Планарные графы и раскраски графов

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

24 октября 2018 г.

Плоские и планарные графы

Определение

- Граф называется плоским, если его ребра пересекаются только в вершинах;

Плоские и планарные графы

Определение

- Граф называется плоским, если его ребра пересекаются только в вершинах;
- Граф называется планарным, если он изоморфен некоторому плоскому графу;

Плоские и планарные графы

Определение

- Граф называется плоским, если его ребра пересекаются только в вершинах;
- Граф называется планарным, если он изоморфен некоторому плоскому графу;
- Будем говорить, что граф обладает укладкой на поверхности, если его можно изобразить на этой поверхности так, чтобы ребра пересекались только в вершинах.

Плоские и планарные графы

Определение

- Граф называется плоским, если его ребра пересекаются только в вершинах;
- Граф называется планарным, если он изоморфен некоторому плоскому графу;
- Будем говорить, что граф обладает укладкой на поверхности, если его можно изобразить на этой поверхности так, чтобы ребра пересекались только в вершинах.

Граф K_5 обладает укладкой на торе ("бублике"), но не обладает укладкой на сфере.

Плоские и планарные графы

Определение

- Граф называется плоским, если его ребра пересекаются только в вершинах;
- Граф называется планарным, если он изоморфен некоторому плоскому графу;
- Будем говорить, что граф обладает укладкой на поверхности, если его можно изобразить на этой поверхности так, чтобы ребра пересекались только в вершинах.

Граф K_5 обладает укладкой на торе ("бублике"), но не обладает укладкой на сфере.

В этой лекции будем по умолчанию считать, что граф G обыкновенный.

Укладка на сфере

Определение

Пусть G — плоский граф (можно считать, что он его изображение на поверхности зафиксировано). Его гранью называется часть поверхности такая, что любые две точки можно соединить непрерывной кривой, которая не пересекает ребра графа. Ребра, которые ограничивают грань графа, называются границей грани. $r(G)$ или r — количество граней графа G.

Укладка на сфере

Определение

Пусть G — плоский граф (можно считать, что он его изображение на поверхности зафиксировано). Его гранью называется часть поверхности такая, что любые две точки можно соединить непрерывной кривой, которая не пересекает ребра графа. Ребра, которые ограничивают грань графа, называются границей грани. $r(G)$ или r — количество граней графа G.

Лемма 1

Граф планарен тогда и только тогда, когда он обладает укладкой на сфере.

Укладка на сфере

Определение

Пусть G — плоский граф (можно считать, что он его изображение на поверхности зафиксировано). Его гранью называется часть поверхности такая, что любые две точки можно соединить непрерывной кривой, которая не пересекает ребра графа. Ребра, которые ограничивают грань графа, называются границей грани. $r(G)$ или r — количество граней графа G.

Лемма 1

Граф планарен тогда и только тогда, когда он обладает укладкой на сфере.

Лемма 2

Для любого планарного графа G и любой его грани Γ существует такая его укладка, что грань Γ внешняя.

Грани

Лемма 3

Пусть $G = (V, E)$ — планарный граф. Ребро $e \in E$ принадлежит границе одной грани тогда и только тогда, когда e — мост. Если ребро не мост, то оно принадлежит границе двух граней.

Грани

Лемма 3

Пусть $G = (V, E)$ — планарный граф. Ребро $e \in E$ принадлежит границе одной грани тогда и только тогда, когда e — мост. Если ребро не мост, то оно принадлежит границе двух граней.

Изобразим граф так, чтобы e оказалось на границе внешней грани.

Грани

Лемма 3

Пусть $G = (V, E)$ — планарный граф. Ребро $e \in E$ принадлежит границе одной грани тогда и только тогда, когда e — мост. Если ребро не мост, то оно принадлежит границе двух граней.

Изобразим граф так, чтобы e оказалось на границе внешней грани.

Теорема (Эйлер)

Пусть $G = (V, E)$ — связный планарный граф. Тогда $n - m + r = 2$.

Доказательство теоремы Эйлера

Докажем теорему по индукции по количеству ребер в графе.

Доказательство теоремы Эйлера

Докажем теорему по индукции по количеству ребер в графе.
База индукции. Наименьшее количество ребер в связном графе $m = n - 1$. Мы получим дерево, которое является планарным графом (укладкой на плоскости является например корневое изображение дерева). У дерева одна внешняя грань. Поэтому $n - (n - 1) + 1 = 2$ и теорема выполняется.

Доказательство теоремы Эйлера

Докажем теорему по индукции по количеству ребер в графе.
База индукции. Наименьшее количество ребер в связном графе $m = n - 1$. Мы получим дерево, которое является планарным графом (укладкой на плоскости является например корневое изображение дерева). У дерева одна внешняя грань. Поэтому $n - (n - 1) + 1 = 2$ и теорема выполняется.
Шаг индукции. Пусть $G = (V, E)$ связный планарный граф и при добавлении ребра e граф $G' = (V, E \cup \{e\})$ снова планарен. Тогда e не является мостом в графе G' и, следовательно, принадлежит границе двух граней. Следовательно, при его удалении число граней уменьшается на 1.

Доказательство теоремы Эйлера

Докажем теорему по индукции по количеству ребер в графе.
База индукции. Наименьшее количество ребер в связном графе $m = n - 1$. Мы получим дерево, которое является планарным графом (укладкой на плоскости является например корневое изображение дерева). У дерева одна внешняя грань. Поэтому $n - (n - 1) + 1 = 2$ и теорема выполняется.
Шаг индукции. Пусть $G = (V, E)$ связный планарный граф и при добавлении ребра e граф $G' = (V, E \cup \{e\})$ снова планарен. Тогда e не является мостом в графе G' и, следовательно, принадлежит границе двух граней. Следовательно, при его удалении число граней уменьшается на 1.
Тогда $r' = r + 1$, $n = n'$, $m' = m + 1$. Получаем

$$n' - m' + r' = n - (m + 1) + r + 1 = n - m + r = 2$$

Следствия

Следствие 1

Пусть $G = (V, E)$ — планарный граф с k компонентами связности. Тогда $n - m + r = k + 1$.

Следствия

Следствие 1

Пусть $G = (V, E)$ — планарный граф с k компонентами связности. Тогда $n - m + r = k + 1$.

Следствие 2 (Теорема Эйлера о многогранниках)

Пусть M — выпуклый многогранник с n вершинами, m ребрами и r гранями. Тогда $n - m + r = 2$

Граф K_5 не планарен

Следствие 3

Граф K_5 не планарен.

Граф K_5 не планарен

Следствие 3

Граф K_5 не планарен.

От противного. Пусть K_5 планарен, тогда для него выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Так как $n = 5, m = 10$, то $r = 7$.

Граф K_5 не планарен

Следствие 3

Граф K_5 не планарен.

От противного. Пусть K_5 планарен, тогда для него выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Так как $n = 5, m = 10$, то $r = 7$. Обозначим через m_i количество ребер, принадлежащих границе i-ой грани. Тогда $m_i \geq 3$ и, следовательно $\sum_{i=1}^{7} m_i \geq 3 \cdot 7 = 21$.

Граф K_5 не планарен

Следствие 3

Граф K_5 не планарен.

От противного. Пусть K_5 планарен, тогда для него выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Так как $n = 5, m = 10$, то $r = 7$. Обозначим через m_i количество ребер, принадлежащих границе i-ой грани. Тогда $m_i \geq 3$ и, следовательно $\sum_{i=1}^{7} m_i \geq 3 \cdot 7 = 21$.
В графе K_5 нет мостов, поэтому каждое ребро принадлежит границе ровно двух граней. Следовательно, в сумме $\sum_{i=1}^{7} m_i$ каждое ребро входит дважды. Тогда $\sum_{i=1}^{7} m_i = 2m = 20$, противоречие.

Граф $K_{3,3}$ не планарен

Следствие 3

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

Граф $K_{3,3}$ не планарен

Следствие 3

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

От противного. Пусть $K_{3,3}$ планарен, тогда для него выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Так как $n = 6, m = 9$, то $r = 5$.

Граф $K_{3,3}$ не планарен

Следствие 3

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

От противного. Пусть $K_{3,3}$ планарен, тогда для него выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Так как $n = 6, m = 9$, то $r = 5$. Обозначим через m_i количество ребер, принадлежащих границе i-ой грани. Тогда $m_i \geq 4$ и, следовательно $\sum_{i=1}^{5} m_i \geq 4 \cdot 5 = 20$.

Граф $K_{3,3}$ не планарен

Следствие 3

Граф $K_{3,3}$ не планарен.

От противного. Пусть $K_{3,3}$ планарен, тогда для него выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Так как $n = 6, m = 9$, то $r = 5$. Обозначим через m_i количество ребер, принадлежащих границе i-ой грани. Тогда $m_i \geq 4$ и, следовательно $\sum_{i=1}^{5} m_i \geq 4 \cdot 5 = 20$.
В графе $K_{3,3}$ нет мостов, поэтому каждое ребро принадлежит границе ровно двух граней. Следовательно, в сумме $\sum_{i=1}^{5} m_i$ каждое ребро входит дважды. Тогда $\sum_{i=1}^{5} m_i = 2m = 18$, противоречие.

Элементарные операции над графами

Удаление и добавление вершины степени 2

Элементарные операции над графами

Удаление и добавление вершины степени 2

- Пусть v — вершина степени 2 в графе G, u, w — две вершины, смежные с v. Удалив вершину v из графа G и добавив ребро (u, v) получим граф G'. Тогда говорят, что G' получен из G удалением вершины степени 2.

Элементарные операции над графами

Удаление и добавление вершины степени 2

- Пусть v — вершина степени 2 в графе G, u, w — две вершины, смежные с v. Удалив вершину v из графа G и добавив ребро (u, v) получим граф G'. Тогда говорят, что G' получен из G удалением вершины степени 2.
- Пусть u, v — две смежные вершины в графе G. Удалив ребро (u, v) и добавив новую вершину v и ребра $(v, u), (v, w)$ получим граф G'. Тогда говорят, что G' получен из G добавлением вершины степени 2.

Элементарные операции над графами

Удаление и добавление вершины степени 2

- Пусть v — вершина степени 2 в графе G, u, w — две вершины, смежные с v. Удалив вершину v из графа G и добавив ребро (u, v) получим граф G'. Тогда говорят, что G' получен из G удалением вершины степени 2.
- Пусть u, v — две смежные вершины в графе G. Удалив ребро (u, v) и добавив новую вершину v и ребра $(v, u), (v, w)$ получим граф G'. Тогда говорят, что G' получен из G добавлением вершины степени 2.

Элементарное стягивание

Пусть $G = (V, E)$ — граф, в котором вершины u и v **смежны**. Обозначим через V' множество всех вершин из V за исключением u, v, которые смежны хотя бы с одной из вершин u или v. Удалив вершины u и v, добавив новую вершину w и ребра (w, x) для всех $x \in V'$ получим граф G'. Тогда говорят, что G' получен элементарным стягиванием вершин u и v в графе G

Теоремы Понтрягина-Куратовского

Будем говорить, что графы гомеоморфны, если один из другого можно получить последовательностью удалений или добавлений вершин степени 2.

Теоремы Понтрягина-Куратовского

Будем говорить, что графы гомеоморфны, если один из другого можно получить последовательностью удалений или добавлений вершин степени 2.

Теорема 1 (Понтрягина-Куратовского)

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Теоремы Понтрягина-Куратовского

Будем говорить, что графы гомеоморфны, если один из другого можно получить последовательностью удалений или добавлений вершин степени 2.

Теорема 1 (Понтрягина-Куратовского)

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных K_5 или $K_{3,3}$.

Теорема 2 (Понтрягина-Куратовского)

Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, которые стягиваются к K_5 или $K_{3,3}$.

Раскраски графов

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Его раскраской в k цветов называется отображение $f\colon V \to \{c_1, \ldots, c_k\}$. Раскраска называется правильной, если для любых смежных вершин $u, v \in V$ выполняется $f(u) \neq f(v)$.

Раскраски графов

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Его раскраской в k цветов называется отображение $f\colon V \to \{c_1, \ldots, c_k\}$. Раскраска называется правильной, если для любых смежных вершин $u, v \in V$ выполняется $f(u) \neq f(v)$.

Хроматическим числом $\chi(G)$ графа G называется такое число k, что у графа G существует правильная раскраска в k цветов и не существует правильной раскраски в $k-1$ цвет.

Простые сведения о хроматических числах

Утверждение 1

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ — пустой граф;

Простые сведения о хроматических числах

Утверждение 1

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ — пустой граф;
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ — непустой двудольный граф.

Простые сведения о хроматических числах

Утверждение 1

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ — пустой граф;
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ — непустой двудольный граф.

Утверждение 2

- $\chi(K_n) = n$;
- Если K_n является подграфом G, то $\chi(G) \geq n$;

Простые сведения о хроматических числах

Утверждение 1

- $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow G$ — пустой граф;
- $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ — непустой двудольный граф.

Утверждение 2

- $\chi(K_n) = n$;
- Если K_n является подграфом G, то $\chi(G) \geq n$;
- Если граф содержит цикл нечетной длины, то $\chi(G) \geq 3$.

Оценка хроматического числа через число независимости

Нетрудно заметить, что если зафиксировать правильную раскраску графа и рассмотреть множество вершин, покрашенных в один цвет, то окажется, что все вершины в этом множестве попарно несмежны.

Оценка хроматического числа через число независимости

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество вершин $V' \subseteq V$ называется независимым, если любые две различные вершины в этом множестве несмежны.

Оценка хроматического числа через число независимости

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество вершин $V' \subseteq V$ называется независимым, если любые две различные вершины в этом множестве несмежны.

Обозначим через $\beta(G)$ число независимости — максимальное число независимых вершин в графе.

Оценка хроматического числа через число независимости

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество вершин $V' \subseteq V$ называется независимым, если любые две различные вершины в этом множестве несмежны.

Обозначим через $\beta(G)$ число независимости — максимальное число независимых вершин в графе.

Утверждение 3

Пусть G — граф, $\beta(G)$ — его число независимости. Тогда $\frac{n}{\beta(G)} \leq \chi(G) \leq n - \beta(G) + 1$.

Доказательство

Утверждение 3

Пусть G — граф, $\beta(G)$ — его число независимости. Тогда $\frac{n}{\beta(G)} \leq \chi(G) \leq n - \beta(G) + 1$.

Доказательство

Утверждение 3

Пусть G — граф, $\beta(G)$ — его число независимости. Тогда $\frac{n}{\beta(G)} \leq \chi(G) \leq n - \beta(G) + 1$.

Пусть $\chi(G) = k$. Зафиксируем какую-нибудь правильную раскраску графа в k цветов. Получим множества вершин $V_1, \ldots, V_k$, где $V_i \subseteq V$ — множество вершин, раскрашенных в i-ый цвет.

Доказательство

Утверждение 3

Пусть G — граф, $\beta(G)$ — его число независимости. Тогда $\frac{n}{\beta(G)} \leq \chi(G) \leq n - \beta(G) + 1$.

Пусть $\chi(G) = k$. Зафиксируем какую-нибудь правильную раскраску графа в k цветов. Получим множества вершин $V_1, \ldots, V_k$, где $V_i \subseteq V$ — множество вершин, раскрашенных в i-ый цвет. Все эти множества независимы, поэтому $|V_i| \leq \beta(G)$, откуда $n = |V| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k\beta(G)$.

Доказательство

Утверждение 3

Пусть G — граф, $\beta(G)$ — его число независимости. Тогда $\frac{n}{\beta(G)} \leq \chi(G) \leq n - \beta(G) + 1$.

Пусть $\chi(G) = k$. Зафиксируем какую-нибудь правильную раскраску графа в k цветов. Получим множества вершин $V_1, \ldots, V_k$, где $V_i \subseteq V$ — множество вершин, раскрашенных в i-ый цвет. Все эти множества независимы, поэтому $|V_i| \leq \beta(G)$, откуда $n = |V| = \sum_{i=1}^{k} |V_i| \leq k\beta(G)$.
Для доказательства второго неравенства достаточно раскрасить граф в $n - \beta(G) + 1$ цвет. Пусть V' — независимое множество, в котором $\beta(G)$ вершин. Покрасим их в один цвет. Тогда в графе останется $n - \beta(G)$ цветов, которые мы покрасим каждую в свой цвет. Итого мы использовали $n - \beta(G) + 1$ цвет.

Теорема о графе без треугольников

Теорема

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G_k такой, что $\chi(G_k) = k$ и G_k не содержит подграфов, изоморфных K_3.

Теорема о графе без треугольников

Теорема

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G_k такой, что $\chi(G_k) = k$ и G_k не содержит подграфов, изоморфных K_3.

Докажем это утверждение по индукции по k. Для $k = 1$ в качестве графа можно взять граф O_1, а для $k = 2$ граф K_2.

Теорема о графе без треугольников

Теорема

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G_k такой, что $\chi(G_k) = k$ и G_k не содержит подграфов, изоморфных K_3.

Докажем это утверждение по индукции по k. Для $k = 1$ в качестве графа можно взять граф O_1, а для $k = 2$ граф K_2.
Шаг индукции. Пусть граф $G_k = (V, E)$ построен. Построим граф $G_{k+1} = (\overline{V}, \overline{E})$.

Теорема о графе без треугольников

Теорема

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G_k такой, что $\chi(G_k) = k$ и G_k не содержит подграфов, изоморфных K_3.

Докажем это утверждение по индукции по k. Для $k = 1$ в качестве графа можно взять граф O_1, а для $k = 2$ граф K_2.
Шаг индукции. Пусть граф $G_k = (V, E)$ построен. Построим граф $G_{k+1} = (\overline{V}, \overline{E})$.
Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Создадим для каждой вершины свою копию: $V' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$. Добавим в полученный граф ребра из E, а также новые ребра по следующему правилу:
вершина v'_i соединяется ребром со всеми вершинами $u \in V$, которые смежны с v_i в графе G_k.

Теорема о графе без треугольников

Теорема

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует граф G_k такой, что $\chi(G_k) = k$ и G_k не содержит подграфов, изоморфных K_3.

Докажем это утверждение по индукции по k. Для $k = 1$ в качестве графа можно взять граф O_1, а для $k = 2$ граф K_2.
Шаг индукции. Пусть граф $G_k = (V, E)$ построен. Построим граф $G_{k+1} = (\overline{V}, \overline{E})$.
Пусть $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Создадим для каждой вершины свою копию: $V' = \{v'_1, \ldots, v'_n\}$. Добавим в полученный граф ребра из E, а также новые ребра по следующему правилу:
вершина v'_i соединяется ребром со всеми вершинами $u \in V$, которые смежны с v_i в графе G_k.
Добавим еще одну новую вершину v_0 и соединим ее со всеми вершинами из V'. Получим граф $G' = (V \cup V' \cup \{v_0\}, \overline{E})$ и докажем, что $\chi(G') = k + 1$.

Теорема о графе без треугольников

Сначала покажем, что граф G' не содержит треугольников. Действительно, вершина v_0 не может входить в треугольник, так как она смежна только с вершинами из V', а они между собой не смежны.

Теорема о графе без треугольников

Сначала покажем, что граф G' не содержит треугольников. Действительно, вершина v_0 не может входить в треугольник, так как она смежна только с вершинами из V', а они между собой не смежны.
В графе G_k нет треугольников, поэтому одной из вершин треугольника должна быть $v' \in V'$, которая смежна с $u, w \in V$ такими, что $(u, v), (v, w) \in E(G_k)$. Если $v' \to u \to w \to v'$ треугольник, то $v \to u \to w \to v$ треугольник в G_k, противоречие.

Теорема о графе без треугольников

Сначала покажем, что граф G' не содержит треугольников. Действительно, вершина v_0 не может входить в треугольник, так как она смежна только с вершинами из V', а они между собой не смежны.
В графе G_k нет треугольников, поэтому одной из вершин треугольника должна быть $v' \in V'$, которая смежна с $u, w \in V$ такими, что $(u, v), (v, w) \in E(G_k)$. Если $v' \to u \to w \to v'$ треугольник, то $v \to u \to w \to v$ треугольник в G_k, противоречие.
Теперь построим раскраску в $k+1$ цвет.Так как $\chi(G_k) = k$, то существует правильная раскраска $f\colon V \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ графа G_k в k цветов. Положим $f(v') = f(v)$, $f(v_0) = c_{k+1}$.

Теорема о графе без треугольников

Сначала покажем, что граф G' не содержит треугольников. Действительно, вершина v_0 не может входить в треугольник, так как она смежна только с вершинами из V', а они между собой не смежны.
В графе G_k нет треугольников, поэтому одной из вершин треугольника должна быть $v' \in V'$, которая смежна с $u, w \in V$ такими, что $(u, v), (v, w) \in E(G_k)$. Если $v' \to u \to w \to v'$ треугольник, то $v \to u \to w \to v$ треугольник в G_k, противоречие.
Теперь построим раскраску в $k+1$ цвет.Так как $\chi(G_k) = k$, то существует правильная раскраска $f\colon V \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ графа G_k в k цветов. Положим $f(v') = f(v)$, $f(v_0) = c_{k+1}$.
Такая раскраска будет правильной, так как v' смежна только с теми вершинами, с которыми смежна v. Следовательно, все эти вершины покрашены в цвет, отличный от $f(v)$.

Теорема о графе без треугольников

Теперь покажем, что G' нельзя правильно раскрасить в k цветов. Докажем это от противного. Пусть $f\colon \overline{V} \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ — правильная раскраска G' в k цветов. Заметим, что так как v_0 смежна со всеми вершинами из V', то ее цвет отличен от цветов вершин V'. Без ограничения общности будем считать, что $f(v_0) = c_k$.

Теорема о графе без треугольников

Теперь покажем, что G' нельзя правильно раскрасить в k цветов. Докажем это от противного. Пусть $f\colon \overline{V} \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ — правильная раскраска G' в k цветов. Заметим, что так как v_0 смежна со всеми вершинами из V', то ее цвет отличен от цветов вершин V'. Без ограничения общности будем считать, что $f(v_0) = c_k$.
Покажем, что можно перекрасить G_k так, чтобы новая правильная раскраска не содержали цвета c_k. Пусть $v \in V$ такова, что $f(v) = c_k$. Вспомним, что $f(v') \neq c_k$. Так как вершина v' смежна со всеми вершинами, которые смежны с v, то ее цвет отличен от тех, которые используются для раскраски вершин, смежных с v. Поэтому можно раскрасить вершину v в цвет $f(v')$.

Теорема о графе без треугольников

Теперь покажем, что G' нельзя правильно раскрасить в k цветов. Докажем это от противного. Пусть $f\colon \overline{V} \to \{c_1, \ldots, c_k\}$ — правильная раскраска G' в k цветов. Заметим, что так как v_0 смежна со всеми вершинами из V', то ее цвет отличен от цветов вершин V'. Без ограничения общности будем считать, что $f(v_0) = c_k$.
Покажем, что можно перекрасить G_k так, чтобы новая правильная раскраска не содержали цвета c_k. Пусть $v \in V$ такова, что $f(v) = c_k$. Вспомним, что $f(v') \neq c_k$. Так как вершина v' смежна со всеми вершинами, которые смежны с v, то ее цвет отличен от тех, которые используются для раскраски вершин, смежных с v. Поэтому можно раскрасить вершину v в цвет $f(v')$.
Итак, мы получили правильную раскраску графа G_k в число цветов меньшее, чем $\chi(G_k) = k$.

Оценка хроматического числа через степени вершин

Пусть G — граф, через $\Delta(G)$ обозначим максимальную степень вершины в графе.

Оценка хроматического числа через степени вершин

Пусть G — граф, через $\Delta(G)$ обозначим максимальную степень вершины в графе.

Теорема (Брукс)

Пусть G — граф такой, что

1) G не является полным;
2) $\Delta(G) \geq 3$

Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Оценка хроматического числа через степени вершин

Пусть G — граф, через $\Delta(G)$ обозначим максимальную степень вершины в графе.

Теорема (Брукс)

Пусть G — граф такой, что

1) G не является полным;
2) $\Delta(G) \geq 3$

Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$

При доказательстве будем считать, что граф G связен. Более того, следующая лемма позволяет предполагать, что граф G двусвязен.

Оценка хроматического числа через степени вершин

Пусть G — граф, через $\Delta(G)$ обозначим максимальную степень вершины в графе.

Теорема (Брукс)

Пусть G — граф такой, что

1) G не является полным;
2) $\Delta(G) \geq 3$

Тогда $\chi(G) \leq \Delta(G)$

При доказательстве будем считать, что граф G связен. Более того, следующая лемма позволяет предполагать, что граф G двусвязен. Пусть G — связный граф. Пусть $B_1, \ldots, B_s$ — все его блоки, тогда $\chi(G) = \max_i\{\chi(B_i)\}$

Раскраски планарных графов

Теорема (Хакен, Аппель, 1976)

Пусть граф G планарен. Тогда $\chi(G) \leq 4$.

Раскраски планарных графов

Теорема (Хакен, Аппель, 1976)

Пусть граф G планарен. Тогда $\chi(G) \leq 4$.

Теорема (Хивуд, 1889)

Пусть граф G планарен. Тогда $\chi(G) \leq 5$.

Лемма 5

Пусть граф G планарен. Тогда $\exists v \quad \deg v \leq 5$

Лемма 5

Пусть граф G планарен. Тогда $\exists v \quad \deg v \leq 5$

От противного. Пусть $\forall v \in V(G) \quad \deg v \geq 6$, тогда по лемме о рукопожатиях

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m \geq 6n \Rightarrow \frac{m}{3} \geq n$$

Лемма 5

Пусть граф G планарен. Тогда $\exists v \quad \deg v \leq 5$

От противного. Пусть $\forall v \in V(G) \quad \deg v \geq 6$, тогда по лемме о рукопожатиях

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m \geq 6n \Rightarrow \frac{m}{3} \geq n$$

Так как граф планарен, то выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Кроме того, обозначив через m_i число ребер на границе грани Γ_i ($m_i \geq 3$) мы получим, что $\sum_{i=1}^{r} m_i \geq 3r$. Каждое ребро входит в сумму $\sum m_i$ не более двух раз, тогда $\sum m_i \leq 2m$. Откуда $2m \geq 3r \Rightarrow r \leq \frac{2m}{3}$.

Лемма 5

Пусть граф G планарен. Тогда $\exists v \quad \deg v \leq 5$

От противного. Пусть $\forall v \in V(G) \quad \deg v \geq 6$, тогда по лемме о рукопожатиях

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m \geq 6n \Rightarrow \frac{m}{3} \geq n$$

Так как граф планарен, то выполняется теорема Эйлера: $n - m + r = 2$. Кроме того, обозначив через m_i число ребер на границе грани Γ_i ($m_i \geq 3$) мы получим, что $\sum_{i=1}^{r} m_i \geq 3r$. Каждое ребро входит в сумму $\sum m_i$ не более двух раз, тогда $\sum m_i \leq 2m$. Откуда $2m \geq 3r \Rightarrow r \leq \frac{2m}{3}$.
Тогда $n - m + r \leq \frac{m}{3} - m + \frac{2m}{3} = 0$. Противоречие.

Доказательство теоремы Хивуда

Докажем теорему по индукции по количеству вершин. По лемме 5 существует вершина v в планарном графе $G = (V, E)$, степень которой не превосходит 5. Удалим ее из графа, граф $G - v$ останется планарным, поэтому $\chi(G - v) \leq 5$.

Доказательство теоремы Хивуда

Докажем теорему по индукции по количеству вершин. По лемме 5 существует вершина v в планарном графе $G = (V, E)$, степень которой не превосходит 5. Удалим ее из графа, граф $G - v$ останется планарным, поэтому $\chi(G - v) \leq 5$.

Сл.1 Пусть $\deg v \leq 4$, тогда покрасим вершину v в тот цвет, в который не покрашены смежные с ним вершины.

Доказательство теоремы Хивуда

Докажем теорему по индукции по количеству вершин. По лемме 5 существует вершина v в планарном графе $G = (V, E)$, степень которой не превосходит 5. Удалим ее из графа, граф $G - v$ останется планарным, поэтому $\chi(G - v) \leq 5$.

Сл.2 $\deg v = 5$. Будем считать, что укладка на плоскости графа G зафиксирована. Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 смежные вершины с v в обходе по часовой стрелке. Будем считать, что v_i покрашена в i-ый цвет.

Доказательство теоремы Хивуда

Докажем теорему по индукции по количеству вершин. По лемме 5 существует вершина v в планарном графе $G = (V, E)$, степень которой не превосходит 5. Удалим ее из графа, граф $G - v$ останется планарным, поэтому $\chi(G - v) \leq 5$.

Сл.2 $\deg v = 5$. Будем считать, что укладка на плоскости графа G зафиксирована. Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 смежные вершины с v в обходе по часовой стрелке. Будем считать, что v_i покрашена в i-ый цвет.

Обозначим через $G_{1,3}$ ($G_{2,4}$) подграф графа G, порожденные набором вершин, покрашенных в 1 и 3 (2 и 4) цвета.

Доказательство теоремы Хивуда

Докажем теорему по индукции по количеству вершин. По лемме 5 существует вершина v в планарном графе $G = (V, E)$, степень которой не превосходит 5. Удалим ее из графа, граф $G - v$ останется планарным, поэтому $\chi(G - v) \leq 5$.

Сл.2 $\deg v = 5$. Будем считать, что укладка на плоскости графа G зафиксирована. Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 смежные вершины с v в обходе по часовой стрелке. Будем считать, что v_i покрашена в i-ый цвет.

Обозначим через $G_{1,3}$ ($G_{2,4}$) подграф графа G, порожденные набором вершин, покрашенных в 1 и 3 (2 и 4) цвета.

Сл 2.1. Пусть вершины v_1 и v_3 лежат в разных компонентах связности графа $G_{1,3}$. Тогда в компоненте, содержащей вершину v_1 перекрасим вершины первого цвета в третий, а вершины третьего — в первый цвет. Тогда вершину v можно раскрасить в первый цвет.

Доказательство теоремы Хивуда

Докажем теорему по индукции по количеству вершин. По лемме 5 существует вершина v в планарном графе $G = (V, E)$, степень которой не превосходит 5. Удалим ее из графа, граф $G - v$ останется планарным, поэтому $\chi(G - v) \leq 5$.

Сл.2 $\deg v = 5$. Будем считать, что укладка на плоскости графа G зафиксирована. Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 смежные вершины с v в обходе по часовой стрелке. Будем считать, что v_i покрашена в i-ый цвет.

Обозначим через $G_{1,3}$ ($G_{2,4}$) подграф графа G, порожденные набором вершин, покрашенных в 1 и 3 (2 и 4) цвета.

Сл 2.1. Пусть вершины v_1 и v_3 лежат в разных компонентах связности графа $G_{1,3}$. Тогда в компоненте, содержащей вершину v_1 перекрасим вершины первого цвета в третий, а вершины третьего — в первый цвет. Тогда вершину v можно раскрасить в первый цвет.

Сл 2.2. Пусть вершины v_1 и v_3 лежат в одной компоненте связности в графе $G_{1,3}$. Тогда существует путь $v_1 \rightsquigarrow v_3$, все вершины которого покрашены только в цвет 1 или 3. Добавив вершину v к этому пути мы получим цикл, который содержит вершину v_2 внутри, а v_4 — снаружи. Следовательно, вершины v_2 и v_4 лежат в разных компонентах связности графа $G_{2,4}$ и можно воспользоваться сл. 2.1.