

Основные понятия теории графов

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

11 октября 2018 г.

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

- Ребро $e = (u, u)$ называется *петлей*;

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

- Ребро $e = (u, u)$ называется *петлей*;
- Ребра $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (u, v)$ называются *кратными*;

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

- Ребро $e = (u, u)$ называется *петлей*;
- Ребра $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (u, v)$ называются *кратными*;
- Пусть $e = (u, v)$, тогда вершины u и v называются **смежными** и **инцидентными** ребру e . Говорят также, что ребро e **инцидентно** вершинам u и v ;

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

- Ребро $e = (u, u)$ называется *петлей*;
- Ребра $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (u, v)$ называются *кратными*;
- Пусть $e = (u, v)$, тогда вершины u и v называются **смежными** и **инцидентными** ребру e . Говорят также, что ребро e **инцидентно** вершинам u и v ;
- **Степенью вершины** $\deg v$ называется число инцидентных вершине v ребер (каждая петля входит в это число дважды);

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

- Ребро $e = (u, u)$ называется *петлей*;
- Ребра $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (u, v)$ называются *кратными*;
- Пусть $e = (u, v)$, тогда вершины u и v называются **смежными** и **инцидентными** ребру e . Говорят также, что ребро e **инцидентно** вершинам u и v ;
- **Степенью вершины** $\deg v$ называется число инцидентных вершине v ребер (каждая петля входит в это число дважды);
- Договоримся обозначать через $V(G)$, $E(G)$ соответственно, множество вершин и ребер графа G , а через $n = |V(G)|$ и $m = |E(G)|$ количество вершин и ребер.

Определение графа 1

Неориентированным графом (далее просто граф) называется совокупность *вершин* V и *ребер* E , где каждое ребро $e = (u, v)$ задается парой (необязательно различных) вершин u и v .

- Ребро $e = (u, u)$ называется *петлей*;
- Ребра $e_1 = (u, v)$, $e_2 = (u, v)$ называются *кратными*;
- Пусть $e = (u, v)$, тогда вершины u и v называются **смежными** и **инцидентными** ребру e . Говорят также, что ребро e **инцидентно** вершинам u и v ;
- **Степенью вершины** $\deg v$ называется число инцидентных вершине v ребер (каждая петля входит в это число дважды);
- Договоримся обозначать через $V(G)$, $E(G)$ соответственно, множество вершин и ребер графа G , а через $n = |V(G)|$ и $m = |E(G)|$ количество вершин и ребер.

Определение

Граф без петель и кратных ребер называется **обыкновенным**.

Определение графа 2

Неориентированным графом называется пара $G = (V, E)$, где V — множество (вершин), а E — симметричное мультибинарное отношение на множестве V (мультимножество ребер).

Определение графа 2

Неориентированным графом называется пара $G = (V, E)$, где V — множество (вершин), а E — симметричное мультибинарное отношение на множестве V (мультимножество ребер).

Замечание

Если граф обыкновенный, то множество его ребер просто симметричное бинарное отношение на множестве вершин.

Определение графа 2

Неориентированным графом называется пара $G = (V, E)$, где V — множество (вершин), а E — симметричное мультибинарное отношение на множестве V (мультимножество ребер).

Замечание

Если граф обыкновенный, то множество его ребер просто симметричное бинарное отношение на множестве вершин.

Определение

Матрицей смежности графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ называется $S = (s_{ij})_{n \times n}$ матрица бинарного отношения E такая, что s_{ij} равна кратности ребра (v_i, v_j) , если $i \neq j$; если ребро является петлей, то s_{ii} равна $2k$, где k — количество петель (v_i, v_i) .

Алгебраическое определение

Определение графа 2

Неориентированным графом называется пара $G = (V, E)$, где V — множество (вершин), а E — симметричное мультибинарное отношение на множестве V (мультимножество ребер).

Замечание

Если граф обыкновенный, то множество его ребер просто симметричное бинарное отношение на множестве вершин.

Определение

Матрицей смежности графа $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ называется $S = (s_{ij})_{n \times n}$ матрица бинарного отношения E такая, что s_{ij} равна кратности ребра (v_i, v_j) , если $i \neq j$; если ребро является петлей, то s_{ii} равна $2k$, где k — количество петель (v_i, v_i) .

Упражнение. Как по матрице смежности подсчитать степень вершины? А как подсчитать число всех ребер?

Лемма о рукопожатиях

Лемма о рукопожатиях

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m$$

Лемма о рукопожатиях

Лемма о рукопожатиях

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m$$

Это простое утверждение следует из того, что каждое ребро $e = (u, v)$ входит в $\deg u$ и $\deg v$ и, следовательно, входит в левую сумму дважды.

Лемма о рукопожатиях

Лемма о рукопожатиях

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m$$

Это простое утверждение следует из того, что каждое ребро $e = (u, v)$ входит в $\deg u$ и $\deg v$ и, следовательно, входит в левую сумму дважды.

Определение

Обыкновенный граф на n вершинах, каждая из которых смежна со всеми остальными называется **полным** и обозначается K_n .

Лемма о рукопожатиях

Лемма о рукопожатиях

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

$$\sum_{v \in V} \deg v = 2m$$

Это простое утверждение следует из того, что каждое ребро $e = (u, v)$ входит в $\deg u$ и $\deg v$ и, следовательно, входит в левую сумму дважды.

Определение

Обыкновенный граф на n вершинах, каждая из которых смежна со всеми остальными называется **полным** и обозначается K_n .

Следствие

Степень каждой вершины в K_n равна $\frac{n(n-1)}{2}$.

Подграфы и операции над графами

Определение

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и если $e = (u, v) \in E'$, то $u, v \in V'$.

Подграфы и операции над графами

Определение

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и если $e = (u, v) \in E'$, то $u, v \in V'$.

Удаление ребер и вершин

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

- Граф $G - e$, полученный **удалением ребра e** , — это подграф $G' = (V, E \setminus e)$ графа G ;

Подграфы и операции над графами

Определение

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и если $e = (u, v) \in E'$, то $u, v \in V'$.

Удаление ребер и вершин

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

- Граф $G - e$, полученный **удалением ребра e** , — это подграф $G' = (V, E \setminus e)$ графа G ;
- Граф $G - v$, полученный **удалением вершины v** , — это подграф $G' = (V \setminus v, E \setminus P)$ графа G такой, что P — множество инцидентных вершине v ребер.

Подграфы и операции над графами

Определение

Граф $G' = (V', E')$ называется **подграфом** графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и если $e = (u, v) \in E'$, то $u, v \in V'$.

Удаление ребер и вершин

Пусть $G = (V, E)$ — граф, тогда

- Граф $G - e$, полученный **удалением ребра e** , — это подграф $G' = (V, E \setminus e)$ графа G ;
- Граф $G - v$, полученный **удалением вершины v** , — это подграф $G' = (V \setminus v, E \setminus P)$ графа G такой, что P — множество инцидентных вершине v ребер.

Определение

Подграф $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ называется **порожденным** множеством вершин V' , если вершины u и v были смежны в графе G и $u, v \in V'$, то $e \in E'$.

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Упражнение. Как по матрицам смежности графов установить, что эти графы изоморфны?

Изоморфизм графов

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Упражнение. Как по матрицам смежности графов установить, что эти графы изоморфны?

Необходимые (но не достаточные!) условия изоморфности графов

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два изоморфных графа. Тогда

Изоморфизм графов

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Упражнение. Как по матрицам смежности графов установить, что эти графы изоморфны?

Необходимые (но не достаточные!) условия изоморфности графов

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два изоморфных графа. Тогда

$$1 \quad |V_1| = |V_2|, |E_1| = |E_2|;$$

Изоморфизм графов

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Упражнение. Как по матрицам смежности графов установить, что эти графы изоморфны?

Необходимые (но не достаточные!) условия изоморфности графов

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два изоморфных графа. Тогда

- 1 $|V_1| = |V_2|$, $|E_1| = |E_2|$;
- 2 Наборы степеней вершин совпадают;

Изоморфизм графов

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Упражнение. Как по матрицам смежности графов установить, что эти графы изоморфны?

Необходимые (но не достаточные!) условия изоморфности графов

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два изоморфных графа. Тогда

- 1 $|V_1| = |V_2|$, $|E_1| = |E_2|$;
- 2 Наборы степеней вершин совпадают;
- 3 Наборы подграфов совпадают.

Изоморфизм графов

Определение

Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называются **изоморфными**, если существует биекция $f: V_1 \rightarrow V_2$ такая, что $\forall u, v \in V_1$ количество ребер инцидентных u и v равно количеству ребер инцидентных $f(u)$ и $f(v)$.

Упражнение. Как по матрицам смежности графов установить, что эти графы изоморфны?

Необходимые (но не достаточные!) условия изоморфности графов

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ — два изоморфных графа. Тогда

- 1 $|V_1| = |V_2|$, $|E_1| = |E_2|$;
- 2 Наборы степеней вершин совпадают;
- 3 Наборы подграфов совпадают.

Упражнение. Приведите примеры неизомерфных графов, которые показывают, что эти условия не являются достаточными

Маршруты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер $u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

Маршруты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер

$u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

- Вершина u называется **началом** маршрута, а w — его **концом**;

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер

$u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

- Вершина u называется **началом** маршрута, а w — его **концом**;
- Если в маршруте каждое ребро встречается ровно один раз, то он называется **цепью**;

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер

$u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

- Вершина u называется **началом** маршрута, а w — его **концом**;
- Если в маршруте каждое ребро встречается ровно один раз, то он называется **цепью**;
- Цепь, в которой каждая вершина встречается ровно один раз, называется **простой цепью** или **путем** (от англ. path);

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер

$u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

- Вершина u называется **началом** маршрута, а w — его **концом**;
- Если в маршруте каждое ребро встречается ровно один раз, то он называется **цепью**;
- Цепь, в которой каждая вершина встречается ровно один раз, называется **простой цепью** или **путем** (от англ. path);
- Если в цепи начало и конец совпадают, то она называется **циклом**;

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер

$u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

- Вершина u называется **началом** маршрута, а w — его **концом**;
- Если в маршруте каждое ребро встречается ровно один раз, то он называется **цепью**;
- Цепь, в которой каждая вершина встречается ровно один раз, называется **простой цепью** или **путем** (от англ. path);
- Если в цепи начало и конец совпадают, то она называется **циклом**;
- Цикл, являющийся простой цепью, называется **простым циклом**.

Маршруты в графе

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф. **Маршрутом** из вершины u в вершину w называется последовательность вершин и ребер

$u = v_0, f_1, v_1, f_2, v_2, \dots, v_{n-1}, f_n, v_n = w$ такая, что каждое ребро f_i инцидентно вершинам (v_{i-1}, v_i) .

- Вершина u называется **началом** маршрута, а w — его **концом**;
- Если в маршруте каждое ребро встречается ровно один раз, то он называется **цепью**;
- Цепь, в которой каждая вершина встречается ровно один раз, называется **простой цепью** или **путем** (от англ. path);
- Если в цепи начало и конец совпадают, то она называется **циклом**;
- Цикл, являющийся простой цепью, называется **простым циклом**.

Лемма 2

Если в графе существует маршрут из вершины u в вершину v , то существует путь из u в v .

Связность и связанные графы

Определение

Вершины u и v называются **связанными** в графе G , если существует путь из u в v .

Связность и связанные графы

Определение

Вершины u и v называются **связанными** в графе G , если существует путь из u в v .

Это отношение является отношением эквивалентности на множестве вершин V .

Связность и связанные графы

Определение

Вершины u и v называются **связанными** в графе G , если существует путь из u в v .

Это отношение является отношением эквивалентности на множестве вершин V .

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф и $V_1, V_2, \dots, V_k$ — классы эквивалентности относительно отношения "быть связанным". Тогда подграфы $G_1, G_2, \dots, G_k$, порожденные, соответственно, множествами вершин $V_1, V_2, \dots, V_k$ называются **компонентами связности** графа G .

Связность и связанные графы

Определение

Вершины u и v называются **связанными** в графе G , если существует путь из u в v .

Это отношение является отношением эквивалентности на множестве вершин V .

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф и $V_1, V_2, \dots, V_k$ — классы эквивалентности относительно отношения "быть связанным". Тогда подграфы $G_1, G_2, \dots, G_k$, порожденные, соответственно, множествами вершин $V_1, V_2, \dots, V_k$ называются **компонентами связности** графа G .

Определение

Граф G **связный**, если у него одна компонента связности. Или, что то же самое, все его вершины связаны между собой.

Если компонента связности графа состоит из одной вершины, то такая вершина называется **изолированной**. Граф на n вершинах, состоящий из изолированных вершин называется **пустым** и обозначается O_n .

Если компонента связности графа состоит из одной вершины, то такая вершина называется **изолированной**. Граф на n вершинах, состоящий из изолированных вершин называется **пустым** и обозначается O_n .

Число компонент связности графа G обозначается через $k(G)$ (или просто k , иногда $s(G)$)

Лемма 3

В любом графе $G = (V, E)$ выполняется $m \geq n - k$.

Лемма 3

В любом графе $G = (V, E)$ выполняется $m \geq n - k$.

Заметим, что лемму достаточно доказать для обыкновенного графа. Докажем ее по индукции по числу ребер.

Лемма 3

В любом графе $G = (V, E)$ выполняется $m \geq n - k$.

Заметим, что лемму достаточно доказать для обыкновенного графа. Докажем ее по индукции по числу ребер.

База индукции: $m = 0$. Тогда $G = O_n$, $k = n$ и утверждение выполняется.

Лемма 3

В любом графе $G = (V, E)$ выполняется $m \geq n - k$.

Заметим, что лемму достаточно доказать для обыкновенного графа. Докажем ее по индукции по числу ребер.

База индукции: $m = 0$. Тогда $G = O_n$, $k = n$ и утверждение выполняется.

Шаг индукции. Пусть $m \geq n - k$ в графе G . Добавим одно ребро.

Лемма 3

В любом графе $G = (V, E)$ выполняется $m \geq n - k$.

Заметим, что лемму достаточно доказать для обыкновенного графа. Докажем ее по индукции по числу ребер.

База индукции: $m = 0$. Тогда $G = O_n$, $k = n$ и утверждение выполняется.

Шаг индукции. Пусть $m \geq n - k$ в графе G . Добавим одно ребро.

Сл.1 Число компонент связности не изменилось. Тогда $m + 1 \geq m \geq n - k$.

Лемма 3

В любом графе $G = (V, E)$ выполняется $m \geq n - k$.

Заметим, что лемму достаточно доказать для обыкновенного графа. Докажем ее по индукции по числу ребер.

База индукции: $m = 0$. Тогда $G = O_n$, $k = n$ и утверждение выполняется.

Шаг индукции. Пусть $m \geq n - k$ в графе G . Добавим одно ребро.

Сл.1 Число компонент связности не изменилось. Тогда $m + 1 \geq m \geq n - k$.

Сл.2 Число компонент связности уменьшилось на 1. Тогда $m + 1 \geq n - k + 1 = n - (k - 1)$.