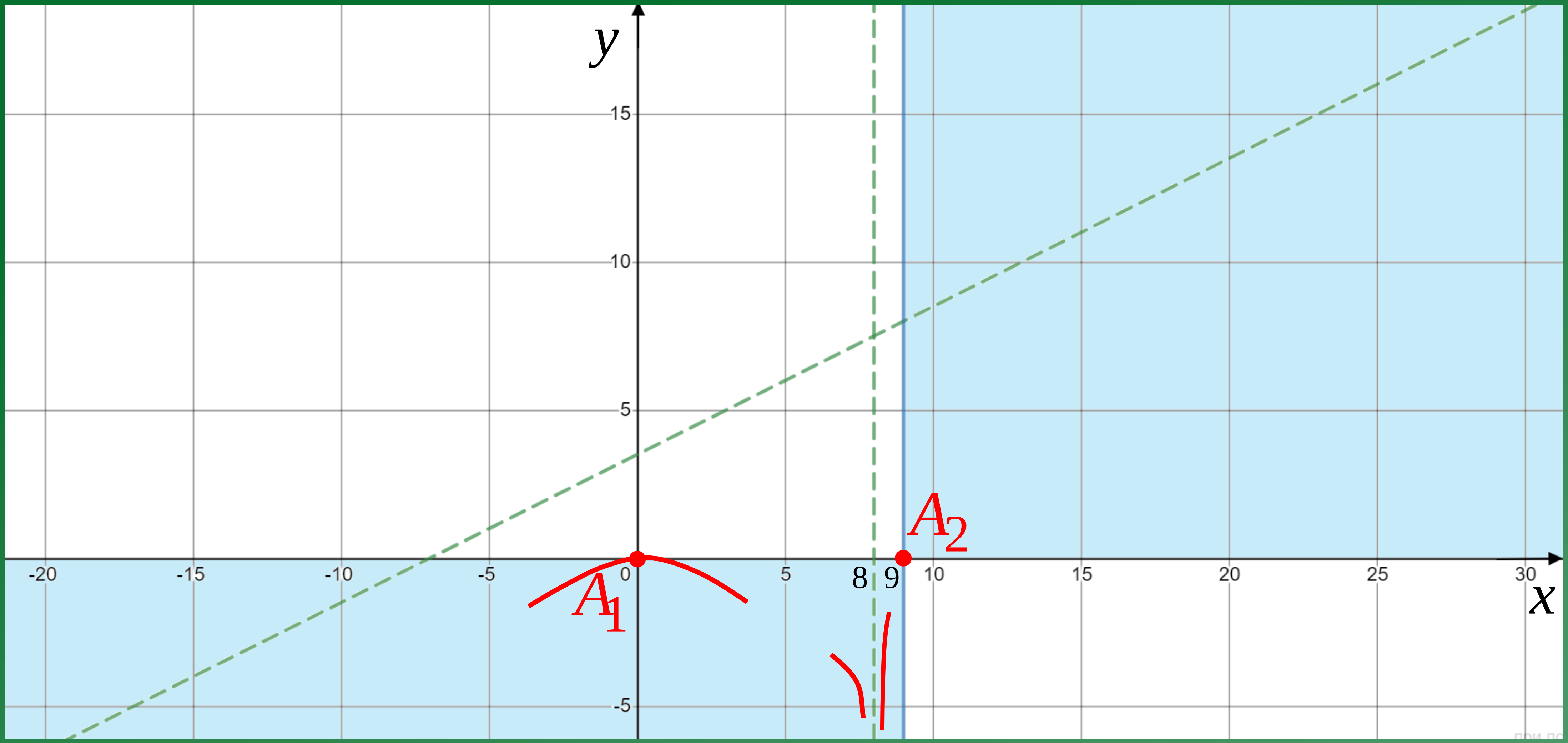
$y\uparrow$ при $x \in (-\infty;0)\cup(8;+\infty)$

$y\downarrow$ при $x \in (0;8)$

$x = 0$ – *точка loc* max $\qquad y(0) = 0$

$A_1(0;0)$ – *точка loc* max на графике

Точка X=8 не является точкой locmin, т.к. в этой точке функция y(x) разрывна (разрыв II рода)


y
15
10
5
-5
-20
-15
-10
-5
0
5
8
9
10
15
20
25
30
x
A_1
A_2

6) Найдем промежутки выпуклости, вогнутости.

и точки перегиба.

Для этого найдем y'' :

$$y''=\left(\frac{x(x-12)^2}{2(x-8)^3}\right)'=\frac{1}{2}\frac{\left(x(x-12)^2\right)'(x-8)^3-x(x-12)^2\left((x-8)^3\right)'}{\left((x-8)^3\right)^2}$$

$$\left(x(x-12)^2\right)'=x'(x-12)^2+x\left((x-12)^2\right)'=$$

$$=(x-12)^2+x\cdot 2(x-12)=(x-12)(x-12+2x)=(x-12)(3x-12)=$$

$$=3(x-12)(x-4)$$

$$y''=\frac{1}{2}\,\frac{3(x-12)(x-4)(x-8)^3-x(x-12)^2 3(x-8)^2}{(x-8)^6}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{3(x-12)\cancel{(x-8)^2}\big((x-4)(x-8)-x(x-12)\big)}{(x-8)^{\cancel{6}\ 4}}=$$

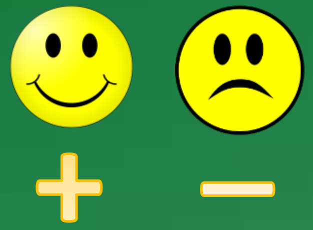
$$= \frac{3}{2}\frac{(x-12)\big((x-4)(x-8)-x(x-12)\big)}{(x-8)^4} =$$

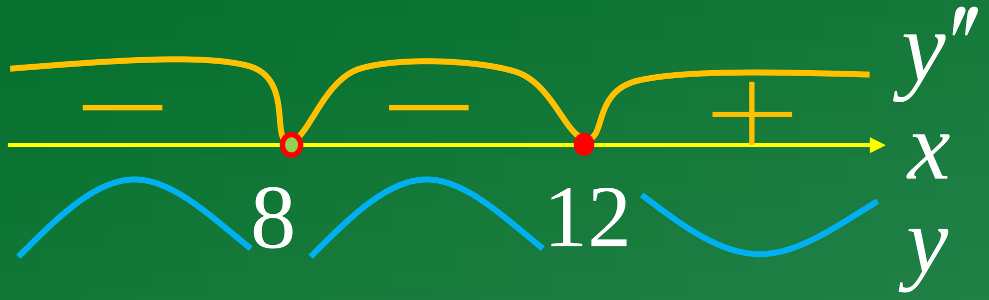
$$= \frac{3}{2}\frac{(x-12)\left(\cancel{x^2}-\cancel{4}x-\cancel{8}x+32-\cancel{x^2}+\cancel{12}x\right)}{(x-8)^4} =$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}}\frac{(x-12)\cdot \overset{16}{\cancel{32}}}{(x-8)^4} = \frac{48(x-12)}{(x-8)^4}$$

$y'' = 0$ при $x = 12$

y'' не существует при $x = 8$





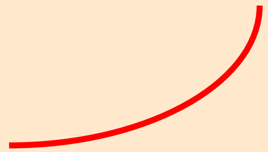
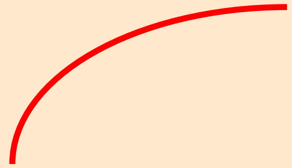
$$\frac{48(x-12)}{(x-8)^4} > 0\ (< 0)$$

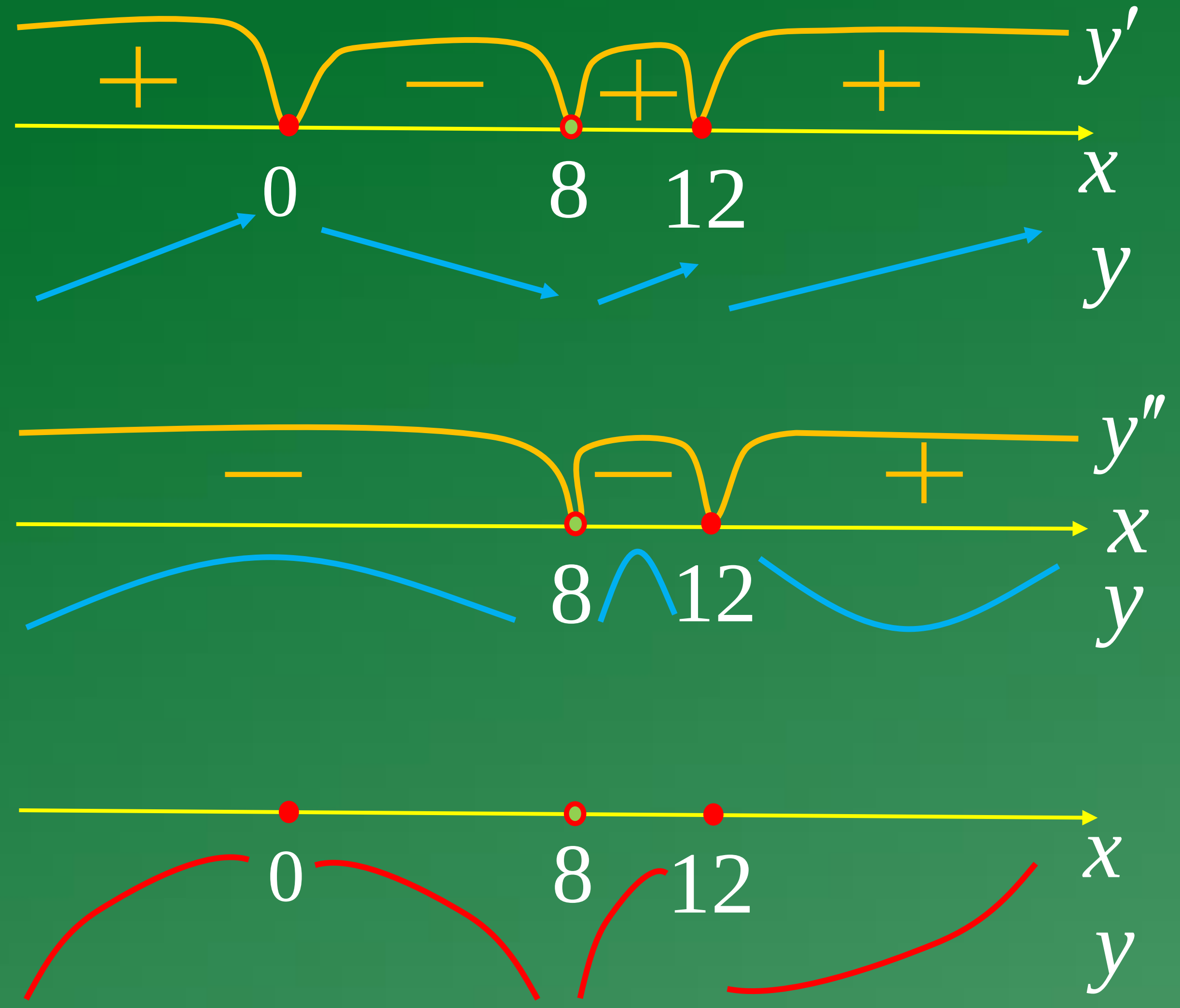
$y \cup$ при $x \in (12; +\infty)$ $\quad$ $y \cap$ при $x \in (-\infty; 8) \cup (8; 12)$

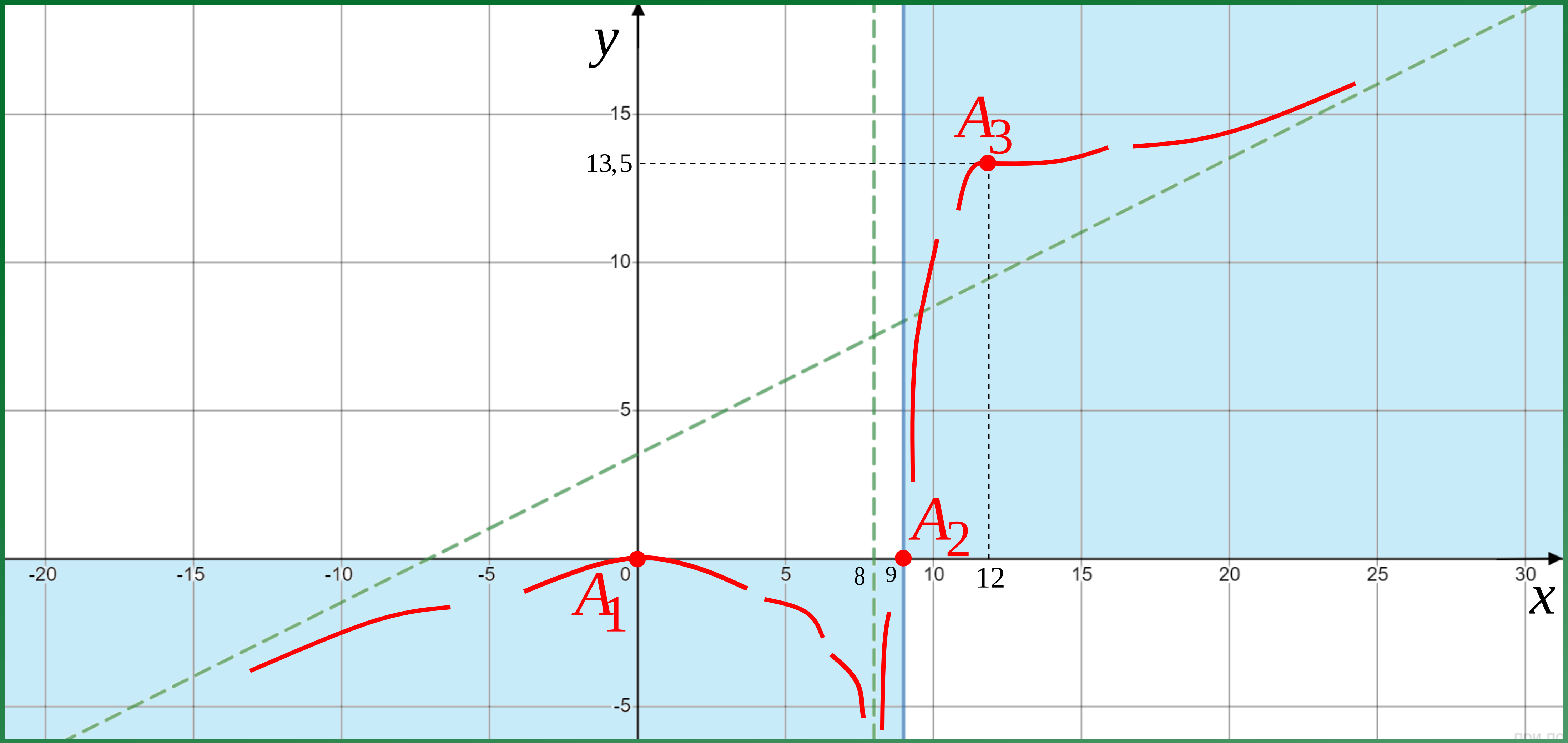
$x = 12$ – *точка перегиба* $\quad y(12) = \dfrac{12^2(12-9)}{2(12-8)^2} = 13\dfrac{1}{2}$

$A_3(12; 13{,}5)$ – *точка перегиба* на графике

Вид графика функции в окрестности точки в зависимости от знака первой и второй производной

	$y'' > 0$	$y'' < 0$
$y' > 0$		
$y' < 0$		


y′
+
−
+
+
x
0
8
12
y
y″
−
−
+
x
8
12
y
x
0
8
12
y


y
x
15
13,5
10
5
-5
-20
-15
-10
-5
0
5
8
9
10
12
15
20
25
30
A_1
A_2
A_3

Выводы

1) $D(y) = (-\infty; 8) \cup (8; +\infty)$

2) Пересечение с осью Ox: $A_1(0;0)$, $A_2(9;0)$

Пересечение с осью Oy: $A_1(0;0)$

$y > 0$ при $x \in (9; +\infty)$ $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 8) \cup (8; 9)$

3) функция общего вида

4) прямая $x = 8$ - вертикльная асимптота

прямая $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ - наклонная асимптота

Выводы (продолжение)

5) $y\uparrow$ при $x\in(-\infty;0)\cup(8;+\infty)$

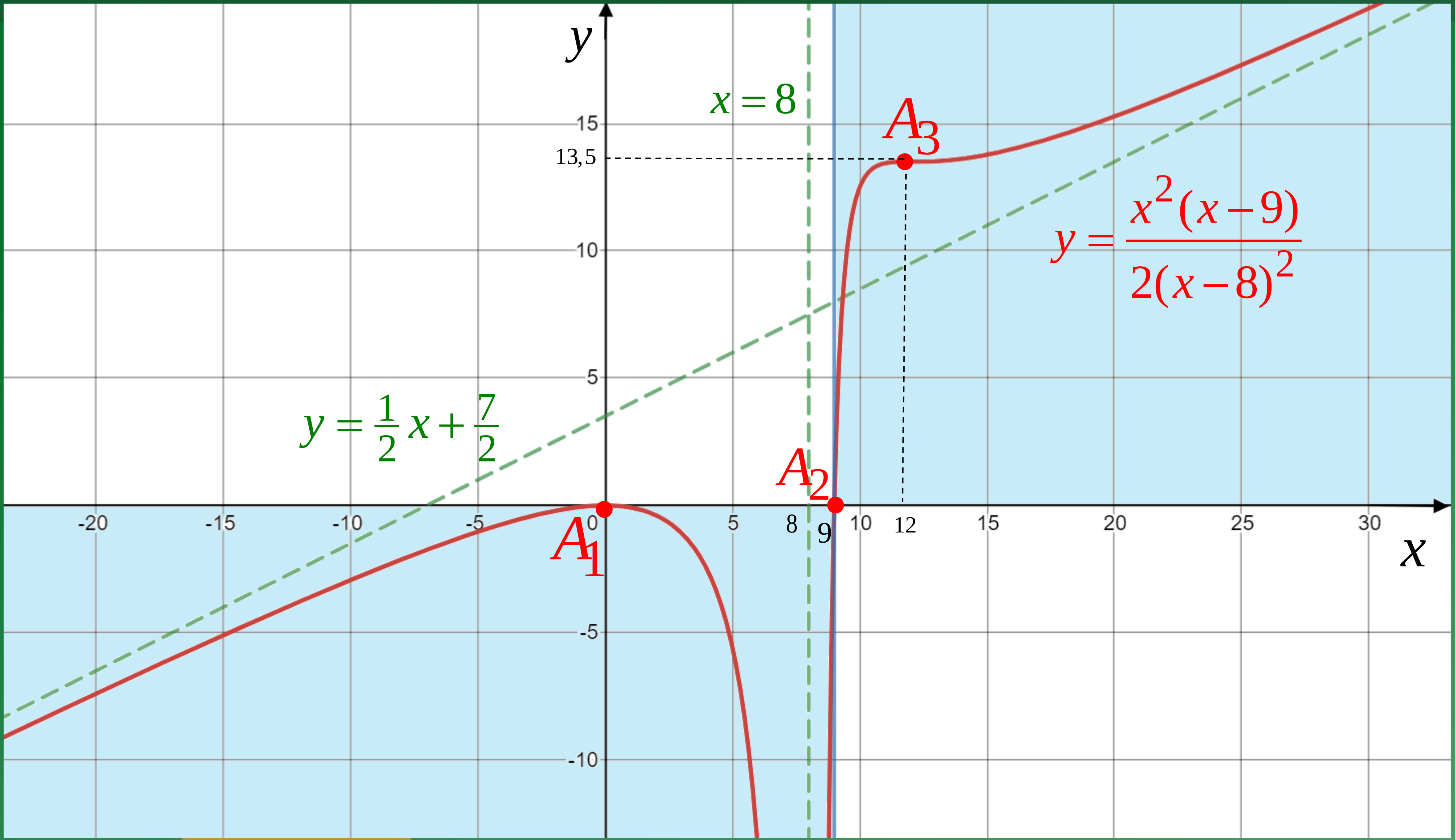
$y\downarrow$ при $x\in(0;8)$

$A_1(0;0)$ – *точка loc* max на графике

6) $y\cup$ при $x\in(12;+\infty)$

$y\cap$ при $x\in(-\infty;8)\cup(8;12)$

$A_3(12;13,5)$ – *точка перегиба* на графике



y
$x = 8$
A_3
15
13,5
10
5
$y = \frac{x^2(x-9)}{2(x-8)^2}$
$y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
A_2
A_1
-20
-15
-10
-5
0
5
8
9
10
12
15
20
25
30
x
-5
-10