

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется **двудольным**, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества (**доли**) X и Y так, что любые две вершины из одной доли не смежны.

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется **двудольным**, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества (**доли**) X и Y так, что любые две вершины из одной доли не смежны.

Из определения не следует, что все вершина из доли X **должна** быть смежна с вершиной из доли Y .

Определение

Граф $G = (V, E)$ называется **двудольным**, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся непустых подмножества (**доли**) X и Y так, что любые две вершины из одной доли не смежны.

Из определения не следует, что все вершина из доли X **должна** быть смежна с вершиной из доли Y .

Если в двудольном графе $G = (X, Y, E)$ каждая вершина из доли X смежна с каждой вершиной из доли Y , то граф G называется **полным двудольным графом** и обозначается $K_{r,s}$, где $r = |X|, s = |Y|$.

Критерий двудольности

Назовем **длиной** пути количество ребер, которые в этот путь входят.

Теорема (Кёниг)

Граф G двудолен тогда и только тогда, когда он содержит более одной вершины и все его циклы имеют четную длину.

Теорема (Кёниг)

Граф G двудолен тогда и только тогда, когда он содержит более одной вершины и все его циклы имеют четную длину.

$\Rightarrow$ Из определения следует, что в любом двудольном графе имеется по крайней мере две вершины.

Рассмотрим произвольный цикл $u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_1$. Так как вершины из одной доли не смежны, то вершины $u_i \in X$, а вершины $v_i \in V$. Следовательно, цикл имеет четную длину.

Теорема (Кёниг)

Граф G двудолен тогда и только тогда, когда он содержит более одной вершины и все его циклы имеют четную длину.

$\Rightarrow$ Из определения следует, что в любом двудольном графе имеется по крайней мере две вершины.

Рассмотрим произвольный цикл $u_1 \rightarrow v_1 \rightarrow u_2 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_1$. Так как вершины из одной доли не смежны, то вершины $u_i \in X$, а вершины $v_i \in V$. Следовательно, цикл имеет четную длину.

$\Leftarrow$ Будем считать, что граф связан. Рассмотрим произвольную вершину v_0 графа G и запустим поиск в ширину из этой вершины. Тогда V разбивается на множества V_i , где V_i содержит все вершины, расстояние от v_0 до которых равно i . Тогда через X обозначим множество вершин, расстояние до которых четно, а через Y — нечетно.

Доказательство теоремы Кенига

Докажем, что $G = (X, Y, E)$ двудольный, от противного. Пусть в доли X существуют две смежные вершины u, w . Рассмотрим путь p_1 из v_0 в u , его длина четна и равна $2r$. Путь p_2 из v_0 в w также имеет четную длину $2s$.

Доказательство теоремы Кенига

Докажем, что $G = (X, Y, E)$ двудольный, от противного. Пусть в доли X существуют две смежные вершины u, w . Рассмотрим путь p_1 из v_0 в u , его длина четна и равна $2r$. Путь p_2 из v_0 в w также имеет четную длину $2s$.

Обозначим через v' последнюю общую вершину на путях p_1 и p_2 (возможно, что $v' = v_0$). Тогда пусть q — длина пути $v_0 \rightsquigarrow v'$.

Доказательство теоремы Кенига

Докажем, что $G = (X, Y, E)$ двудольный, от противного. Пусть в доли X существуют две смежные вершины u, w . Рассмотрим путь p_1 из v_0 в u , его длина четна и равна $2r$. Путь p_2 из v_0 в w также имеет четную длину $2s$.

Обозначим через v' последнюю общую вершину на путях p_1 и p_2 (возможно, что $v' = v_0$). Тогда пусть q — длина пути $v_0 \rightsquigarrow v'$.

Найдем длину цикла $v' \rightsquigarrow u \rightarrow w \rightsquigarrow v'$:

$(2r - q) + 1 + (2s - q) = 2(r + s - q) + 1$ — нечетна.

Доказательство теоремы Кенига

Докажем, что $G = (X, Y, E)$ двудольный, от противного. Пусть в доли X существуют две смежные вершины u, w . Рассмотрим путь p_1 из v_0 в u , его длина четна и равна $2r$. Путь p_2 из v_0 в w также имеет четную длину $2s$.

Обозначим через v' последнюю общую вершину на путях p_1 и p_2 (возможно, что $v' = v_0$). Тогда пусть q — длина пути $v_0 \rightsquigarrow v'$.

Найдем длину цикла $v' \rightsquigarrow u \rightarrow w \rightsquigarrow v'$:

$$(2r - q) + 1 + (2s - q) = 2(r + s - q) + 1 — \text{нечетна.}$$

Аналогично рассматривается случай, когда $u, w \in Y$.

Доказательство теоремы Кенига

Докажем, что $G = (X, Y, E)$ двудольный, от противного. Пусть в доли X существуют две смежные вершины u, w . Рассмотрим путь p_1 из v_0 в u , его длина четна и равна $2r$. Путь p_2 из v_0 в w также имеет четную длину $2s$.

Обозначим через v' последнюю общую вершину на путях p_1 и p_2 (возможно, что $v' = v_0$). Тогда пусть q — длина пути $v_0 \rightsquigarrow v'$.

Найдем длину цикла $v' \rightsquigarrow u \rightarrow w \rightsquigarrow v'$:

$$(2r - q) + 1 + (2s - q) = 2(r + s - q) + 1 — \text{нечетна.}$$

Аналогично рассматривается случай, когда $u, w \in Y$.

Упражнение. Докажите, что всякий лес с числом вершин более одной будет двудольным графом.

Определение

Паросочетанием в графе G называется подграф P без изолированных вершин такой, что никакие два ребра в P не инцидентны одной вершине.

Определение

Паросочетанием в графе G называется подграф P без изолированных вершин такой, что никакие два ребра в P не инцидентны одной вершине.

Задача

В компании "Рога и копыта" имеется k вакансий. В отдел по набору персонала было подано некоторое количество резюме (некоторые люди претендуют на несколько вакансий). Необходимо набрать сотрудников на вакантные места. Можно ли набрать сотрудников так, чтобы все вакансии оказались закрыты?

Определение

Паросочетанием в графе G называется подграф P без изолированных вершин такой, что никакие два ребра в P не инцидентны одной вершине.

Определения

Пусть G — граф, P — паросочетание в нем. Тогда

Определение

Паросочетанием в графе G называется подграф P без изолированных вершин такой, что никакие два ребра в P не инцидентны одной вершине.

Определения

Пусть G — граф, P — паросочетание в нем. Тогда

- Вершина $v \in P$ называется **насыщенной**, вершина $u \notin P$ — **свободной** в паросочетании P ;

Определение

Паросочетанием в графе G называется подграф P без изолированных вершин такой, что никакие два ребра в P не инцидентны одной вершине.

Определения

Пусть G — граф, P — паросочетание в нем. Тогда

- Вершина $v \in P$ называется **насыщенной**, вершина $u \notin P$ — **свободной** в паросочетании P ;
- Паросочетание называется **совершенным**, если оно насыщает все вершины графа;

Определение

Паросочетанием в графе G называется подграф P без изолированных вершин такой, что никакие два ребра в P не инцидентны одной вершине.

Определения

Пусть G — граф, P — паросочетание в нем. Тогда

- Вершина $v \in P$ называется **насыщенной**, вершина $u \notin P$ — **свободной** в паросочетании P ;
- Паросочетание называется **совершенным**, если оно насыщает все вершины графа;
- Паросочетание называется **максимальным**, если к нему нельзя добавить ребро.

Определение

Пусть $G = (X, Y, E)$ — двудольный граф, $M \subseteq X$. Тогда

$$\varphi_G(M) = \{y \in Y \mid \exists x \in M \quad (x, y) \in E\}.$$

Будем считать, что $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

Паросочетания в двудольном графе

Определение

Пусть $G = (X, Y, E)$ — двудольный граф, $M \subseteq X$. Тогда

$$\varphi_G(M) = \{y \in Y \mid \exists x \in M \quad (x, y) \in E\}.$$

Будем считать, что $\varphi(\emptyset) = \emptyset$

Теорема (Холла о свадьбах, 1935)

Пусть $G = (X, Y, E)$ — двудольный граф. В G существует паросочетание насыщающее долю X тогда и только тогда, когда $\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|$.

Доказательство теоремы Холла

$\Rightarrow$ Пусть паросочетание P насыщает долю X , тогда $\forall M \subseteq X$ мы имеем $|M| = |\varphi_P(M)| \leq |\varphi_G(M)|$.

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

База индукции. Если $X = \{x\}$, то так как $|\varphi_G(\{x\})| \geq 1$, то $\exists y \in Y \quad (x, y) \in E$. Паросочетание $P = \{(x, y)\}$ насыщающее X построено.

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 1. Пусть для любого непустого $M \subset X \quad |\varphi_G(M)| > |M|$. Пусть $x_0 \in M$, тогда $\exists y_0 \in Y \quad (x_0, y_0) \in E$. Рассмотрим подграф H , порожденный множеством вершин $X \setminus \{x_0\} \cup Y \setminus \{y_0\}$. Покажем, что он также удовлетворяет условию теоремы.

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 1. Пусть для любого непустого $M \subset X \quad |\varphi_G(M)| > |M|$. Пусть $x_0 \in M$, тогда $\exists y_0 \in Y \quad (x_0, y_0) \in E$. Рассмотрим подграф H , порожденный множеством вершин $X \setminus \{x_0\} \cup Y \setminus \{y_0\}$. Покажем, что он также удовлетворяет условию теоремы.

Берем любое подмножество $N \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Заметим, что

$$\varphi_H(N) = \begin{cases} \varphi_G(N), & \text{если } y_0 \notin \varphi_G(N); \\ \varphi_G(N) - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 1. Пусть для любого непустого $M \subset X \quad |\varphi_G(M)| > |M|$. Пусть $x_0 \in M$, тогда $\exists y_0 \in Y \quad (x_0, y_0) \in E$. Рассмотрим подграф H , порожденный множеством вершин $X \setminus \{x_0\} \cup Y \setminus \{y_0\}$. Покажем, что он также удовлетворяет условию теоремы.

Берем любое подмножество $N \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Заметим, что

$$\varphi_H(N) = \begin{cases} \varphi_G(N), & \text{если } y_0 \notin \varphi_G(N); \\ \varphi_G(N) - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В первом случае неравенство выполняется. Во втором имеем

$$|N| < |\varphi_G(N)| \Rightarrow |N| \leq |\varphi_G(N)| - 1 = |\varphi_H(N)|$$

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 1. Пусть для любого непустого $M \subset X \quad |\varphi_G(M)| > |M|$. Пусть $x_0 \in M$, тогда $\exists y_0 \in Y \quad (x_0, y_0) \in E$. Рассмотрим подграф H , порожденный множеством вершин $X \setminus \{x_0\} \cup Y \setminus \{y_0\}$. Покажем, что он также удовлетворяет условию теоремы.

Берем любое подмножество $N \subseteq X \setminus \{x_0\}$. Заметим, что

$$\varphi_H(N) = \begin{cases} \varphi_G(N), & \text{если } y_0 \notin \varphi_G(N); \\ \varphi_G(N) - 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В первом случае неравенство выполняется. Во втором имеем

$$|N| < |\varphi_G(N)| \Rightarrow |N| \leq |\varphi_G(N)| - 1 = |\varphi_H(N)|$$

По предположению индукции в графе H существует паросочетание P' , которое насыщает $X \setminus \{x_0\}$. Тогда $P = P' \cup \{(x_0, y_0)\}$.

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 2. Пусть для некоторого непустого подмножества $X_1 \subset X$ выполняется равенство $|X_1| = |\varphi_G(X_1)|$. Обозначим $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, $X_2 = X \setminus X_1$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Рассмотрим граф H_1 , порожденный вершинами $X_1 \cup Y_1$, и граф H_2 , порожденный вершинами $X_2 \cup Y_2$. Докажем, что оба этих графа удовлетворяют условию теоремы.

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 2. Пусть для некоторого непустого подмножества $X_1 \subset X$ выполняется равенство $|X_1| = |\varphi_G(X_1)|$. Обозначим $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, $X_2 = X \setminus X_1$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Рассмотрим граф H_1 , порожденный вершинами $X_1 \cup Y_1$, и граф H_2 , порожденный вершинами $X_2 \cup Y_2$. Докажем, что оба этих графа удовлетворяют условию теоремы.

Заметим, что так как $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, то $\forall M \subseteq X_1 \quad \varphi_{H_1}(M) = \varphi_G(M)$, откуда $|M| \leq |\varphi_{H_1}(M)|$.

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 2. Пусть для некоторого непустого подмножества $X_1 \subset X$ выполняется равенство $|X_1| = |\varphi_G(X_1)|$. Обозначим $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, $X_2 = X \setminus X_1$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Рассмотрим граф H_1 , порожденный вершинами $X_1 \cup Y_1$, и граф H_2 , порожденный вершинами $X_2 \cup Y_2$. Докажем, что оба этих графа удовлетворяют условию теоремы.

Заметим, что так как $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, то $\forall M \subseteq X_1 \quad \varphi_{H_1}(M) = \varphi_G(M)$, откуда $|M| \leq |\varphi_{H_1}(M)|$.

$\forall N \subseteq X_2$ рассмотрим $\varphi_G(N \cup X_1) = Y_1 \cup \varphi_{H_2}(N)$. Тогда

$$|N| + |X_1| = |N \cup X_1| \leq \varphi_G(N \cup X_1) = |Y_1| + |\varphi_{H_2}(N)|.$$

Так как $|X_1| = |Y_1|$ имеем $|N| \leq |\varphi_{H_2}(N)|$

Доказательство теоремы Холла

⇐ Пусть

$$\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|.$$

По индукции по $|X|$ построим паросочетание в G .

Шаг индукции. Сл. 2. Пусть для некоторого непустого подмножества $X_1 \subset X$ выполняется равенство $|X_1| = |\varphi_G(X_1)|$. Обозначим $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, $X_2 = X \setminus X_1$, $Y_2 = Y \setminus Y_1$. Рассмотрим граф H_1 , порожденный вершинами $X_1 \cup Y_1$, и граф H_2 , порожденный вершинами $X_2 \cup Y_2$. Докажем, что оба этих графа удовлетворяют условию теоремы.

Заметим, что так как $Y_1 = \varphi_G(X_1)$, то $\forall M \subseteq X_1 \quad \varphi_{H_1}(M) = \varphi_G(M)$, откуда $|M| \leq |\varphi_{H_1}(M)|$.

$\forall N \subseteq X_2$ рассмотрим $\varphi_G(N \cup X_1) = Y_1 \cup \varphi_{H_2}(N)$. Тогда

$$|N| + |X_1| = |N \cup X_1| \leq \varphi_G(N \cup X_1) = |Y_1| + |\varphi_{H_2}(N)|.$$

Так как $|X_1| = |Y_1|$ имеем $|N| \leq |\varphi_{H_2}(N)|$

По предположению индукции можно построить паросочетания P_1, P_2 в графах H_1, H_2 насыщающие соответственно множества X_1, X_2 .

Тогда искомое паросочетание в графе G это $P_1 \cup P_2$.

Следствие

Пусть $G = (X, Y, E)$ — двудольный граф. В G существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда $|X| = |Y|$ и $\forall M \subseteq X \quad |\varphi_G(M)| \geq |M|$.