Эйлеровы и гамильтоновы циклы. Деревья.

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

14 октября 2018 г.

Мосты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Его ребро e называется мостом, если $k(G - e) > k(G)$.

Мосты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Его ребро e называется мостом, если $k(G - e) > k(G)$.

Лемма 1

Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле. При удалении моста число компонент связности увеличивается ровно на 1.

Мосты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Его ребро e называется мостом, если $k(G - e) > k(G)$.

Лемма 1

Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле. При удалении моста число компонент связности увеличивается ровно на 1.

Заметим, что утверждение достаточно доказать для связного графа. Пусть ребро $e = (u, v)$ содержится в некотором цикле C. Рассмотрим произвольные вершины графа w_1, w_2. Так как граф связный, то существует путь из w_1 в w_2. Если ребро e не принадлежит этому пути, то w_1 и w_2 связаны в графе $G - e$.

Мосты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Его ребро e называется мостом, если $k(G - e) > k(G)$.

Лемма 1

Ребро является мостом тогда и только тогда, когда оно не содержится ни в одном цикле. При удалении моста число компонент связности увеличивается ровно на 1.

Заметим, что утверждение достаточно доказать для связного графа. Пусть ребро $e = (u, v)$ содержится в некотором цикле C. Рассмотрим произвольные вершины графа w_1, w_2. Так как граф связный, то существует путь из w_1 в w_2. Если ребро e не принадлежит этому пути, то w_1 и w_2 связаны в графе $G - e$.
Иначе этот путь можно представить как $w_1 \rightsquigarrow u \xrightarrow{e} v \rightsquigarrow w_2$. А также $w_1 \rightsquigarrow u \xrightarrow{\setminus e} v \rightsquigarrow w_2$. Поэтому в графе $G - e$ эти две вершины будут связаны. При удалении моста число компонент связности станет две: компонента, содержащая u, и компонента, содержащая v.

Эйлеров цикл

Определение

Цикл называется эйлеровым, если он содержит все ребра графа (но каждое ребро входит в цикл ровно один раз). Граф, содержащий эйлеров цикл называется эйлеровым.

Эйлеров цикл

Определение

Цикл называется эйлеровым, если он содержит все ребра графа (но каждое ребро входит в цикл ровно один раз). Граф, содержащий эйлеров цикл называется эйлеровым.

Теорема (Эйлер, 1736)

Пусть G — граф без изолированных вершин. Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Эйлеров цикл

Определение

Цикл называется эйлеровым, если он содержит все ребра графа (но каждое ребро входит в цикл ровно один раз). Граф, содержащий эйлеров цикл называется эйлеровым.

Теорема (Эйлер, 1736)

Пусть G — граф без изолированных вершин. Граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Пусть граф эйлеров. Так как в нем есть цикл, содержащий все ребра и вершины графа, то граф связен. Степень каждой его вершины четна, так как в процессе обхода по эйлеровому циклу в вершину "входят" по одному ребру, а "выходят" по другому.

Доказательство теоремы Эйлера

Обратно: пусть G — связный граф без изолированных вершин, степень каждой вершины которого четна. Построим в нем эйлеров цикл.

Доказательство теоремы Эйлера

Обратно: пусть G — связный граф без изолированных вершин, степень каждой вершины которого четна. Построим в нем эйлеров цикл.

Возьмем произвольную вершину v_0 и построим путь $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ до тех пор, пока не наткнемся на вершину v_n, по всем ребрам из которой мы уже ходили.

Доказательство теоремы Эйлера

Обратно: пусть G — связный граф без изолированных вершин, степень каждой вершины которого четна. Построим в нем эйлеров цикл.
Возьмем произвольную вершину v_0 и построим путь $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ до тех пор, пока не наткнемся на вершину v_n, по всем ребрам из которой мы уже ходили. Заметим, что $v_0 = v_n$, так как в противном случае в вершине v_n есть еще по крайней мере одно ребро, по которому мы еще не ходили и, следовательно, путь можно продолжить.

Доказательство теоремы Эйлера

Обратно: пусть G — связный граф без изолированных вершин, степень каждой вершины которого четна. Построим в нем эйлеров цикл.
Возьмем произвольную вершину v_0 и построим путь $v_0 \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$ до тех пор, пока не наткнемся на вершину v_n, по всем ребрам из которой мы уже ходили. Заметим, что $v_0 = v_n$, так как в противном случае в вершине v_n есть еще по крайней мере одно ребро, по которому мы еще не ходили и, следовательно, путь можно продолжить. Итак, мы построили цикл C. Если он эйлеров, то теорема доказана.

Доказательство теоремы Эйлера

Итак, мы построили цикл C. Если он эйлеров, то теорема доказана. Иначе существует ребро $f = (u, w) \notin C$.

Доказательство теоремы Эйлера

Итак, мы построили цикл C. Если он эйлеров, то теорема доказана. Иначе существует ребро $f = (u, w) \notin C$. Так как граф G связен, то существует путь p из v_0 в u. Пусть v_i — последняя вершина цикла C на этом пути. Без ограничения общности можем считать, что следующей вершиной на пути p является u.

Доказательство теоремы Эйлера

Итак, мы построили цикл C. Если он эйлеров, то теорема доказана. Иначе существует ребро $f = (u, w) \notin C$. Так как граф G связен, то существует путь p из v_0 в u. Пусть v_i — последняя вершина цикла C на этом пути. Без ограничения общности можем считать, что следующей вершиной на пути p является u.
Удалим из графа G все ребра из цикла C и рассмотрим компоненту связности получившегося графа G', которая содержит ребро f.

Доказательство теоремы Эйлера

Итак, мы построили цикл C. Если он эйлеров, то теорема доказана. Иначе существует ребро $f = (u, w) \notin C$. Так как граф G связен, то существует путь p из v_0 в u. Пусть v_i — последняя вершина цикла C на этом пути. Без ограничения общности можем считать, что следующей вершиной на пути p является u.
Удалим из графа G все ребра из цикла C и рассмотрим компоненту связности получившегося графа G', которая содержит ребро f. Заметим, что граф G' связен и степень каждой его вершины четная. Построим цикл C', начинающийся с $v_i \to u \xrightarrow{f} v$ так, как указано выше. Объединим циклы C и C'. Если полученный цикл не эйлеров, то построим цикл C'', содержащий по крайней мере одно ребро, не принадлежащее $C \cup C'$.

Точки сочленения

Определение

Вершина v называется точкой сочленения графа G, если $k(G - v) > k(G)$.

Точки сочленения

Определение

Вершина v называется точкой сочленения графа G, если $k(G - v) > k(G)$.

Лемма 2

Вершина v является точкой сочленения в графе G тогда и только тогда, когда существуют две вершины w_1 и w_2 такие, что все пути из w_1 в w_2 ведут через v.

Точки сочленения

Определение

Вершина v называется точкой сочленения графа G, если $k(G - v) > k(G)$.

Лемма 2

Вершина v является точкой сочленения в графе G тогда и только тогда, когда существуют две вершины w_1 и w_2 такие, что все пути из w_1 в w_2 ведут через v.

Докажем утверждение для связного графа.
Пусть v — точка сочленения. Рассмотрим несвязный граф $G - v$ и возьмем произвольные вершины w_1, w_2 из разных компонент связности. Если между ними существует путь, не содержащий v, то в $G - v$ этот путь сохранится и вершины будут связаны.

Точки сочленения

Определение

Вершина v называется точкой сочленения графа G, если $k(G - v) > k(G)$.

Лемма 2

Вершина v является точкой сочленения в графе G тогда и только тогда, когда существуют две вершины w_1 и w_2 такие, что все пути из w_1 в w_2 ведут через v.

Докажем утверждение для связного графа.
Пусть v — точка сочленения. Рассмотрим несвязный граф $G - v$ и возьмем произвольные вершины w_1, w_2 из разных компонент связности. Если между ними существует путь, не содержащий v, то в $G - v$ этот путь сохранится и вершины будут связаны.
И обратно: если существуют вершины w_1, w_2 такие, что каждый путь между ними содержит v, то в графе $G - v$ они будут не связаны, следовательно $k(G - v) > k(G)$.

Двусвязные графы и блоки

Определение

Граф называется двусвязным, если он не содержит точек сочленения.

Двусвязные графы и блоки

Определение

Граф называется двусвязным, если он не содержит точек сочленения.

Определение

Блоком или компонентой двусвязности называется максимальный двусвязный подграф графа.

Двусвязные графы и блоки

Определение

Граф называется двусвязным, если он не содержит точек сочленения.

Определение

Блоком или компонентой двусвязности называется максимальный двусвязный подграф графа.

Лемма 3

Любые два блока либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по одной вершине, которая является точкой сочленения.

Доказательство леммы 3

Пусть G — связный граф, B_1, B_2 — два его блока. Предположим, что их пересечение содержит две различные вершины.
Рассмотрим подграф G' графа G, порожденный вершинами из $V(B_1) \cup V(B_2)$. Докажем, что он двусвязный и получим противоречие.

Доказательство леммы 3

Пусть G — связный граф, B_1, B_2 — два его блока. Предположим, что их пересечение содержит две различные вершины.
Рассмотрим подграф G' графа G, порожденный вершинами из $V(B_1) \cup V(B_2)$. Докажем, что он двусвязный и получим противоречие.
Рассмотрим вершину $v \in V(G')$ и две произвольные вершины $w_1 \in V(B_1), w_2 \in V(B_2)$. Рассмотрим граф $G' - v$ и обозначим через u вершину, которая принадлежит обоим блокам.

Доказательство леммы 3

Пусть G — связный граф, B_1, B_2 — два его блока. Предположим, что их пересечение содержит две различные вершины.
Рассмотрим подграф G' графа G, порожденный вершинами из $V(B_1) \cup V(B_2)$. Докажем, что он двусвязный и получим противоречие.
Рассмотрим вершину $v \in V(G')$ и две произвольные вершины $w_1 \in V(B_1), w_2 \in V(B_2)$. Рассмотрим граф $G' - v$ и обозначим через u вершину, которая принадлежит обоим блокам.
Так как блок не содержит точек сочленения, то в существует путь из w_1 в u в графе $B_1 - v$, а также путь из u в w_2 в графе $B_2 - v$.
Следовательно, граф $G' - v$ связен и v не точка сочленения.

Доказательство леммы 3

Пусть G — связный граф, B_1, B_2 — два его блока. Предположим, что их пересечение содержит две различные вершины.
Рассмотрим подграф G' графа G, порожденный вершинами из $V(B_1) \cup V(B_2)$. Докажем, что он двусвязный и получим противоречие.
Рассмотрим вершину $v \in V(G')$ и две произвольные вершины $w_1 \in V(B_1), w_2 \in V(B_2)$. Рассмотрим граф $G' - v$ и обозначим через u вершину, которая принадлежит обоим блокам.
Так как блок не содержит точек сочленения, то в существует путь из w_1 в u в графе $B_1 - v$, а также путь из u в w_2 в графе $B_2 - v$.
Следовательно, граф $G' - v$ связен и v не точка сочленения.
Пусть v — единственная общая вершина блоков B_1 и B_2. Тогда снова рассмотрим подграф G', порожденный всеми вершинами блоков B_1 и B_2. Если v не точка сочленения, то граф $G' - v$ связен. Рассмотрим $u \neq v$ (пусть $u \in V(B_1)$) и граф $G' - u$. Тогда для любой пары вершин $w_1 \in V(B_1), w_2 \in V(B_2)$ есть путь из w_1 в v в графе $B_1 - u$ и есть путь из v в w_2 в графе B_2. Следовательно, G' двусвязен.

Гамильтонов цикл

Определение

Гамильтоновым циклом называется простой цикл в графе, содержащий все его вершины. Граф называется гамильтоновым, если в нем есть гамильтонов цикл.

Гамильтонов цикл

Определение

Гамильтоновым циклом называется простой цикл в графе, содержащий все его вершины. Граф называется гамильтоновым, если в нем есть гамильтонов цикл.

Лемма 4 (Необходимое условие существования гамильтонового цикла)

Всякий гамильтонов граф двусвязен.

Следует из более общего утверждения.

Обобщенные точки сочленения

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество его вершин $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ называется обобщенной точкой сочленения k-го порядка, если $k(G - X) \geq k(G) + k$ и $\forall X' \subset X \quad k(G - X') = k(G)$.

Обобщенные точки сочленения

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество его вершин $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ называется обобщенной точкой сочленения k-го порядка, если $k(G - X) \geq k(G) + k$ и $\forall X' \subset X \quad k(G - X') = k(G)$.

Точка сочленения является точкой сочленения первого порядка.

Обобщенные точки сочленения

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество его вершин $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ называется обобщенной точкой сочленения k-го порядка, если $k(G - X) \geq k(G) + k$ и $\forall X' \subset X \quad k(G - X') = k(G)$.

Точка сочленения является точкой сочленения первого порядка.

Лемма 4 (Необходимое условие существования гамильтонового цикла)

Гамильтонов граф не содержит точек сочленения k-го порядка для любого k.

Доказательство необходимого условия

Пусть G — гамильтонов граф, содержащий точку сочленения $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ k-го порядка. Тогда граф $G - X$ имеет по крайней мере $k + 1$ компоненту связности (для простоты будем считать, что их ровно $k + 1$). Обозначим эти компоненты через $G_1, \ldots, G_{k+1}$ в порядке обхода гамильтонового цикла.

Доказательство необходимого условия

Пусть G — гамильтонов граф, содержащий точку сочленения $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ k-го порядка. Тогда граф $G - X$ имеет по крайней мере $k + 1$ компоненту связности (для простоты будем считать, что их ровно $k + 1$). Обозначим эти компоненты через $G_1, \ldots, G_{k+1}$ в порядке обхода гамильтонового цикла.
Рассмотрим гамильтонов цикл, начинающийся в вершине v_1. Пусть дальше он идет по вершинам из компоненты G_1. Далее цикл должен попасть в компоненту G_2, побывав в вершине v_2 и так далее. Итак, цикл из G_i попадает в G_{i+1} через вершину v_{i+1}

Доказательство необходимого условия

Пусть G — гамильтонов граф, содержащий точку сочленения $X = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ k-го порядка. Тогда граф $G - X$ имеет по крайней мере $k + 1$ компоненту связности (для простоты будем считать, что их ровно $k + 1$). Обозначим эти компоненты через $G_1, \ldots, G_{k+1}$ в порядке обхода гамильтонового цикла.
Рассмотрим гамильтонов цикл, начинающийся в вершине v_1. Пусть дальше он идет по вершинам из компоненты G_1. Далее цикл должен попасть в компоненту G_2, побывав в вершине v_2 и так далее. Итак, цикл из G_i попадает в G_{i+1} через вершину v_{i+1}
Из компоненты G_k цикл должен попасть в G_{k+1} через вершину v_{k+1}, но в точке сочленения только k различных вершин. Следовательно, гамильтонов цикл побывает в какой-то из них дважды.

Достаточное условие

Теорема (Оре, 1960)

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный связный граф на n вершинах ($n \geq 3$). Если для любых несмежных вершин $u, v \in V$ выполняется $\deg u + \deg v \geq n$, то граф G гамильтонов.

Достаточное условие

Теорема (Оре, 1960)

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный связный граф на n вершинах ($n \geq 3$). Если для любых несмежных вершин $u, v \in V$ выполняется $\deg u + \deg v \geq n$, то граф G гамильтонов.

От противного. Пусть граф $G = (V, E)$ удовлетворяет условию теоремы, но не является гамильтоновым. Рассмотрим произвольную вершину v_0 и попытаемся построить гамильтонов цикл.

Достаточное условие

Теорема (Оре, 1960)

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный связный граф на n вершинах ($n \geq 3$). Если для любых несмежных вершин $u, v \in V$ выполняется $\deg u + \deg v \geq n$, то граф G гамильтонов.

От противного. Пусть граф $G = (V, E)$ удовлетворяет условию теоремы, но не является гамильтоновым. Рассмотрим произвольную вершину v_0 и попытаемся построить гамильтонов цикл. В какой-то момент окажется, что мы придем в вершину v_{i_1}, из которой все ребра ведут в уже посещенные вершины. Тогда добавим в граф дополнительную вершину x_1, которую соединим со всеми вершинами из V.

Достаточное условие

Теорема (Оре, 1960)

Пусть $G = (V, E)$ — обыкновенный связный граф на n вершинах ($n \geq 3$). Если для любых несмежных вершин $u, v \in V$ выполняется $\deg u + \deg v \geq n$, то граф G гамильтонов.

От противного. Пусть граф $G = (V, E)$ удовлетворяет условию теоремы, но не является гамильтоновым. Рассмотрим произвольную вершину v_0 и попытаемся построить гамильтонов цикл. В какой-то момент окажется, что мы придем в вершину v_{i_1}, из которой все ребра ведут в уже посещенные вершины. Тогда добавим в граф дополнительную вершину x_1, которую соединим со всеми вершинами из V.

В новом графе G_1 продолжим строить гамильтонов цикл: $v_0 \rightsquigarrow u_1 \to x_1 \to v_1 \rightsquigarrow u_2$, где все ребра из вершины u_2 ведут в уже посещенные вершины. Тогда добавим новую вершину x_2 с теми же свойствами, что x_1 и продолжим в новом графе G_2 строить гамильтонов цикл.

Доказательство теоремы Оре

В результате получится гамильтонов граф G_m. Будем считать, что число $m \geq 1$ минимально среди всех возможных.

Доказательство теоремы Оре

В результате получится гамильтонов граф G_m. Будем считать, что число $m \geq 1$ минимально среди всех возможных.
Рассмотрим цепь $u \to x \to v$, где x — добавленная вершина. Тогда u и v не смежны. Пусть w — произвольная вершина, смежная с v. Обозначим через w' вершину, которая предшествует w в гамильтоновом цикле и покажем, что w' и u не смежны.

Доказательство теоремы Оре

В результате получится гамильтонов граф G_m. Будем считать, что число $m \geq 1$ минимально среди всех возможных.
Рассмотрим цепь $u \to x \to v$, где x — добавленная вершина. Тогда u и v не смежны. Пусть w — произвольная вершина, смежная с v.
Обозначим через w' вершину, которая предшествует w в гамильтоновом цикле и покажем, что w' и u не смежны.
Пусть это не так. Рассмотрим гамильтонов цикл:

$$u \to x \to v \rightsquigarrow w' \to w \rightsquigarrow u$$

Доказательство теоремы Оре

В результате получится гамильтонов граф G_m. Будем считать, что число $m \geq 1$ минимально среди всех возможных.
Рассмотрим цепь $u \to x \to v$, где x — добавленная вершина. Тогда u и v не смежны. Пусть w — произвольная вершина, смежная с v.
Обозначим через w' вершину, которая предшествует w в гамильтоновом цикле и покажем, что w' и u не смежны.
Пусть это не так. Рассмотрим гамильтонов цикл:

$$u \to x \to v \rightsquigarrow w' \to w \rightsquigarrow u$$

В графе есть ребра (u, w') (наше предположение) и (v, w). Тогда в графе есть гамильтонов цикл

$$u \to w' \rightsquigarrow v \to w \rightsquigarrow u,$$

не содержащий вершину x. Противоречие с минимальностью числа m.

Доказательство теоремы Оре

Итак, мы доказали следующее утверждение: пусть $u \to x \to v$ часть пути в гамильтоновом цикле графе G_m, w — произвольная вершина, смежная с v. Тогда вершина w' не смежна с u и, следовательно, $w' \in V$.

Доказательство теоремы Оре

Итак, мы доказали следующее утверждение: пусть $u \to x \to v$ часть пути в гамильтоновом цикле графе G_m, w — произвольная вершина, смежная с v. Тогда вершина w' не смежна с u и, следовательно, $w' \in V$.

Пусть $\deg_G v = s$ — степень вершины v в исходном графе G, тогда $z_1, \ldots, z_s$ — вершины из V, которые смежны с v.

Доказательство теоремы Оре

Итак, мы доказали следующее утверждение: пусть $u \to x \to v$ часть пути в гамильтоновом цикле графе G_m, w — произвольная вершина, смежная с v. Тогда вершина w' не смежна с u и, следовательно, $w' \in V$.

Пусть $\deg_G v = s$ — степень вершины v в исходном графе G, тогда $z_1, \ldots, z_s$ — вершины из V, которые смежны с v. Кроме того, все дополнительные вершины $x_1, \ldots, x_m$ также смежны с v. Тогда, как показано выше, $z'_1, \ldots, z'_s \in V$, а также по построению все вершины $x'_1, \ldots, x'_m$ предшествующие дополнительным также принадлежат V.

Доказательство теоремы Оре

Итак, мы доказали следующее утверждение: пусть $u \to x \to v$ часть пути в гамильтоновом цикле графе G_m, w — произвольная вершина, смежная с v. Тогда вершина w' не смежна с u и, следовательно, $w' \in V$.

Пусть $\deg_G v = s$ — степень вершины v в исходном графе G, тогда $z_1, \ldots, z_s$ — вершины из V, которые смежны с v. Кроме того, все дополнительные вершины $x_1, \ldots, x_m$ также смежны с v. Тогда, как показано выше, $z'_1, \ldots, z'_s \in V$, а также по построению все вершины $x'_1, \ldots, x'_m$ предшествующие дополнительным также принадлежат V. Следовательно, в графе G есть не менее $s + m$ вершин, которые не смежны с u.

Доказательство теоремы Оре

Итак, мы доказали следующее утверждение: пусть $u \to x \to v$ часть пути в гамильтоновом цикле графе G_m, w — произвольная вершина, смежная с v. Тогда вершина w' не смежна с u и, следовательно, $w' \in V$.

Пусть $\deg_G v = s$ — степень вершины v в исходном графе G, тогда $z_1, \ldots, z_s$ — вершины из V, которые смежны с v. Кроме того, все дополнительные вершины $x_1, \ldots, x_m$ также смежны с v. Тогда, как показано выше, $z'_1, \ldots, z'_s \in V$, а также по построению все вершины $x'_1, \ldots, x'_m$ предшествующие дополнительным также принадлежат V. Следовательно, в графе G есть не менее $s + m$ вершин, которые не смежны с u.

Число не смежных с u вершин в графе G равно $n - \deg_G u$, тогда $n - \deg_G u \geq s + m$.

Доказательство теоремы Оре

Итак, мы доказали следующее утверждение: пусть $u \to x \to v$ часть пути в гамильтоновом цикле графе G_m, w — произвольная вершина, смежная с v. Тогда вершина w' не смежна с u и, следовательно, $w' \in V$.

Пусть $\deg_G v = s$ — степень вершины v в исходном графе G, тогда $z_1, \ldots, z_s$ — вершины из V, которые смежны с v. Кроме того, все дополнительные вершины $x_1, \ldots, x_m$ также смежны с v. Тогда, как показано выше, $z'_1, \ldots, z'_s \in V$, а также по построению все вершины $x'_1, \ldots, x'_m$ предшествующие дополнительным также принадлежат V. Следовательно, в графе G есть не менее $s + m$ вершин, которые не смежны с u.

Число не смежных с u вершин в графе G равно $n - \deg_G u$, тогда $n - \deg_G u \geq s + m$.

Так как u и v не смежны, то для них выполняется условие теоремы: $\deg_G u + \deg_G v \geq n$, откуда

$$s = \deg_G v \geq n - \deg_G u \geq s + m$$

Так как $m \geq 1$, то мы получили противоречие.

Определение

Определение

Деревом называется связный ацикличный граф. Лес — граф без циклов.

Определение

Определение

Деревом называется связный ацикличный граф. Лес — граф без циклов.

Лемма о корневом изображении дерева

Пусть $G = (V, E)$ — дерево, тогда существует разбиение множества его вершин $\{V_0, \ldots, V_k\}$ такое, что

Определение

Определение

Деревом называется связный ацикличный граф. Лес — граф без циклов.

Лемма о корневом изображении дерева

Пусть $G = (V, E)$ — дерево, тогда существует разбиение множества его вершин $\{V_0, \ldots, V_k\}$ такое, что

1) $V_0 = \{v_0\}$ (v_0 — корень)

Определение

Определение

Деревом называется связный ацикличный граф. Лес — граф без циклов.

Лемма о корневом изображении дерева

Пусть $G = (V, E)$ — дерево, тогда существует разбиение множества его вершин $\{V_0, \ldots, V_k\}$ такое, что

1) $V_0 = \{v_0\}$ (v_0 — корень)
2) $\forall u, v \in V_i$ вершины u, v не смежны.

Определение

Определение

Деревом называется связный ацикличный граф. Лес — граф без циклов.

Лемма о корневом изображении дерева

Пусть $G = (V, E)$ — дерево, тогда существует разбиение множества его вершин $\{V_0, \ldots, V_k\}$ такое, что

1) $V_0 = \{v_0\}$ (v_0 — корень)
2) $\forall u, v \in V_i$ вершины u, v не смежны.
3) $\forall u \in V_{i+1} \quad \exists! v \in V_i$ такая, что u и v смежны.

Определение

Определение

Деревом называется связный ацикличный граф. Лес — граф без циклов.

Лемма о корневом изображении дерева

Пусть $G = (V, E)$ — дерево, тогда существует разбиение множества его вершин $\{V_0, \ldots, V_k\}$ такое, что

1) $V_0 = \{v_0\}$ (v_0 — корень)
2) $\forall u, v \in V_i$ вершины u, v не смежны.
3) $\forall u \in V_{i+1} \quad \exists! v \in V_i$ такая, что u и v смежны.

Запустить поиск в ширину из вершины v_0. В множестве V_i лежат ровно те вершины, расстояние о которых равно i. 2) и 3) следуют из того, что в графе нет циклов.

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;
2) G — обыкновенный граф, в котором любые две различные вершины соединены единственной простой цепью;

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;
2) G — обыкновенный граф, в котором любые две различные вершины соединены единственной простой цепью;
3) G — ацикличный граф такой, что если в G добавить ребро, то получится единственный простой цикл;

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;
2) G — обыкновенный граф, в котором любые две различные вершины соединены единственной простой цепью;
3) G — ацикличный граф такой, что если в G добавить ребро, то получится единственный простой цикл;
4) G — обыкновенный связный граф, $m = n - 1$;

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;
2) G — обыкновенный граф, в котором любые две различные вершины соединены единственной простой цепью;
3) G — ацикличный граф такой, что если в G добавить ребро, то получится единственный простой цикл;
4) G — обыкновенный связный граф, $m = n - 1$;
5) G — ацикличный граф, $m = n - 1$;

Теорема о свойствах деревьев

Теорема о деревьях

Следующие условия эквивалентны:

1) G — дерево;
2) G — обыкновенный граф, в котором любые две различные вершины соединены единственной простой цепью;
3) G — ацикличный граф такой, что если в G добавить ребро, то получится единственный простой цикл;
4) G — обыкновенный связный граф, $m = n - 1$;
5) G — ацикличный граф, $m = n - 1$;
6) G — обыкновенный связный граф, всякое ребро которого является мостом.

Число $\gamma = m - n + k$ называется цикломатическим числом графа.