Определения

Определение

Ориентированным графом(орграфом) называется $G = (V, E)$, где V — непустое множество вершин, а E — произвольное [мульти]бинарное отношение на V (множество дуг).

Определения

Определение

Ориентированным графом(орграфом) называется $G = (V, E)$, где V — непустое множество вершин, а E — произвольное [мульти]бинарное отношение на V (множество дуг).

- В дуге (u, v) вершина u называется начальной, v — конечной;

Определения

Определение

Ориентированным графом(орграфом) называется $G = (V, E)$, где V — непустое множество вершин, а E — произвольное [мульти]бинарное отношение на V (множество дуг).

- В дуге (u, v) вершина u называется начальной, v — конечной;
- Через $\deg^+ v$ обозначают количество дуг, для которых v конечная (in-degree), через $\deg^- v$ — для которых v начальная (out-degree);

Определения

Определение

Ориентированным графом(орграфом) называется $G = (V, E)$, где V — непустое множество вершин, а E — произвольное [мульти]бинарное отношение на V (множество дуг).

- В дуге (u, v) вершина u называется начальной, v — конечной;
- Через $\deg^+ v$ обозначают количество дуг, для которых v конечная (in-degree), через $\deg^- v$ — для которых v начальная (out-degree);
- Вершина, для которой $\deg^+ v = 0$ называется исток, для которой $\deg^- v = 0$ — сток.

Определения

Определение

Ориентированным графом(орграфом) называется $G = (V, E)$, где V — непустое множество вершин, а E — произвольное [мульти]бинарное отношение на V (множество дуг).

- В дуге (u, v) вершина u называется начальной, v — конечной;
- Через $\deg^+ v$ обозначают количество дуг, для которых v конечная (in-degree), через $\deg^- v$ — для которых v начальная (out-degree);
- Вершина, для которой $\deg^+ v = 0$ называется исток, для которой $\deg^- v = 0$ — сток.

Лемма 1

Для любого орграфа $G = (V, E)$ выполняется $\sum_{v \in V} \deg^+ v = \sum_{v \in V} \deg^- v$.

Изоморфизм орграфов

Определение

Два орграфа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ изоморфны, если существует биекция $f\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V$ количество дуг $(u, v) \in E_1$ равно количеству дуг $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Изоморфизм орграфов

Определение

Два орграфа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ изоморфны, если существует биекция $f\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V$ количество дуг $(u, v) \in E_1$ равно количеству дуг $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Любой орграф можно превратить в неориентированный граф, стерев направление у дуг. Будем называть такой граф неориентированным подграфом.

Изоморфизм орграфов

Определение

Два орграфа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ изоморфны, если существует биекция $f\colon V_1 \to V_2$ такая, что $\forall u, v \in V$ количество дуг $(u, v) \in E_1$ равно количеству дуг $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Любой орграф можно превратить в неориентированный граф, стерев направление у дуг. Будем называть такой граф неориентированным подграфом.

Упражнение. Приведите пример неизоморфных ориентированных графов, у которых неориентированные подграфы изоморфны.

Сильная связность

Заметим, что определение маршрута (пути) и ормаршрута (орпути) по сути совпадают.

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. Вершины u, v называются сильно связанными, если существует орпути из u в v и из v в u (Будем считать, что вершина сильно связана сама с собой).

Сильная связность

Заметим, что определение маршрута (пути) и ормаршрута (орпути) по сути совпадают.

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. Вершины u, v называются сильно связанными, если существует орпути из u в v и из v в u (Будем считать, что вершина сильно связана сама с собой).

Отношение "быть сильно связанным" является отношением эквивалентности. Орграф, порожденный классом эквивалентности называется компонентной сильной связности.

Сильная связность

Заметим, что определение маршрута (пути) и ормаршрута (орпути) по сути совпадают.

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. Вершины u, v называются сильно связанными, если существует орпути из u в v и из v в u (Будем считать, что вершина сильно связана сама с собой).

Отношение "быть сильно связанным" является отношением эквивалентности. Орграф, порожденный классом эквивалентности называется компонентной сильной связности.

Определение

Орграф называется сильно связным, если между любыми его двумя вершинами существует ормаршрут.

Эйлеров орцикл

Определение

Орграф называется сильно связным, если между любыми его двумя вершинами существует ормаршрут.

Эйлеров орцикл

Определение

Орграф называется сильно связным, если между любыми его двумя вершинами существует ормаршрут.

Лемма 2

Граф сильно связан тогда и только тогда, когда существует орцикл, содержащий все его вершины.

Эйлеров орцикл

Определение

Орграф называется сильно связным, если между любыми его двумя вершинами существует ормаршрут.

Лемма 2

Граф сильно связан тогда и только тогда, когда существует орцикл, содержащий все его вершины.

Теорема (Эйлера для орграфов)

Орграф $G = (V, E)$ содержит орцикл, проходящий по всем его ребрам ровно один раз, тогда и только тогда, когда G сильно связан и $\forall v \in V \quad \deg^+ v = \deg^- v$.

Ч.у.м. компонент сильной связности

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. На множестве $G_1, \ldots, G_s$ его компонент сильной связности рассмотрим отношение $\leq$, где $G_i \leq G_j$ тогда и только тогда, когда $\exists u \in V(G_1) \quad \exists v \in V(G_2)$ существует путь из u в v.

Ч.у.м. компонент сильной связности

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. На множестве $G_1, \ldots, G_s$ его компонент сильной связности рассмотрим отношение $\leq$, где $G_i \leq G_j$ тогда и только тогда, когда $\exists u \in V(G_1) \quad \exists v \in V(G_2)$ существует путь из u в v.

Лемма 1

Отношение $\leq$ является отношением частичного порядка.

Ч.у.м. компонент сильной связности

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. На множестве $G_1, \ldots, G_s$ его компонент сильной связности рассмотрим отношение $\leq$, где $G_i \leq G_j$ тогда и только тогда, когда $\exists u \in V(G_1) \quad \exists v \in V(G_2)$ существует путь из u в v.

Лемма 1

Отношение $\leq$ является отношением частичного порядка.

Рефлексивность и транзитивность очевидны.
Докажем, что отношение $\leq$ антисимметрично. Пусть $G_1 \leq G_2$ и $G_2 \leq G_1$. Тогда существуют $u_1, u_2 \in V(G_1)$, $v_1, v_2 \in V(G_2)$ и пути $u_1 \rightsquigarrow v_1$, $v_2 \rightsquigarrow u_2$.

Ч.у.м. компонент сильной связности

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. На множестве $G_1, \ldots, G_s$ его компонент сильной связности рассмотрим отношение $\leq$, где $G_i \leq G_j$ тогда и только тогда, когда $\exists u \in V(G_1) \quad \exists v \in V(G_2)$ существует путь из u в v.

Лемма 1

Отношение $\leq$ является отношением частичного порядка.

Рефлексивность и транзитивность очевидны.
Докажем, что отношение $\leq$ антисимметрично. Пусть $G_1 \leq G_2$ и $G_2 \leq G_1$. Тогда существуют $u_1, u_2 \in V(G_1)$, $v_1, v_2 \in V(G_2)$ и пути $u_1 \rightsquigarrow v_1$, $v_2 \rightsquigarrow u_2$.
Рассмотрим $w_1 \in V(G_1), w_2 \in V(G_2)$. Так как G_1 и G_2 сильно связны, то $w_1 \rightsquigarrow u_1$ и $v_1 \rightsquigarrow w_2$. Добавим сюда путь $u_1 \rightsquigarrow v_1$ и получим путь $w_1 \rightsquigarrow w_2$. Аналогично можно показать, что есть путь из w_2 в w_1.
Откуда получаем, что $G_1 = G_2$.

Графы без циклов

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф, $\overline{V} = \{G_1 \ldots, G_s\}$ — множество его компонент сильной связности. Рассмотрим граф $H = (\overline{V}, \overline{E})$ такой, что $(G_i, G_j) \in \overline{E}$, если G_j покрывает G_i. Граф H называется конденсацией орграфа G.

Графы без циклов

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф, $\overline{V} = \{G_1 \ldots, G_s\}$ — множество его компонент сильной связности. Рассмотрим граф $H = (\overline{V}, \overline{E})$ такой, что $(G_i, G_j) \in \overline{E}$, если G_j покрывает G_i. Граф H называется конденсацией орграфа G.

Граф H не содержит циклов.

Графы без циклов

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф, $\overline{V} = \{G_1 \ldots, G_s\}$ — множество его компонент сильной связности. Рассмотрим граф $H = (\overline{V}, \overline{E})$ такой, что $(G_i, G_j) \in \overline{E}$, если G_j покрывает G_i. Граф H называется конденсацией орграфа G.

Граф H не содержит циклов.

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — орграф, где вершины пронумерованы $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Будем говорить, что орграф топологически отсортирован, если $(v_i, v_j) \in E \Rightarrow i < j$.

Топологическая сортировка графа

Лемма 2

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. У G существует топологическая сортировка тогда и только тогда, когда G не содержит циклов.

Топологическая сортировка графа

Лемма 2

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. У G существует топологическая сортировка тогда и только тогда, когда G не содержит циклов.

$\Rightarrow$ Пусть $v_{i_1} \to v_{i_2} \to \ldots \to v_{i_k} \to v_{i_1}$ — орцикл в топологически отсортированном графе G, тогда $i_1 < i_2 < \cdots < i_k < i_1$.

Топологическая сортировка графа

Лемма 2

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. У G существует топологическая сортировка тогда и только тогда, когда G не содержит циклов.

$\Leftarrow$ Пусть $G = (V, E)$ — орграф без циклов. Тогда в нем найдется исток, который обозначим v_1. Рассмотрим граф без циклов $G_1 = G - v_1$, найдем в нем исток и обозначим через v_2. Продолжим, пока граф не опустеет.

Топологическая сортировка графа

Лемма 2

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. У G существует топологическая сортировка тогда и только тогда, когда G не содержит циклов.

$\Leftarrow$ Пусть $G = (V, E)$ — орграф без циклов. Тогда в нем найдется исток, который обозначим v_1. Рассмотрим граф без циклов $G_1 = G - v_1$, найдем в нем исток и обозначим через v_2. Продолжим, пока граф не опустеет.
Получили $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — порядок, в котором мы удаляли вершины в графе G. Докажем, что это топологическая сортировка графа.

Топологическая сортировка графа

Лемма 2

Пусть $G = (V, E)$ — орграф. У G существует топологическая сортировка тогда и только тогда, когда G не содержит циклов.

$\Leftarrow$ Пусть $G = (V, E)$ — орграф без циклов. Тогда в нем найдется исток, который обозначим v_1. Рассмотрим граф без циклов $G_1 = G - v_1$, найдем в нем исток и обозначим через v_2. Продолжим, пока граф не опустеет.
Получили $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — порядок, в котором мы удаляли вершины в графе G. Докажем, что это топологическая сортировка графа.
Пусть $(v_i, v_j) \in E$. Предположим, что $j > i$ и рассмотрим граф G_{i-1}, в котором v_i должна быть истоком, но имеет ребро (v_i, v_j).